数理解析研究所講究録
830巻 1993年 44-55

水の波のカオス
-波の相互作用によるカオスを中心として-

阪大・基礎工　吉永隆夫（Takao YOSHINAGA）

§1．まえおき

流体系でのカオス現象として，Rayleigh-Bénard対流やTaylor-Couette流に見られる"閉鎖流れ系（Closed-Flow System）のカオス"，円管流や円柱後流に見られる"解放流れ系（Open-Flow System）のカオス"，3次元定常流や2次元非定常流での流体粒子の運動に見られる"Lagrangianカオス"，さらに"水波のカオス"などを挙げることができる[1)]．特に，水の波のカオス現象については，外力による場合とよらない場合とで異なる．外力による場合としては，容器の加振や造波機による例が知られており，その現象は多くの場合閉鎖流れ系の場合と同様有限モード（小数自由度系）で近似でき，波のスケールが高々加振機や容器と同程度のスケールであるため，実験でも比較的簡単に観測することができる[2)]．一方，外力によらない場合，一般に現れるモードは連続的であるため解析的な取扱いは簡単ではなく，波の時空間スケールは大きく実験的に調べることも容易ではない．しかし，このような場合でも，Koreteweg-de Vries(K-dV)方程式や非線形Schrödinger(NLS)方程式などの可積分なソリトン方程式に対して，高次（非線形・分散）摂動項や，考慮されていなかった散逸・不安定性の取り込みによりカオス現象が起ることが示され，さらに規則的な空間構造を考えることによる解析的な取扱いも可能である[3)]．これ以外に外力によらない場合として，波と波の相互作用がカオス現象において中心的な役割を果たしている例がある．以下では，特に水面波に焦点を絞って，この相互作用により起ることが予想されるカオス現象のいくつかを紹介する．

§2．4波共鳴相互作用

弱非線形深水重力波の（周波数の整合条件からの弱いズレを含む）4波共鳴

相互作用を記述する方程式とし以下のZakharovの積分方程式が知られている[4]：

$$i\frac{\partial B(\mathbf{k},t)}{\partial t}=\iiint_{-\infty}^{\infty}T(\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)B^*(\mathbf{k}_1,t)B(\mathbf{k}_2,t)B(\mathbf{k}_3,t) \qquad (2.1)$$

$$\times\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\exp\{i[\omega(\mathbf{k})+\omega(\mathbf{k}_1)-\omega(\mathbf{k}_2)-\omega(\mathbf{k}_3)]t\}d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2d\mathbf{k}_3\ ,$$

ここで，$B(\mathbf{k},t)$は波高$\eta(x,t)$と次の関係にある：

$$\eta(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{|\mathbf{k}|}{2\omega(\mathbf{k})}\right)}\{B(\mathbf{k},t)\exp\{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega(\mathbf{k})t]\}+C.C\}d\mathbf{k}\ ,$$

ただし，$\mathbf{x}=(x,y),\mathbf{k}=(k_x,k_y)$であり，波数ベクトル$\mathbf{k}$と角周波数$\omega$の関係は $\omega(\mathbf{k})=\sqrt{g|\mathbf{k}|}$ で与えられ（gは重力加速度），$T(\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)$はスカラーの結合係数である．(2.1)式は，狭いスペクトル幅の準単色波を考えた場合NLS方程式や高次NLS（Dysthe）方程式に帰着することが示されている[5]ことから，これらの方程式に比べより広い波数領域で有効な方程式であると考えることもできる．

(2.1)式の平面波解に対する変調安定性はCrawford等[6]により調べられている（Type I 不安定）．波数$k_0=(k_0,0)$，振幅a_0の一様波列解に対する$k_\pm=(k_0\pm K_x,0)$の"2次元攪乱"は，k_0a_0の増加にともなって不安定となるK_xの範囲が広がるが，$k_0a_0\sim0.4$付近でK_xの値の小さな範囲で再び安定となり，$k_0a_0\sim0.5$ではすべてのK_xに対して安定になる（図1参照）．このことは，さらに$(k_0\pm K_x,K_y)$の"3次元攪乱"に対しても同様で，"Phillipsの8の字"に沿った不安定領域は，k_0a_0が大きくなるにつれて減少しk_0a_0が0.5を越えると不安定領域が消滅することが示されている．Caponi等[7]は(1)式をさらに離散化したモデル（Zakharov方程式は

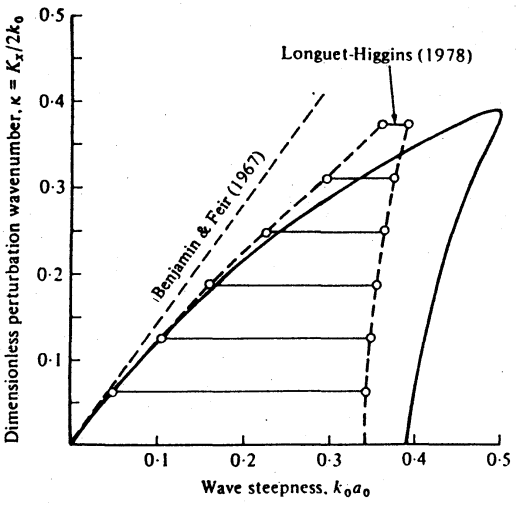

図1．2次元攪乱の成長安定境界（実線）とLonguet-Higgins[23]による厳密解（○印）．

Hamilton系であるのに対し，離散化されたこのモデルは位相空間において体積保存系であるがHamiltonianを持たない）で，波数$k_0=(k_0,0)$，振幅a_0の一様波列に対して$k_{\pm m}=(k_0 \pm m\Delta k,0)$ $(m=1,2,3;\Delta k=0.2k_0)$のような3組の側帯波撹乱（$\sim 10^{-6}a_0$）の長時間にわたる安定性を調べた（7モード近似）．十分小さな$k_0a_0(=0.05)$の場合，すべての$k_{\pm m}$は安定であり撹乱の時間発展は周期的である．しかし，$k_0a_0=0.1$では$k_{\pm 1}$が不安定領域にあるため，0次（搬送波）モードと1次以上のモード間でエネルギー交換を伴う再帰現象（Fermi-Pasta-Ulam）を示し，さらに$k_0a_0=0.2$では$k_{\pm 1},k_{\pm 2}$が不安定領域にあり，撹乱の時間発展はカオス的になる．しかし，$k_0a_0=0.45$では$k_{\pm 3}$が不安定領域にあるのに対し$k_{\pm 1},k_{\pm 2}$が安定領域にあるため，初期の時間発展は再帰的である．しかし，この安定領域にある$k_{\pm 1},k_{\pm 2}$が後には非線形性により大きく励起されるため，最終的にはカオス的な現象が引き起こされる．$k_0a_0=0.5$では，すべてのモードは安定領域にありその時間発展も安定であることが示されている．しかし，このような大きなk_0a_0に対してはもはやZakharov方程式は有効ではなく，５波共鳴相互作用に対応するようなさらに高次の近似で予想される不安定性（Type II 不安定）が現れる可能性がある．

上のCaponi等による結果から，搬送波とエネルギー分配に関与する二組以上の側帯波の非線形相互作用の結果としてカオス的な現象が現れることが予想される（このうち少なくとも一組の側帯波は線形不安定であることを要する．一方，エネルギー分配に関与する側帯波が唯一組しかない場合には，再帰現象が観察される）．さらにこのようなカオスは，エネルギー分配に関与する波数領域が狭いことから"confined chaos"と呼ばれ，YuenとFerguson[8]による，十分高次のモードさえすべて(線形)安定ならカオス（熱平衡）は起こらないであろうという予想が必ずしも成り立つとは限らないことを示している．

上で述べたモード間での非線形相互作用により現れるカオス現象は必ずしも実際の現象を正しく表していない場合があるので注意を要する．ShenとNicholson[9]はNLS方程式の平面波解が変調不安定(Benjamin-Feir)となるような波数域にある撹乱の時間発展を数値的に求めるとき，打ち切りFourierモード数を十分大きく取る必要があることを注意している．彼らは，3モード（搬送波と一組の不安定な側帯波から成る）近似の場合，最大Lyapunov指数が0に収束するのに対して，安定波数域にある高次モードを付け加えた解析では，0に収束せず，

解がカオティック（Stochastic）になることを示した（NLS方程式は可積分であることが証明されているのでその最大Lyapunov数は0になるはずである）．しかし，さらに安定な高次モードを付け加えて打ち切りモード数を大きく取ると，再び最大Lyapunov指数が0に収束するようになることが示されている．従って，カオス発生に関する正しい情報を得るためには，計算に必要な打ち切りモード数を変調不安定領域に含まれるモード数に比べて十分大きく（少なくともその10倍以上）選ぶ必要がある．

§３．長波-短波相互作用

近年，衛星からのリモートセンシングの発展により海洋波動のスペクトルをはじめ海面の像や風速等を比較的容易に知ることができるようになった．特に海面でBragg 散乱したレーダー波が主に数センチから数十センチの範囲にあることから，通常観測される長波（O(10-1000)m）以外に波長の短い短波（O(1-10) cm）が多く存在していると考えられる．そのため，海洋波動における長波-短波-風の間でのエネルギーの移行の様子を知る上で，この長波-短波相互作用の重要性が認識されつつある．また，このような相互作用において，初期の短波の発生は必ずしも風によるとは限らず，波長の長い大振幅重力波の鋭い波頂より短波が発生することも知られている．

３．１　線形理論[10)]

簡単のため流体運動を非圧縮渦無しとし，長波を有限一定深さdの流体中をx方向に伝播する重力波とし，その上を波長の短い重力波または表面張力波が（x,y）方向に伝播する場合を考える．長波の波数Kと角周波数Ωの間には分散関係$\Omega^2=gK\ \mathrm{Tanh}\ Kd$ があり，この時，長波の水面変位η_L及び速度ポテンシャルϕ_Lは，

$$\eta_L = A\,\mathrm{Cos}(Kx-\Omega t), \qquad \phi_L = \frac{A\Omega}{K}\frac{\mathrm{Cosh}\ K(z+d)}{\mathrm{Sin}\ Kd}\,\mathrm{Sin}(Kx-\Omega t), \tag{3.1}$$

で与えられる（zは鉛直方向の座標）．一方，短波に対しては，その波長は水深に比べて十分小さく，その水面変位η_Sと速度ポテンシャルϕ_Sは以下のように与えられる：

$$\eta_s = a\,\mathrm{Cos}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\sigma t), \quad \phi_s = \frac{a\sigma}{k}\exp(kz)\,\mathrm{Sin}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\sigma t), \tag{3.2}$$

ただし，(k,σ)は短波の波数ベクトル及び角周波数であり，$k=(k\mathrm{Cos}\chi,\ k\mathrm{Sin}\chi)$，$k=|k|$，$x=(x,y)$である．

長波により誘起される水面での粒子の速度Uは

$$U = \left(\frac{\partial \phi_L}{\partial x}\right)_{z=0} = A\Omega\ \mathrm{Coth}\ Kd\ \mathrm{Cos}(Kx-\Omega t), \tag{3.3}$$

であり，また長波表面上での鉛直方向の有効重力加速度g_{eff}は

$$g_{eff} = g + \left(\frac{\partial^2 \phi_L}{\partial t \partial z}\right)_{z=0} = g[1 - KA\ \mathrm{Tanh}\ Kd\ \mathrm{Cos}(Kx-\Omega t)], \tag{3.4}$$

となる（gは重力加速度）．粒子速度Uはy方向とは独立であり，長波の波速で進む系からみて短波が定常であると仮定すると，$C=\Omega/K$として次の関係を得る：

$$k\mathrm{Sin}\chi = \mathrm{const.},\quad \sigma - (U-C)k\mathrm{Cos}\chi = \mathrm{const.}, \tag{3.5}$$

さらに，$c=\sigma/k$，$X=x-Ct$とし，諸量がそれらの平均量（添字 m）からの小さな変動であるとして

$$k=k_m+dk,\ a=a_m+da,\ c=c_m+dc,\ \sigma=\sigma_m+d\sigma,\ \chi=\chi_m+d\chi,\ g_{eff}=g(1-dg), \tag{3.6}$$

とする（dk，da，dc，$d\sigma$，$d\chi$，dg，$|U|\ll 1$）．

以下では異なる２種類の短波を考える：

(I)短い重力波:

(3.3),(3.4),(3.5)式と短波の分散関係式$\sigma^2=kg_{eff}$に(3.6)を用いて$c_m \ll C$を考慮すると，kの変化は

$$\frac{dk}{k_m} = AK\ \mathrm{Coth}\ Kd\ \mathrm{Cos}\ KX\ \mathrm{Cos}^2\chi_m, \tag{3.7}$$

で与えらる．さらに，短波のwave action flux のx成分が一定であるとして，短波の振幅aの変化は

$$\frac{da}{a_m} = \frac{1}{4}[\mathrm{Tanh}\ Kd + (\mathrm{Cos}^2\chi_m + 2)\mathrm{Coth}\ Kd]\ KA\ \mathrm{Cos}\ KX, \tag{3.8}$$

で与えられる．特に，d が十分大きく，χ_m が十分小さい場合

$$\frac{ka}{k_m a_m} \sim 1 + 2\ KA\ \mathrm{Cos}\ KX, \tag{3.9}$$

のよく知られた結果が得られ，kaは長波のKAに比例し，かつ長波の波頂付近で増大し谷付近では減少することがわかる．

(II)短い表面張力波：

流体の密度をρ，表面張力係数をTとすると，短波の分散関係は$\sigma^2=Tk^3/\rho$で表される．この分散関係式と(3.5)式に(3.6)を用い，(I)の場合と同様（この場合，もはや$c_m \ll C$ではない）にx方向の wave action flux が一定であると仮定すると，短波の波数と振幅の変化に関して

$$\frac{dk}{k_m}=-\frac{\cos^2\chi_m \, KA\,\mathrm{Coth}\, Kd \cos Kx}{\left(\frac{3}{2}\frac{c_m}{C}\cos\chi_m - 1\right)}, \tag{3.10}$$

$$\frac{da}{a_m}=\frac{1}{4}\frac{KA\,[1+(1-3c_m\cos\chi_m)\sin^2\chi_m]\,\mathrm{Coth}\, Kd \cos KX}{\left(\frac{3}{2}\frac{c_m}{C}\cos\chi_m - 1\right)^2}, \tag{3.11}$$

が得られる．特に，dが十分大きく，χ_mが十分小さいとすれば

$$\frac{ka}{k_m a_m}\sim 1+\frac{5-6\frac{c_m}{C}}{4\left(\frac{3}{2}\frac{c_m}{C}-1\right)^2}KA\cos KX, \tag{3.12}$$

となる．

上で得られた結果で$(3c_m/2)\cos\chi_m \sim C$の場合を除けば，長波の波頂や谷における短波の変化に関しては(I)の場合と同様である．一方，$(3c_m/2)\cos\chi_m \sim C$の場合，表面張力波の群速度$c_g$は$3c_m/2$で与えられることから，短波の群速度のx方向成分（長波の伝播方向）が長波の位相速度に近似的に等しい$c_g\cos\chi_m \sim C$という”長波-短波相互作用”の速度に関する共鳴条件を示しており，その付近では(I)の場合とは別の強い共鳴相互作用が可能である．この相互作用は波数及び周波数のわずかに異なる二つの短波と長波の間での”三波共鳴相互作用”とみることもできるので，長い重力波と短い表面張力波間での相互作用のみならず，異なる密度層からなる多層流体やプラズマ中，格子中の波においても可能である．

３．２　弱非線形理論

3.2.1　長い/短い重力波

§3.1(I)で示した，長波の上に乗った短波の変化は，波の非線形性を考慮した場合どのように修正されるかが調べられている．Longuet-Higgins[11]やHenyey等[12]は，短波は線形のままであるが長波を有限振幅のStokes波としたとき，線形理論に比べて，短波のk,aやkaの変化は，長波のKAに対して長波の波頂では著しく大きくなるのに対して，長波の谷付近では小さくなることを示した．その後，ZhangとMelville[13]によりさらに短波の弱非線形性を考慮した解析が行われた．彼らは長波の波頂部分においては，長波のKAに対して短波のkの変化が多少増加するものの，aやkaでは反対に抑えられることを示し，長波の谷の部分では短波の非線形性はほとんど影響しないことを示した．

一方，NaciriとMei[14]は長波をGerstnerのトロコイド波（渦あり），短波を弱非線形波（渦無し）とした解析を行っている．彼らはLagrange的な定式化と多重尺度（Multiple-scale)法を用い，次のような短波に対する"NLS方程式"を導出した：

$$i\frac{\partial \tilde{a}}{\partial \phi}=\frac{\alpha}{4}\frac{\partial^2 \tilde{a}}{\partial \xi^2}+\alpha G\left(\phi;\frac{\Omega}{\sigma}\right)\tilde{a}|\tilde{a}|^2 , \qquad (3.13)$$

ここで，

$$\phi=\Omega t - Kw,\ \xi=\left(w-\frac{\sigma}{2k}t\right)k^2 a_0,\ \alpha=\frac{(ka_0)^2}{2\Omega/\sigma}$$

であり，(K,Ω)及び(k,σ)はそれぞれ長波及び短波の波数と角周波数，w は水平方向の物質座標，Gは非線形項の係数でΩ/σをパラメターとするφの関数である．短波の複素振幅ã(φ,ξ)は，KA=0（長波がない場合）での短波の振幅a_0とξによらない解（Stokesの解）$a_s(\phi)$を用いて規格化されている．このとき，ã=1（Stokes波）に対する波数νの微小撹乱による変調安定性は，図2（KA=0.3,ka_0=0.13）に示すようにαが増加するにつれて，小さな波数域での不安定(Benjamin-Feir)以外に，大きな波数域に複数の孤立した不安定領域が現れる．最近ZhangとMelville[15]は，長波をStokes波（渦無し）とした場合でもEuler的な定式化により導出された"NLS方程式"を用いて，同様な複数の変調不安定領域が存在することを示している．さらに彼らは，この複数の孤立不安定領域が5,6,

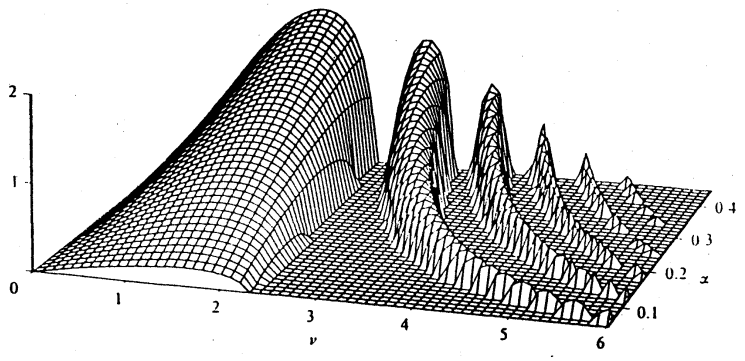

図２．
短波のαに対する
νの不安定領域．

7,･･･波相互作用の結果として得られ，従来よく知られている不安定（Type I，II）とは異なった新しいタイプの不安定であることを指摘している．

NaciriとMei[14]は，このような変調不安定な領域での短波の緩やかな変調が長時間（φの発展）にわたってどのように変化するかを，αの適当なパラメター値に対して数値的に調べた．特に，KA=0.3,ka_0=0.13,ν=1.604としたとき，αが0.05に対して再帰的（Fermi-Pasta-Ulam）であるのに対し，0.1で不規則な振る舞いがみられ，0.15を越えるとほぼカオティックになることを示している．彼らはさらに，短波を適当に選ばれた搬送波と一組の不安定な側帯波からなる３つのFourierモードで近似し（3モード近似），カオスの発生が孤立した不安定領域の存在によるよりもむしろ，長波によりパラメトリックに励起された非線形系の本質的な特徴であるとしている．しかし，先にも触れたように，カオス発生に関する正確な判定のためには，十分多くのFourierモードを考慮した計算により確認する必要があると思われる．

3.2.2　長い重力波と短い表面張力波

§3.1(II)で示されたように長波の位相速度と短波の群速度が近似的に等しくなる場合，上で述べたのとはまた異なったタイプの強い共鳴相互作用が起る．Kawahara等[16]は短い表面張力波の振幅と長い重力波の振幅が同程度の場合，相互作用がK-dV方程式とNLS方程式の結合した方程式系で表せることを示した．一方，DojordjevicとRedekopp[17]は，重力波の振幅が表面張力波のそれに比べて十分小さいとき，波動方程式とNLS方程式との結合で表されることを示した．上で述べた二種類の方程式系は一つにめまとめることができて，適当な規格化を行うことにより以下のように示される：

$$i\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=SL,\quad \frac{\partial L}{\partial t}+\alpha L\frac{\partial L}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 L}{\partial x^3}=\frac{\partial |S|^2}{\partial x}\ , \qquad (3.14)$$

ここで，S,Lはそれぞれ短波の複素振幅及び実の長波を示し，α,βはそれぞれ非線形及び分散に関係するパラメターである．

$\alpha=\beta=0$の場合(3.14)式は長波の振幅が短波のそれに比べて十分小さい場合（$L<<|S|$）に対応し，以下ではSH（Schrödinger-Hyperbolic）型と呼ぶ．一方，α,$\beta\sim O(1)$の場合，長波の振幅が短波のそれと同程度の場合（$L\sim|S|$）であり，SKdV（Schrödinger-K-dV）型と呼ぶ．このような二種類の方程式系において，これまでSH型に対しては解析的にN-ソリトン解が求められている[18]ことから系は可積分であり，従って長時間にわたる解の振る舞いはコヒーレントであると考えられる．一方，SKdV型に対しては孤立波を含む定常進行波解が得られているにすぎず，またα,βのあるパラメター領域では逆散乱法に対しては可積分でないことが示されている[19]ことから，長時間にわたる解の漸近挙動はカオティックになるこが予想される．また，これら２種類の方程式系の有効領域に関しては，SKdV型がSH型を含む広い領域において成り立つことが示されている[20]ので，SH型はSKdV型の特別な場合とみなすことができ，(3.14)式はSH型からSKdV型にいたる広い範囲にわたる解の発展を記述することができる．

(3.14)式の平面波解の変調安定性については，その最も簡単な平面波解：S=1,L=0に$\exp[i(Kx-\Omega t)]$に比例する微小正弦撹乱が加わった場合の線形安定性がYoshinaga等[21]により調べられている．図3はβの代表的な値に対する波数Kと増幅率Ω_I（複素角周波数Ωの虚数部分）の関係を示す．βの正負にかかわらず小さな波数域で不安定になるが，$0>\beta>-0.2$では，Kの高波数域にも孤立した不安定領域が現れる．§3.2.1でも示されたこのような孤立した不安定領域の出現は，短波の側帯波不安定に対する長波の影響によるものであることに変わりはないが，ここではβの負の限られた値に対してのみ起ることに注意する必要がある（重力波と表面張力波の相互作用の場合α,βはともに負の値を取る）．

さらに，Yoshinaga等[21]はこの平面波解に波数Kの長波長撹乱が加わった場合の長時間にわたる解の安定性をFourier級数法により調べた．その結果得られた典型的な３種類の結果を図4に示す．図(a),(b)はそれぞれ，SH型（$\alpha=\beta=0$）でKが線形安定領域及び線形不安定領域にある場合の|S|の時間発展である．

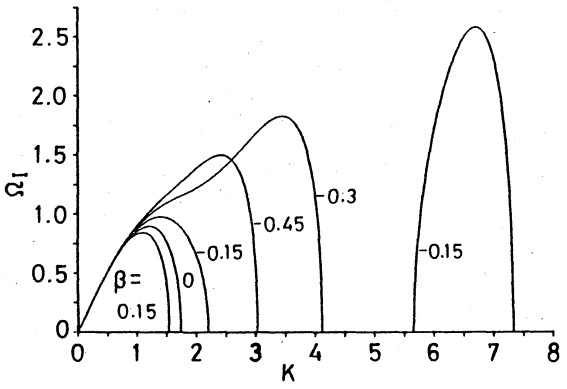

図３．分散パラメターβに対するKの不安定領域．

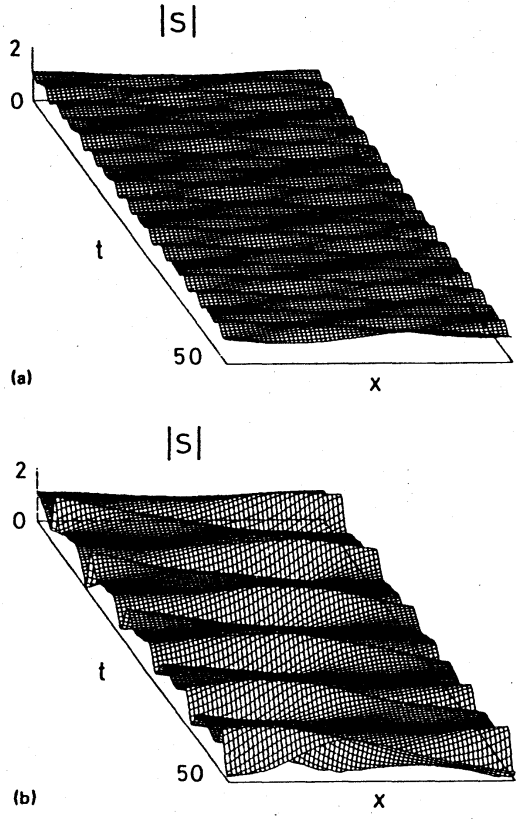

図４．|S|の時間発展．

図(a)からわかるように撹乱は周期的であり波は長時間にわたり安定に伝播するのに対して，図(b)では線形不安定性によりはじめ波は大きく励起されるが，一定時間の後再び初期の状態に戻る再帰現象（Fermi-Pasta-Ulam）が見られ，搬送波と側帯波の間での周期的なエネルギー交換が行われる．一方，図(c)はSKdV型（α=0,β=-0.09）の不安定領域（Kと9Kの撹乱が線形不安定）を初期値とした場合を示す．初期に再帰に近い現象が見られるが，すぐに波形は乱れカオティックになっていくことがわかる．このようなSKdV型のカオティックな振る舞いは，波数Kが安定領域にある場合でもみられる．例えば，α=0でβを正と選んだ場合，図(a)と同様安定であるのに対し，βが負の場合，線形安定であった側帯波モードが非線形性により励起され，長時間後の解の振る舞いはカオティックになる．

特に，αを0としてβを0から増加させたときに現れる再帰現象（準周期運動）からカオスへの移行は"KAMトーラスの崩壊"と見ることができ，その崩壊に要する"分散性撹乱"は$\beta \sim 10^{-3}$と評価できる．同様なことがGinzburg-Landau方程式の場合も，散逸が増加するにつれて準周期運動からカオスへと移行することが，Keefe[22]により示されている．この場合も"KAMトーラスの崩壊"と見ることができ，そのときの"散逸性撹乱"は10^{-6}程度であることが示されていることから，"分散性撹乱"の場合に比べてかなり小さいことがわかる．

§4．おわりに

長波短波相互作用の取扱いとしては大きく二つに分けることができる．一つは，大振幅の長い重力波とその上に乗った有限振幅の短い重力波または表面張力波との間での相互作用である．この相互作用は比較的弱いが，特定の共鳴条件を満たす必要がないので，いつでも起こり得る．ただ，現在のところ風や流体粘性の影響が無視されているので，海面における波動の不規則な挙動や風波間でのエネルギー移行の様子を，予想されるカオス現象により，説明するにはまだ十分ではない．もう一つの取扱いは，二つの波の間で速度に関する共鳴条件が満たされた場合であり，振幅の大きな短波とそれと同程度またはそれよりも小さい長波との間で強い相互作用が起る．この相互作用による長波・短波間でのエネルギーの移行の様子は多層流体などの実験で調べられているが，長時間にわたるカオス的な現象がみられるような実験は今のところ行われていないようである．いずれにしても，今後これらの相互作用において予想されるカオス現象に関する実験的な研究が行われることを期待する．

最後に，本稿に目を通して頂き，有益な助言を頂いた大阪大学基礎工学部角谷典彦教授に厚くお礼いたします．

参考文献

1)例えば，F.C.Moon: *Chaotic Vibration*(Wily-Interscience,1987)p.111;
種子田定俊，船越満明：ながれ6(1987)285;梅木誠：ながれ11(1992)185;及び引用されている文献参照．

2)例えば,船越満明:日本物理学会誌44(1989)323;RIMS Kokyuroku 782(1992)1;
及び引用されている文献を参照.

3)例えば,川原琢治:*ソリトンとカオス*,大槻義彦編(物理学最前線22;共立出版,
1988);ながれ11(1992)172;RIMS Kokyuroku 782(1992)162.

4)V.E.Zakharov:J.Appl.Mech.Tech.Phys.2(1968)190.

5)M.Stiassnie:Wave Motion 6(1984)431.

6)D.R.Crawford,B.M.Lake,P.G.Saffman and H.C.Yuen:J.Fluid Mech.105(1981)
177.

7)E.A.Caponi,P.G.Saffman and H.C.Yuen:Phys.Fluids 25(1982)2159.

8)H.C.Yuen and W.E.Ferguson,Jr.:Phys.Fluids 21(1978)1275.

9)M-M.Shen and D.R.Nicholson:Phys.Fluids 30(1987)3150.

10)例えば, M.S.Longuet-Higgins and M.S.Stewart:J.Fluid Mech.8(1960)565,
G.D.Crapper:*Introduction to Water Waves* (Ellis Horwood,1984)p.142.

11)M.S.Longuet-Higgins:J.Fluid Mech.177(1987)293.

12)F.S.Henyey,D.B.Creamer,K.B.Dysthe,R.L.Schult and J.A.Wright:J.Fluid
Mech.189(1988)443.

13)J.Zhang and W.K.Melville:J.Fluid Mech.214(1990)321.

14)M.Naciri and C.C.Mei:J.Fluid Mech.235(1992)415.

15)J.Zhang and W.K.Melville:J.Fluid Mech.243(1992)51.

16)T.Kawahara,N.Sugimoto and T.Kakutani:J.Phys.Soc.Jpn.39(1975)1379.

17)V.D.D.Djordjevic and L.G.Redekopp:J.Fluid Mech.79(1977)703.

18)N.Yajima and M.Oikawa:Prog.Theor.Phys.56(1976)1719.

19)E.S.Benilov and S.P.Burtsev:Phys.Lett.A98(1983)256.

20)T.Yoshinaga,T.Yamamoto and T.Kakutani:*Nonlinear Wave Motion*,
ed.A.Jeffrey(Longman/Wiley,New York,1989)229.

21)T.Yoshinaga,M.Wakamiya and T.Kakutani:Phys.Fluids A3(1991)83;
吉永隆夫:日本物理学会誌47(1992)300.

22)L.R.Keefe:Phys.Fluids 29(1986)3135.

23)M.S.Longuet-Higgins:Proc.R.Soc.Lond.A360(1978)489.