数理解析研究所講究録
831巻 1993年 112-114

Some Remarks on a Paper of Sinai-Vul in 1980

龍谷大理工 山口昌哉 (Masaya Yamaguti)
京大理 吉原英昭 (Hideaki Yoshihara)
京大理 西田孝明 (Takaaki Nishida)

常微分方程式系

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

の数値解がほぼ closed orbit であり，その上いくつかの条件がみたされれば，それに近い(1)の closed orbit の存在が示せる。

[1]の著者は，このための方法を与え，それを Lorenz model

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(-x+y) \\ \dfrac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \dfrac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases}$$

$$r = 28, \quad \sigma = 6, \quad b = \frac{8}{3},$$

を変換して得られる

$$(2) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 (x+y) z \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 y - b_1 (x+y) z \\ \dfrac{dz}{dt} = -a_3 z + (x+y)(b_2 x + b_3 y) \end{cases}$$

に適用して,

$$(x, y, z) = (3.5007\cdots, 3.3303\cdots, 27)$$

の近くを通る closed orbit の存在を論じている。

しかし,[1]で展開された方法をそのまま(2)に適用するのは,無理なようである。(数値が大きすぎて,判定条件がみたされない。)そこで,[1]の方法をいくつかの点で変更する。

第一に,(1)に対応する差分式を,

$$R(x) = x + \Delta f(x) + \frac{\Delta^2}{2} f_x(x) f(x)$$

から,

$$R(x) = x + \Delta f(x) + \frac{\Delta^2}{2} f_x(x) f(x) + \frac{\Delta^3}{6} \left\{ f_{xx}(x) f(x) f(x) + f_x(x) f_x(x) f(x) \right\}$$

に変更する。

次に,x^0を初期値とする(1)の解を$x(t)$とし,(1)を$x(t)$で線型化した方程式の基本解$L(t,s)$のみたす方程式,すなわち,

$$\frac{d}{dt} L(t,s) = f_x(x(t)) L(t,s), \qquad L(s,s) = I \text{ (単位行列)}$$

に対応する差分式を

$$\bar{L}_{i+1,j} = \left\{ I + \Delta f_x(x^i) \right\} \bar{L}_{i,j}, \quad (i \geqq j)$$

から

$$\bar{L}_{i+1,j} = \left\{ I + \Delta f_x(x^i) + \frac{\Delta^2}{2} \left(f_{xx}(x^i) f(x^i) + f_x(x^i) f_x(x^i) \right) \right\} \bar{L}_{i,j}$$

へかえる。ここで,$x^{k+1} = R(x^k)$.

最後に,点$x^0 \in \Gamma$,(Γは超平面$x_n = a$)の近傍で定義された Poincaré mapping の二次以上の項$Q_2(y)$の Lipschitz constant の評

価式を改良する。

その他，いくつかの細かい変更も必要であるが，主要な変更は以上の三点である。これらの変更により，[1]の方法が，(2)に対して適用できると思われる。

[1] Ja. G. Sinai, E. B. Vul
Discovery of Closed Orbits of Dynamical Systems with the Use of Computers, Journal of Statistical Physics. Vol. 23, No 1, 1980, 27-47,