Title	特異および特異に近い差分方程式のSOR法(精度保証付き数値計算法とその応用)
Author(s)	石原, 和夫; 山本, 慎
Citation	数理解析研究所講究録 (1993), 831: 46-47
Issue Date	1993-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/83375
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 831 巻 1993 年 46-47

特異および特異に近い差分方程式のSOR法

大阪女子大学　石原 和夫　(Kazuo Ishihara)
大阪女子大学　山本 慎　(Makoto Yamamoto)

1. SOR 法. $A = D - L - U = (a_{ij})$, $1 \le i, j \le n$ とし, $D, -L, -U$ は A の対角, 狭義の下三角, 狭義の上三角成分, $a_{ii} \neq 0$, $1 \le i \le n$, $J = D^{-1}(L+U)$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$を Jの固有値, ωを加速係数, $H_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$, $\rho(J) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$, $\gamma(J) = \max_{1 \le i \le n}\{|\lambda_i|; \lambda_i \neq 1\}$, $\delta(J) = \max_{1 \le i \le n}\{|\lambda_i|; |\lambda_i| \neq 1\}$, とする.

補題 1 [1, 3]. (i) A が convergent ($\lim_{k \to \infty} A^k = O$) $\Leftrightarrow$ $\rho(A) < 1$.
(ii) $\rho(A) = 1$ とする. A が semiconvergent ($\lim_{k \to \infty} A^k$ が存在) $\Leftrightarrow$ $\gamma(A) < 1$ かつ A の固有値 1 に関するすべての elementary divisor が linear .

仮定 1 . A が consistently ordered かつ 2-cyclic である.

仮定 2 . $\det A = 0$ かつ Jの固有値 1 に関するすべての elementary divisor が linear である.

補題 2 [3]. A は仮定 1 を満たす正則行列, Jの固有値はすべて実数で $\rho(J) < 1$ とする. $\Rightarrow$ SOR 法は convergent ($\rho(H_\omega) < 1$, $0 < \omega < 2$), $\omega_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(J)^2}}$ は $\rho(H_{\omega_{\mathrm{opt}}}) = \min_{0<\omega<2} \rho(H_\omega)$ となる.

補題 3 [2]. A は仮定 1 と 2 を満たす特異行列, Jの固有値はすべて実数で$\rho(J) = 1$ とする. $\Rightarrow$ SOR 法は semiconvergent ($\gamma(H_\omega) < 1$, $0 < \omega < 2$) , $\omega_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\delta(J)^2}}$ は $\gamma(H_{\omega_{\mathrm{opt}}}) = \min_{0<\omega<2} \gamma(H_\omega)$ となる.

2. 差分方程式. 次のような Neumann 型の 2 点境界値問題を考える.

$$(1)\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x), & a < x < b \\ y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta. \end{cases}$$

ここで $p(x), q(x), r(x)$ は連続で, $q(x) \geq 0$ とする. $[a, b]$ を $(n-1)$ 等分し, $h = \frac{b-a}{n-1}$, $x_i = a + (i-1)h$, $1 \leq i \leq n$. (1) を中心差分により近似し, $y(x_i)$ の近似解を v_i とすれば (1) の差分方程式は $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$ となる.

定理 1. $p(x) \equiv 0$, $q(x) \equiv 0$, $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}A$ とする. $\Rightarrow$ SOR 法は semiconvergent $(0 < \omega < 2)$ で, $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$ の解に収束し, $\delta(J) = \cos\frac{\pi}{n-1}$, $\omega_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{1+\sin\frac{\pi}{n-1}}$.

定理 2 . $q(x) > 0$, $h \cdot \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| < 2$ とする. $\Rightarrow$ SOR 法は convergent $(\rho(H_\omega) < 1,\ 0 < \omega < 2)$ で $\omega_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(J)^2}}$ は $\rho(H_{\omega_{\mathrm{opt}}}) = \min_{0<\omega<2} \rho(H_\omega)$ となる. さらに, $h = \frac{b-a}{n-1}$ が十分小ならば, $\rho(J) \approx \cos\frac{\pi}{n-1}$, $\omega_{\mathrm{opt}} \approx \frac{2}{1+\sin\frac{\pi}{n-1}}$.

注意. 定理 2 において, 誤差評価は $|y(x_i) - v_i| = O(h)$ である. $h \cdot \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| < 2$ を満足しない時, SOR 法は種々の挙動をする. 数値例は講演時に示す. Dirichlet 型 2 点境界値問題の SOR 法については [4] 参照.

参考文献

[1] Bermann, A. and Plemmons, R. J., Nonnegative matrices in the mathematical sciences, Academic Press, 1979.

[2] Hadjidimos, A., On the optimization of the classical iterative schemes for the solution of complex singular linear systems, SIAM J. Alg. Disc. Math., 6 (1985), 555 - 566.

[3] Varga, R. S., Matrix iterative analysis, Prentice–Hall, 1962.

[4] Ishihara, K. and Yamamoto, M., SOR methods for finite difference equations with a nonsymmetric matrix arising from two-point boundary value problems, Math. Japon., 38 (1993), to appear.