

連立代数方程式の解の重複度

日大・小林 英恒 東京職業訓練短大・鈴木 秀男

(Kobayashi, Hidetsune)

(Suzuki, Hideo)

連立代数方程式の解の重複度を数値計算によって求める方法を示す。解の重複度を連立代数方程式から自然に決まる、代数的対応の重複度に翻訳し、これをゾイタンの法則に当てはめて計算する。

この報告の1節では、自然な代数的対応関係を定義し、Zeuthenの法則を用いて解の重複度を求める方法について述べる。2節では、数値計算の方法について簡単に述べ、3節で計算例を紹介する。

1. Zeuthenの法則と解の重複度

まず、簡単に代数的対応について紹介する。 $f(x, y)$ を x について n 次、 y について m 次の多項式とする。 a を一つの複素数とすると、

$$f(a, y) = 0 \quad \textcircled{1}$$

の解が $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ であるとする、 a に $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ を対応させる対応関係を代数的対応という。 a に m 個の数が対応し、逆に b に n 個の数が対応することからこの代数的対応は (n, m) 対応であるという。 a に対応する数のうちに a 自身が含まれれば

$$f(a, a) = 0 \quad \textcircled{2}$$

となる。従って、このような数は、 $n + m$ 個存在する。空間の点の代数的対応に関しては [1] を参照されたい。

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_i \in C[x_1, x_2, \dots, x_n] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

を与えられた連立代数方程式とする。

$$F_i(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = x_0^{\deg f_i} f_i(x_1/x_0, x_2/x_0, \dots, x_n/x_0), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

とにおいて斉次化することによって、以下の議論はすべて n 次元射影空間ですすめる、このようにおくととき *Bezout* の定理により解の個数は、方程式を与える多項式の次数の積となり、理論を進めるのが簡単となる。また、元の方程式の解は無限遠解ではなく、重複度は元のそれと変わらない。

以下記号 $[r]$ は r 次元 *linear space* を表す。つまり、 $[r]$ は独立な $n - r$ 個の超平面の交わりのことである。まず、重複度を調べるための道具となる代数的対応を作ることから始める。超曲面 $f_1 = 0$ を F とおき、曲線 $f_2 = f_3 = \dots = f_n = 0$ を C とおく。 F にも C にもものらない一般の点 O を取る。 C 上の点 P が与えられたとき、 OP と F との交点の一つを Q 、直線 OP を l とおき、

$$(P, Q; l)$$

の全体を Σ_1 とおくと、 Σ_1 は代数的対応関係 $P \rightarrow Q$ を定める。この対応関係の指標 $(\alpha, \beta; r)$ は、次のように定義される。

α : $[n - 1]$ を与えたとき、 $P \in [n - 1]$ なる

$$(P, Q; l) \in \Sigma_1 \text{ の個数}$$

β : $[n - 1]$ を与えたとき、 $Q \in [n - 1]$ なる

$$(P, Q; l) \in \Sigma_1 \text{ の個数}$$

r : $[n - 2]$ を与えたとき、 $l \cap [n - 2] \neq \phi$ なる

$$(P, Q; l) \in \Sigma_1 \text{ の個数}$$

$\deg f_i = d_i$ とおくととき、次の命題が成立する。

命題 $\alpha = \beta = r = d_1 d_2 \cdots d_n$ である。

証明 C の $order$ は $d_2 d_3 \cdots d_n$ であるから、 $[n-1]$ との交点は $d_2 d_3 \cdots d_n$ である。この交点のうちの一つを P とおくと、 OP と F との交点は F の $order$ が d_1 であることから、 d_1 個である。よって、 $(P, Q; l) \in \Sigma_1$ は $d_1 d_2 \cdots d_n$ 個だから、 $\alpha = d_1 d_2 \cdots d_n$

$[n-1]$ と F との交わりは $order$ d_1 の代数多様体で、これを底とし P を頂点とする錐と C との交点は $d_1 d_2 \cdots d_n$ である。よって、 $Q \in [n-1]$ なる $(P, Q; l) \in \Sigma_1$ の個数は $d_1 d_2 \cdots d_n$ であるから、 $\beta = d_1 d_2 \cdots d_n$

$[n-2]$ を勝手に与えたとき、 $l \cap [n-2] \neq \emptyset$ とする。 $O \in l$ で、 $O \in [n-2]$ としてよいから、結局 l は超平面 $O \vee [n-2]$ に含まれることになる。 $O \vee [n-2] \ni P$ なる $(P, Q; l) \in \Sigma_1$ の個数は $d_1 d_2 \cdots d_n$ だから、 $r = d_1 d_2 \cdots d_n$ \square

定理 Σ_1 の指標が $(\alpha, \beta; r)$ のとき、 $P = Q$ となる $(P, Q; l) \in \Sigma_1$ の個数は、 $\alpha + \beta - r$ である。

証明 一般の位置に $[n-2]$ をとり、これを H' とおく。 H' を通る $[n-1]$ に対し、 $(P, Q; l)$ を $P \in [n-1]$ ととり、これに $Q \vee H'$ を対応させると H' を通る超平面の束の代数的対応が出来る。 H' を通る超平面の束は、一つのパラメタで表示できるから、この代数的対応は、複素数の対応と置いて良い。

一つの $[n-1]$ を与えると、 $P \in [n-1]$ なる $(P, Q; l) \in \Sigma_1$ の個数は α で、この α 個の Q をとおる $[n-1] = Q \vee H'$ が最初の $[n-1]$ に対応する。このことをもう一度繰り返して考えると、この数の対応は、 (β, α) 対応となる。従って一致する

超平面の個数は $\alpha + \beta$ 個である。

他方、 H' をとおる $[n-1]$ に同じ $[n-1]$ が対応するのは、 $(P, Q; l)$ に於いて $P=Q$ のときか $l \cap H' \neq \emptyset$ のときである。よって、 $P=Q$ となるのは、

$$\alpha + \beta - r \text{ 個}$$

である。□

$P=Q$ となる $(P, Q; l)$ の個数は、連立代数方程式の解の数に等しい。従って、上の定理を与えられた連立代数方程式によって定義される代数的対応に適用することにより次の系を得る。

系 上の対応関係で重複度をいれて考えれば、解の個数はちょうど $d_1 d_2 \cdots d_n$ となる。

上の定理の証明を見れば、超平面の束の対応関係の重複度を、連立代数方程式の解の重複度と定義すれば良いことが分かる。すなわち、 u を連立代数方程式の一つの根とするとき、 $[n-2] \vee u$ 上には、他の連立代数方程式の解が無く、かつ $P \rightarrow u$ のときの極限の $(P, Q; l)$ の l が乗っていないように $[n-2]$ を適当に選び、代数的対応関係 Σ から決まる超平面の束の対応関係の点 u に関する部分の重複度を調べれば、超平面の束の対応関係の重複度と根 u の重複度が一致する。ここで、 $[n-2]$ を一般の位置に選びさえすれば、連続性により、選び方によって重複度が変わることはない。

次に、数の代数的対応関係の重複度を調べるための *Zeuthen* の法則を示す。

定理 (Zeuthen's Rule)

ある代数的対応が与えられたとする。x に対応する $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ のうち、 $\{y_1, y_2, \dots, y_s\}$ が、 $x \rightarrow a$ なら $y_1, y_2, \dots, y_s \rightarrow a$ となるとき、点 a の重複度は、 $y_1 - x, y_2 - x, \dots, y_s - x$ の無限小の程度を、無限小 $x - a$ を基準に測った値の和に等しい。 ([1], P. 70)

この法則を適用するためには、連立代数方程式の解 u をとおる一般の位置にある直線を一本引きこれを固定する。点 u をこの直線の原点とすることにする。原点から距離 h の直線上の点 G と一般に取られた $[n-2]$ とで、生成される超平面と曲線 C との交点のうち u に近いものを全て求める。どの範囲のものを全て求めるかは、次の節で述べるとして、いまこれらの点を P_1, P_2, \dots, P_r とおく。各 P_i O と F との交点を Q_{ij} とし、 $Q_{ij} \vee [n-2]$ が固定された直線と交わる点と点 G の間の距離を q_{ij} とするとき、 $h^{\alpha_{ij}} = c |q_{ij}|$ となる α_{ij} を求めて、それらをすべて加えれば重複度が得られる。ここに、c は h, q_{ij} に関係しない定数であり、2 つの h を考えることにより除去できる。

2. 重複度の計算アルゴリズム

この節では、連立代数方程式の解を求め、その重複度を求めるために用いた方法を紹介する。今回は、4 変数以下の連立代数方程式について、その重複度を求めたので、ここでは 4 変数の場合を例にとり説明する。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &: f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ C_2 &: f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ C_3 &: f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ C_4 &: f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

1) 超曲面 C_1, C_2, C_3, C_4 の交点 $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ を求める。すなわち、与えられた連立代数方程式の根を求める。

【手法】

< 数式処理による式の導出 >

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{pmatrix} \quad (6)$$

とおき、次の形のホモトピーを作る。

$$\begin{aligned} H_i &= (1 - \lambda)(x_i - b_i) + \lambda f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &+ \lambda(1 - \lambda) \sum_{j=1}^4 a_{j,i} x_j \end{aligned} \quad (7)$$

として

$$H(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) = \begin{pmatrix} H_1(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) \\ H_2(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) \\ H_3(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) \\ H_4(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) \end{pmatrix} \quad (8)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} d_i &= \deg f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad i=1, 2, 3, 4 \\ (b_1, b_2, b_3, b_4) &\in C^4, \\ (a_{1,k}, a_{2,k}, a_{3,k}, a_{4,k}) &\in C^4 \quad k=1, 2, 3, 4 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

もとの連立代数方程式⑤式を満たす根は、⑧式で表現されるパスを追跡することにより得られる。このパスの追跡は、 $\lambda = 0$ の

点を初期値とし、 $\lambda = 1$ まで行う。ここではパスを追跡するために、次に示すような微分方程式を作る。

$v = (x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) \in C^4 \times [0, 1]$ とするとき

$$\left(\frac{d v}{d s} \right) = k \begin{pmatrix} \frac{d w}{d s} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

ここで、 s はパスに沿った弧長であり、 k は $|d v / d s| = 1$ となるように選ぶ。

また⑩式の右辺は次の連立1次方程式より得られる。

$$J_w(d w / d s) + J_t = 0 \quad (11)$$

ここで、 J_w, J_t は、次式により与えられる。

$$D H = [J_w, J_t] : H \text{ のヤコビアン} \quad (12)$$

このようにして、もとの代数方程式の交点を求める問題は、微分方程式を解く問題に帰着される。この微分方程式は、関数副プログラムとして数式処理で作成する。

<数値計算による数値積分>

以上の⑤～⑫までの式をあらかじめ数式処理で作成しておく。

ここでは、実際にパスを追跡するための方法を示す。

- (1). パス追跡のための初期値、すなわち $\lambda = 0$ での⑧式の根を求める。⑧式で $\lambda = 0$ とおくと各成分は1変数の代数方程式に帰着される。したがって、この解法にはニュートン法を使用する
- (2). パスを追跡し $\lambda = 1$ での近似解を求める。

⑫式より $D H$ を計算し、この要素を分割して連立1次方程式を解く。このようにして得られた値を用いて、⑩式の微分方程式を解く。これには、高次の予測子-修正子法を使用する。

- (3). 近似解を修正し、厳密解を求める。

$\lambda = 1$ での近似解が得られているので、多変数のニュートン法を用いることにより、より精度の高い解を得る。

このようにして得られた解の一つを u とおく。

- 2) $[4-2]$ と直交し、 u を通る直線 l_0 を決める。
- 3) $[4-2]$ を与えるため空間内の3点 $XYZ_1 = (X_{11}, X_{21}, X_{31}, X_{41})$ と $XYZ_2 = (X_{12}, X_{22}, X_{32}, X_{42})$ と $XYZ_3 = (X_{13}, X_{23}, X_{33}, X_{43})$ とを与える。実際問題この与えた $[4-2]$ が一般の位置にあるかどうかは、試さなくても良いほどであるが、念のため $[4-2] \cup u$ 上に他の解が乗っていないことをためす。解が乗っていれば、最初に与えられた3点を適当にずらして解が乗っているかどうか再度確認する。
- 4) 交点 $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ を少しずらした点 (ずらす幅を $h = (h_1, h_2, h_3, h_4)$ で与える) と3) の $[4-2]$ とで生成される $[3]$ を決定する。この場合 $[3]$ とは、 XYZ_1, XYZ_2, XYZ_3 および $u + h$ とで生成される超平面であり、 $g(X_1, X_2, X_3, X_4) = g_1 X_1 + g_2 X_2 + g_3 X_3 + g_4 X_4 + g_5 = 0$ となる。すなわち、 $g(X_1, X_2, X_3, X_4)$ の係数 g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 を求める。
- 5) 4) で決定された $[3]$ と曲線 $f_2 = f_3 = f_4 = 0$ との交点 $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, p_{i4}), i = 1, \dots, n_p$ を求める。ただし、 $u + h \rightarrow u$ のとき各 $p_i \rightarrow u$ となる点のみ考える。

【手法】

I. $f_2(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0, f_3(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0, f_4(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0, g(X_1, X_2, X_3, X_4) = g_1 X_1 + g_2 X_2 + g_3 X_3 + g_4 X_4 + g_5 = 0$ より X_1 を消去する。

< 数式処理による式の変形 >

超平面の方程式 $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4 + g_5 = 0$ を次のように変形する。

$$x_1 = -(g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4 + g_5) / g_1 \quad (13)$$

これを $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, $f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, $f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ へ代入し x_1 を消去する。

$$\begin{aligned} & f_2(-(g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4 + g_5) / g_1, x_2, x_3, x_4) \\ & = f_{2n}(x_2, x_3, x_4) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & f_3(-(g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4 + g_5) / g_1, x_2, x_3, x_4) \\ & = f_{3n}(x_2, x_3, x_4) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & f_4(-(g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4 + g_5) / g_1, x_2, x_3, x_4) \\ & = f_{4n}(x_2, x_3, x_4) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

したがって、 $f_{2n}(x_2, x_3, x_4) = 0$, $f_{3n}(x_2, x_3, x_4) = 0$, $f_{4n}(x_2, x_3, x_4) = 0$ を解くことを考える。

II. $f_{2n}(x_2, x_3, x_4) = 0$, $f_{3n}(x_2, x_3, x_4) = 0$, $f_{4n}(x_2, x_3, x_4) = 0$ をホモトピー接続法により与えられた範囲内に存在する全ての交点を求める。

このとき $u + h \rightarrow u$ のときの $p \rightarrow u$ の見きわめ方として、次の2つの性質を利用することができる。

性質1：近接する2つの $h_1 > h_2$ をとり対応する点の u から
の距離が u へ近づくものを採用すればよい。

∵ u に十分近い場所で考えていることより明らか。

性質2：ある一定値を定めそれより遠くにある点は除く。具体的には、

$$h = (h_1, h_2, h_3, h_4), u = (u_1, u_2, u_3, u_4),$$

$$\deg(f_i) = d_i, i = 2, 3, 4 \text{ に対して}$$

$$|x_1 - u_1| < c |h_1 - u_1| \quad (17)$$

$$|x_2 - u_2| < c |h_1 - u_1| \frac{1/d_2 d_3 d_4}{|h_1 - u_1|} \quad (18)$$

$$|x_3 - u_3| < c |h_1 - u_1| \frac{1/d_2 d_3 d_4}{|h_1 - u_1|} \quad (19)$$

$$|x_4 - u_4| < c |h_1 - u_1| \frac{1/d_2 d_3 d_4}{|h_1 - u_1|} \quad (20)$$

$\therefore u$ のまらりて $p u i s e u x$ 展開を行うことにより得られる。

6) 点 o を曲線上にも、曲面上にもないように取り、直線 $o p_i$ と曲面 $f_1 = 0$ との交点 Q_{ij} , $j = 1, \dots, n_a$ を求める。ただし、 $u + h \rightarrow u$ のとき各 $Q_{ij} \rightarrow u$ となる点のみ考える。

【手法】

< 数式処理による式の変形 >

点 $o = (o_1, o_2, o_3, o_4)$ と点 $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, p_{i4})$

を通る直線は、

$$\frac{x_1 - o_1}{p_{i1} - o_1} = \frac{x_2 - o_2}{p_{i2} - o_2} = \frac{x_3 - o_3}{p_{i3} - o_3} = \frac{x_4 - o_4}{p_{i4} - o_4} \quad (21)$$

で表されるから x_1, x_2, x_3 を x_4 で表現すると次のようになる。

$$x_1 = \frac{x_4 - o_4}{p_{i4} - o_4} (p_{i1} - o_1) + o_1 \quad (22)$$

$$x_2 = \frac{x_4 - o_4}{p_{i4} - o_4} (p_{i2} - o_2) + o_2 \quad (23)$$

$$x_3 = \frac{x_4 - o_4}{p_{i4} - o_4} (p_{i3} - o_3) + o_3 \quad (24)$$

これを、 $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ へ代入することにより x_4 についての 1 変数代数方程式を導くことができる。

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_1'(x_4) = 0 \quad (25)$$

$f_1'(x_4) = 0$ の x_4 に対する各係数を、サブルーチン副プロ

グラムとして数式処理で作成する。

<数値計算による Q_{ij} の計算>

ニュートン法により、与えられた係数を持つような代数方程式を解き x_{4k} , $k = 1, \dots, n'$ を求める。この x_{4k} を ㉒式、㉓式、㉔式へ代入することにより x_1, x_2, x_3 の値を得る。

これで、 Q_{ij} が求まったことになる。

このとき $u + h \rightarrow u$ のときの $Q_{ij} \rightarrow u$ の見きわめ方として、次の性質を利用することができる。

性質 3 : 近接する 2 つの $h_1 > h_2$ をとり対応する点の u から
の距離が u へ近づくかどうか調べる。

7) ($[4 - 2] \vee Q_{ij}$) \cap l_0 と h との距離を q_{ij} とおいたとき

$$h^{\alpha_{ij}} = c |q_{ij}| \quad \text{㉖}$$

を満たす α_{ij} を求める。

次に h を変えて同様に α を求め、前の値と比較して、定数 c を除去する。除去した後の指数の総和が求める重複度となる。

ここで、未知定数 c を除去するための方法として、次の性質を利用することができる。

性質 4 : c の影響を除くため h_1, h_2 の 2 つの値に対し p, q を求め次式により α を修正することができる。ここで、 $\sim^{(1)}, \sim^{(2)}$ はそれぞれ h_1, h_2 に対応した値であることを意味する。

$$\alpha_{ij} = \frac{\log q_{ij}^{(1)} - \log q_{ij}^{(2)}}{\log |h_1| - \log |h_2|} \quad \text{㉗}$$

\therefore 2 つの h に対しそれぞれ成り立つ ㉖式において、対数を取りその差を考えることにより得られる。

さらに誤差については、次の性質が成り立つ。

性質 4 : u は一般には単根とは限らないから h は誤差を含む。

この誤差を Δh とおくと、 $\alpha = \log q / \log (h + \Delta h)$ となる。 $\log (h + \Delta h) = \log h + \Delta h / h + \dots$ であるから $p \rightarrow u$ なら $Q \rightarrow u$ となる点 p, Q では、 $\log q, \log h$ は共にある程度大きな数になる。しかし、一般に $\Delta h \ll h$ であるから $\Delta h / h$ は小さな数になる。従って、指数 α_{ij} には、さほど影響を与えない。

また、 $h \rightarrow u$ でも $p \rightarrow u$ とならない点での指数 α_{ij} は、殆ど全ての場合非常に小さな数となる。なぜならこのとき q は $u p$ と同程度かそれ以上となるため $\log q / \log h$ は非常に小さな数となる。従って、このような不要な点を一緒に計算しても、結果には殆ど影響してこない。

3. 計算の例

4 変数の連立代数方程式の解の重複度を前節の方法により求めたので、以下に例題を示す。

例題 1. 4 変数 2 次の連立代数方程式の重複度

$$f_1 = -u^2 + ux - uy + uz + 2x^2 - xy - xz - 2y^2 + 2yz + z^2$$

$$f_2 = -2u^2 - 2ux + uy - 2uz - 2x^2 - xy + xz + y^2 - yz + z^2$$

$$f_3 = 2u^2 + 2ux - uy + uz + 2x^2 + 2xy - 2xz - y^2 + yz - 2z^2$$

$$f_4 = u^2 - ux + 2uy + uz + x^2 + xy - xz + 2y^2 + 2yz - 2z^2$$

の根 $(0, 0, 0)$ の重複度を求める。各 h に対する p 点と q 点の関係は表 1, 2 のようになる。これより合計を求めれば重複度が得られる。さらに、 h を数種類変えたときの重複度を表 3 に示した。

これよりわかるように、この問題の重複度は16になっている。なお計算は富士通V P X - 1 2 0を使用し（以下の問題に対しても同様）、計算時間は各hに対して約1.5秒であった。

表1. $h = 0.01$ に対する重複度

	q ₁	q ₂	s u m
p ₁	1.008407	0.8836393	1.892047
p ₂	0.4137549	0.8723248	1.286080
p ₃	1.210117	0.9226413	2.132759
p ₄	1.008407	0.8836393	1.892047
p ₅	1.210117	0.9226413	2.132759
p ₆	1.627733	0.8121411	2.439874
p ₇	1.172135	0.9250014	2.097137
p ₈	1.172135	0.9250014	2.097137
total			15.96984

表2. $h = 0.0095$ に対する重複度

	q ₁	q ₂	s u m
p ₁	1.008326	0.8852080	1.893534
p ₂	0.4218947	0.8736461	1.295541
p ₃	1.207869	0.9236194	2.131489
p ₄	1.008326	0.8852080	1.893534
p ₅	1.207869	0.9236194	2.131489
p ₆	1.620919	0.8145692	2.435488
p ₇	1.170298	0.9259045	2.096202
p ₈	1.170298	0.9259045	2.096202
total			15.97348

表3. hに対する重複度

h	0.01	0.0095	0.001	0.00095
重複度	15.96984	15.97348	16.01897	16.01904

例題 2. 4 変数 3 次の連立代数方程式の重複度

$$f_1 = -2u^3 + 2u^2x - u^2y + u^2z + 2u^2 + ux^2 + uxy + 2uxz - 2ux + uy^2 - 2uyz - 2uy + 2uz^2 \\ + uz + x^3 + 2x^2y + x^2z - 2x^2 - 2xy^2 - xyz + xy - xz^2 - 2xz + 2y^3 - y^2z - y^2 - 2yz^2 - yz \\ - z^3 - z^2$$

$$f_2 = 2u^3 + 2u^2x + u^2y + 2u^2z - 2u^2 + ux^2 + 2uxy - uxz - ux - uy^2 - 2uyz - uy - uz^2 - uz \\ - x^3 - x^2y - 2x^2z - 2x^2 + 2xy^2 - xyz + 2xy + 2xz^2 - xz - y^3 - 2y^2z + 2y^2 - yz^2 + 2yz \\ + 2z^3 + 2z^2$$

$$f_3 = -u^3 - 2u^2x + 2u^2y + u^2z - 2u^2 + ux^2 - uxy - uxz + ux + uy^2 + uyz + 2uy - uz^2 + 2uz^2 \\ + 2uz - x^3 - 2x^2y + 2x^2z - x^2 + xy^2 + 2xyz + xy + 2xz^2 - 2xz - 2y^3 - y^2z + y^2 - yz^2 \\ + 2yz + z^3 + z^2$$

$$f_4 = u^3 + u^2x - 2u^2y - 2u^2z + u^2 - 2ux^2 + uxy - 2uxz + 2ux + 2uy^2 + uyz - uy - uz^2 + 2uz \\ - x^3 - 2x^2y + x^2z - x^2 - 2xy^2 + 2xyz + 2xy - 2xz^2 - 2xz + 2y^3 - 2y^2z - y^2 + yz^2 - yz \\ + z^3 + z^2$$

の根 $(0, 0, 0)$ の重複度を求める。各 h に対する p 点と q 点の関係は表 4, 5 のようになる。これより合計を求めれば重複度が得られる。さらに、 h を数種類変えたときの重複度を表 6 に示した。これよりわかるように、この問題の重複度は 16 になっている。なお計算時間は各 h に対して約 15 秒であった。

表 4. $h = 0, 01$ に対する重複度

	q_1	q_2	q_3	sum
p_1	0.2819765	0.2251363	0.2251363	0.7322492
p_2	1.070980	0.8915543		1.962535
p_3	1.175023	0.7520718		1.927075
p_4	1.068817	0.6692469		1.738064
p_5	0.9581999	0.4148191		1.373019
p_6	1.070980	0.8915543		1.962535
p_7	1.018655	1.040552		2.059208

表 4. $h = 0.01$ に対する重複度 (続き)

	q_1	q_2	q_3	s u m
p_8	0.6562045			0.6562045
p_9	0.6462901	0.7513322	0.1626404	1.560263
p_{10}	0.9581999	0.4148191		1.373019
p_{11}	0.6562045			0.6562045
total				16.00039

表 5. $h = 0.009$ に対する重複度

	q_1	q_2	q_3	s u m
p_1	0.2761374	0.2173885	0.2173885	0.7109143
p_2	1.069479	0.8936323		1.963111
p_3	1.171271	0.7577311		1.929002
p_4	1.067179	0.6765974		1.743777
p_5	0.9581854	0.4267213		1.384907
p_6	1.069479	0.8936323		1.963111
p_7	1.018324	1.039473		2.057797
p_8	0.6434040			0.6434040
p_9	0.6576132	0.7607113	0.1574934	1.575818
p_{10}	0.9581854	0.4267213		1.384907
p_{11}	0.6434040			0.6434040
total				16.00015

表 6. h に対する重複度

h	0.01	0.0095	0.001	0.00095
重複度	16.00039	16.00015	15.90651	15.90815

例題 3. 4 変数 3 次の連立代数方程式の重複度

$$f_1 = u^3 - u^2x - u^2 - uxz + ux + uyz - uz^2 + x^3 - x^2y - x^2z + xy - xz - y^3 - y^2 - yz^2 + 2yz$$

$$f_2 = -u^3 - u^2x + ux^2 + ux + uy^2 + uy - uz + x^3 - x^2y - xy^2 + xy - xz^2 - y^2z - yz^2 + yz$$

$$f_3 = u^3 - u^2x - u^2y + u^2z - ux^2 - uy^2 + uz^2 + uz - x^2 - xy^2 + xyz + xy + xz^2 + xz + y^3 - y^2 + yz^2 - z^2$$

$$f_4 = u^3 + u^2y - u^2 - ux^2 - uxy + uxz + ux + uy^2 + uyz + uy - uz^2 + x^3 - x^2y + x^2 + xy^2 - xyz + xy + 2xz^2 + xz + y^3 + yz^2 + z^3 + z^2$$

の根 $(0, 0, 0)$ の重複度を求める。各 h に対する p 点と q 点の関係は表 7, 8 のようになる。これより合計を求めれば重複度が得られる。しかし、この場合表 7, 8 でわかるように h を変えた時の重複度がかなり変化している。表 7 の場合では 20 と見積もれ、表 8 の場合は 19 と見積もれる。このように重複度が増加する場合には、すでに述べた方法により重複度を修正する必要がある。これらのことをまとめたものを表 9 に示した。

これよりわかるように、この問題の重複度は 16 になっている。なお計算時間は各 h に対して約 27 秒であった。

表 7. $h = 0.002$ に対する重複度

	q ₁	q ₂	s u m
p ₁	1.287237	1.287237	2.574474
p ₂	1.137765	1.164392	2.302157
p ₃	1.121416	1.132351	2.253766
p ₄	0.6508930	0.6757628	1.326656
p ₅	0.7616134	0.7884581	1.550072
p ₆	0.6344861	0.6889459	1.323432
p ₇	0.7616134	0.7884581	1.550072
p ₈	0.6344861	0.6889459	1.3234325
p ₉	1.137765	1.164392	2.302157
p ₁₀	1.121416	1.132351	2.253766
p ₁₁	0.6508930	0.6757628	1.3266565
total			20.08664

表 8. $h = 0.0002$ に対する重複度

	q_1	q_2	s u m
p_1	1.208921	1.208921	2.417842
p_2	0.6967755	0.7028556	1.399631
p_3	1.100812	1.119939	2.220751
p_4	1.088606	1.096654	2.185260
p_5	0.6065811	0.6348413	1.238422
p_6	0.6027386	0.6349094	1.237648
p_7	0.6967755	0.7028556	1.399631
p_8	0.6027386	0.6349094	1.2376485
p_9	1.100812	1.119939	2.220751
p_{10}	0.6065811	0.6348413	1.238422
p_{11}	1.088606	1.096654	2.1852605
total			18.98127

表 9. h に対する重複度

h	0.002	0.001	0.0002	0.0001
重複度	20.08664	19.67618	18.89127	18.75687
修正重複度	15.9961		15.9995	

例題 4. 4 変数 4 次の連立代数方程式の重複度

$$\begin{aligned}
 f_1 = & -u^4 - u^3x + u^3y - 2u^3z - 2u^3 - 2u^2x^2 + 2u^2xy - u^2xz - u^2x - u^2y^2 + 2u^2yz + 2u^2y \\
 & - u^2z^2 + u^2z + 2u^2 + 2ux^3 + ux^2y - 2ux^2z + ux^2 + 2uxy^2 + uxyz + 2uxy + uxz^2 + uxz \\
 & + ux + 2uy^3 + uy^2z + 2uy^2 + uyz^2 + 2uyz - 2uy - uz^3 + uz^2 - 2uz - x^4 + 2x^3y - 2x^3z \\
 & - 2x^3 + 2x^2y^2 + 2x^2yz + 2x^2y - x^2z^2 - 2x^2z + x^2 - 2xy^3 - 2xy^2z - xy^2 - 2xyz^2 \\
 & - 2xyz - xy + 2xz^3 - xz^2 - 2xz + y^4 + y^3z - 2y^2 + 2y^2z^2 - 2y^2z + 2y^2 - 2yz^3 - yz^2 \\
 & + 2yz - 2z^4 + z^3 - 2z^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2 = & -2u^4 - u^3x + u^3y + 2u^3z - 2u^3 + u^2x^2 + u^2xy + 2u^2xz - 2u^2x - 2u^2y^2 + u^2yz - u^2y \\
 & + 2u^2z^2 + u^2z + u^2 + ux^3 + ux^2y - ux^2z + ux^2 - uxy^2 - 2uxyz - uxy - uxz^2 + uxz - ux
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2uy^3+2uy^2z+2uy^2-2uyz^2+2uyz-2uy+2uz^3+uz^2-2uz+x^4+x^3y+x^3z+x^3 \\
& -x^2y^2+2x^2yz+x^2y-2x^2z^2+2x^2z+2x^2+2xy^3+xy^2z+2xy^2+2xyz^2+xyz-xy \\
& +xz^3-2xz^2-xz-2y^4+2y^3z+y^3+y^2z^2-y^2z-y^2-2yz^3+yz^2+yz+z^4+2z^3-2z^2 \\
f_3 = & -2u^4+2u^3x+u^3y+u^3z-2u^3+2u^2x^2+u^2xy-2u^2xz-2u^2x-2u^2y^2+u^2yz-u^2y \\
& -2u^2z^2+2u^2z+2u^2+2ux^3-ux^2y-2ux^2z+ux^2-2uxy^2+2uxyz-uxy+uxz^2 \\
& +2uxz+2ux+2uy^3+2uy^2z+uy^2-2uyz^2+uyz+2uy-uz^3-2uz^2+2uz-x^4+2x^3y \\
& -2x^3z+2x^3+2x^2y^2+2x^2yz-x^2y+2x^2z^2+2x^2z+2x^2+xy^3+2xy^2z+2xy^2 \\
& -2xyz^2-2xyz+2xy-xz^3-2xz^2-xz+y^4+y^3z+2y^3+2y^2z^2+y^2z-y^2-yz^3 \\
& -2yz^2+2yz-z^4+2z^3+z^2 \\
f_4 = & u^4-u^3x-u^3y-2u^3z-2u^3+2u^2x^2+2u^2xy+2u^2xz+2u^2x-2u^2y^2+u^2yz+2u^2y \\
& +2u^2z^2+u^2z+u^2-2ux^3+ux^2y-ux^2z-2ux^2+uxy^2-uxyz-2uxy+uxz^2-2uxz \\
& +2ux-uy^3+2uy^2z-uy^2-uyz^2-2uyz+2uy-2uz^3+uz^2-uz+2x^4+x^3y-x^3z-x^3 \\
& +x^2y^2+2x^2yz+2x^2y+x^2z^2-x^2z+2x^2+2xy^3-2xy^2z+xy^2+xyz^2-xyz-2xy \\
& -xz^3-xz^2+xz+2y^4+y^3z+y^3-y^2z^2+2y^2z+2y^2-2yz^3+2yz^2-2yz-2z^4+z^3 \\
& +z^2
\end{aligned}$$

の根 (0, 0, 0) の重複度を求める。各 h に対する p 点と q 点の関係は表 10, 11 のようになる。これより合計を求めれば重複度を得られる。この場合も例 3 と同じように重複度の変化がある。したがって、重複度を修正する必要があり、これをまとめたものが表 12 である。

これよりわかるように、この問題の重複度は 16 になっている。なお計算時間は各 h に対して約 71 秒であった。

表 10. h = 0. 001 に対する重複度

	q ₁	q ₂	sum
p ₁	0.8510826	0.9224833	1.773566
p ₂	0.8776552	1.247624	2.125279
p ₃	1.056422	0.8802057	1.936628

表 1 0 . $h = 0 . 0 0 1$ に対する重複度 (続き)

	q_1	q_2	s u m
p_4	0.9171965	1.065304	1.982501
p_5	0.8776552	1.247624	2.125279
p_6	1.056422	0.8802057	1.936628
p_7	1.065304	0.9171965	1.982501
p_8	0.8510826	0.9224833	1.773566
total			15.63595

表 1 1 . $h = 0 . 0 0 0 1$ に対する重複度

	q_1	q_2	s u m
p_1	0.8949680	0.9412092	1.836177
p_2	1.030914	0.9321221	1.963036
p_3	1.030914	0.9321221	1.963036
p_4	0.8949680	0.9412092	1.836177
p_5	0.9170158	1.173376	2.090392
p_6	0.9170158	1.173376	2.090392
p_7	1.021690	0.9533067	1.974997
p_8	1.021690	0.9533067	1.974997
total			15.729202

表 1 2 . h に対する重複度

h	0.01	0.009	0.001	0.0009
重複度	15.63595	15.64137	15.72920	15.73280
修正重複度	15.87827		15.96883	

4 . おわりに

連立代数方程式の交点での重複度を求めるのに、ゾイタンの法則を適用した。その結果今回の数値例に見られるように、十分信頼のおける結果を得た。

とくに、未知定数を除去するという考え方は、とても重要である。なぜならば、例 3, 4 に見られるように、そのままでは重複度の値がどちらとも言えない場合に、重複度の値を正確に求めようとすれば、 h の値をさらに小さくしなければならない。理論的には、 $h \rightarrow 0$ の極限をとる必要があり、表からも h が小さくなる方が真の重複度に近くなっていることがわかる。しかし、 h の値を小さくすると p 点を求めるときの近接根の分離が難しくなってくる。このような場合、 h をさほど小さくしなくとも未知定数を除去する操作を行えば、十分精度の良い重複度が得られる。このことは、重複度を求めるときの精度をある意味で保証していると言える。

また、与えられた代数方程式を直接解こうとすれば $d_1 d_2 d_3 d_4$ 本のパスを追跡しなければならない。しかし、ゾイタンの法則を適用すると、追跡しなければならないパスの本数を $d_2 d_3 d_4$ 本に減らすことができる。このことは、より多変数・高次元化したときに追跡しなければならないパスの数を減らし、したがって計算時間の短縮につながる。

参考文献

[1] J.G. Semple and L. Roth, Introduction to Algebraic Geometry, 1949, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford.

[2] Robert J. Walker, Algebraic curves, 1950, Springer-Verlag