数理解析研究所講究録
第 833 巻 1993 年 225-235

正論理関数の最大潜伏度について
The maximum latency of positive Boolean functions

牧野和久　茨木俊秀
Kazuhisa MAKINO　Toshihide IBARAKI

京都大学工学部数理工学科
Department of Applied Mathematics and Physics,
Faculty of Engineering,
Kyoto University

Abstract The problem of finding an unknown vector of a partially defined Boolean function is pertinent to such problems as identifying a Boolean function and learning from examples an underlying rule. This paper introduces the concept of maximum latency for unknown vectors of a partial function obtained from a (completely defined) positive (i.e., monotone) Boolean function. For the class of general positive functions of n variables, it is known [8] that its maximum latency is greater than $\lfloor n/4 \rfloor$ but not greater than $\lceil n/2 \rceil$. For the class of 2-monotonic positive functions, it is known [4] that its maximum latency is equal to 1. In this paper, we obtain the following results for two classes of Boolean functions. (i) For the class of matroid functions, its maximum latency is equal to 2. (ii) For the class of K-steiner tree functions of l nodes, its maximum latency is not greater than $l-|K|+2$.

あらまし　不完全定義論理関数において未知ベクトルを発見する問題は，論理関数の同定と密接に関連しており，またいくつかの例から一般的法則を導き出す帰納的学習においても重要な役割をもつ．本報告では，論理関数を正関数に限定し，不完全定義関数における未知ベクトルの発見の尺度として，最大潜伏度の概念を導入する．一般の n 変数正関数のクラスについては，最大潜伏度は $\lfloor n/4 \rfloor$ より大きく，$\lceil n/2 \rceil$ 以下であることが知られている [8]．また，正関数のクラスを 2 単調正関数に限定すると，最大潜伏度$=1$ であることも知られている [4]．本論文では，正関数の 2 つのクラスについて，以下の結果を得た．(i) マトロイド関数のクラスでは，最大潜伏度$=2$ である．(ii) l 節点の K-スタイナー木関数のクラスについては，最大潜伏度は $l-|K|+2$ 以下である．

1　まえがき

n 変数ベクトル $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ の関数 f において，各変数 $x_i(1\le i\le n)$ 及び関数値 $f(x)$ が 0 または 1 なる値のみをとるとき，すなわち，$f:\{0,1\}^n\rightarrow\{0,1\}$ であるとき，fを (完全定義) 論理関数 ((completely defined) Boolean function) と言う．論理関数の定義域が，$\{0,1\}^n$ の部分集合 D であるとき，$g:D\rightarrow\{0,1\}$ を不完全定義論理関数 (partially defined Boolean function) という．

$$T(g)=\{x\in D\mid g(x)=1\}$$
$$F(g)=\{x\in D\mid g(x)=0\}$$

と記し，$a\in T(g)$ を gの真ベクトル (true vector)，$b\in F(g)$ を gの偽ベクトル (false vector)，さらに

$u \in \{0,1\}^n \backslash D$を未知ベクトル (unknown vector) という．

本論文では，論理関数を正関数 (positive Boolean function, monotone Boolean function, 単調関数) に限定して考察する．よく知られているように (2 章参照)，正関数 fは，極小真ベクトルの集合 $\min T(f)$ と極大偽ベクトルの集合 $\max F(f)$ によって，定義される．つまり，

$$T(f) = \{a \mid \text{ある } a' \in \min T(f) \text{ に対して } a \geq a'\}$$
$$F(f) = \{b \mid \text{ある } b' \in \max F(f) \text{ に対して } b \leq b'\}$$

である．極小真ベクトルの部分集合 $MT \subseteq \min T(f)$ および極大偽ベクトルの部分集合 $MF \subseteq \max F(f)$ が与えられたとき，

$$T = \{a \mid \text{ある } a' \in MT \text{に対して } a \geq a'\}$$
$$F = \{b \mid \text{ある } b' \in MF \text{に対して } b \leq b'\}$$

とすると，$T \subseteq T(f)$ と $F \subseteq F(f)$ より $T \cap F = \phi$ である．このとき，定義域$T \cup F$をもつ不完全定義関数 gを，

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in T\text{のとき} \\ 0, & x \in F\text{のとき} \end{cases}$$

と定め，fの部分関数 (partial function) と呼ぶ．

正関数 fとその部分関数の概念は fの同定問題 (identification problem) ([7] [12]) と密接に関連している．fの同定とは，一部のベクトル x に対する $f(x)$ の値を知る (所属性質問する) ことで fを正確に同定する問題であって，いくつかの例から一般的法則を導き出す帰納的学習の一つの形態とも考えられる ([1] [2] [6] [13])．正関数 fの同定手順の有力なものの一つは，つぎのような形に書かれる．

1. 適当な初期 $MT(\subseteq \min T(f))$ と $MF(\subseteq \max F(f))$ から始める．
2. MTと MFで定まる部分関数 gの未知ベクトル u を一つ見つけ出す．未知ベクトルが存在しなければ停止．
3. $f(u) = 1$(あるいは0) に応じて，$a \in \min T(f) - MT$ (あるいは $b \in \max F(f) - MF$) を求め，$MT := MT \cup \{a\}$ (あるいは $MF := MF \cup \{b\}$) とする．2 へ戻る．

計算停止時，$MT = \min T(f)$ と $MF = \max F(f)$ が成立し，fの同定は完了している．

このアルゴリズムの複雑さは，通常，変数の個数 n と出力長 $m(= |\min T(f)| + |\max F(f)|)$ を基準に評価され，n と m の多項式オーダ時間で可能かどうかが議論されてきた．未知ベクトル u が一つ求まると，ステップ 3 は n の多項式時間で実行できる ([4] [7] [13])．従って，ステップ 2 の未知ベクトルの発見 (あるいは存在しないことの判定) が，アルゴリズム全体の複雑さを決定する鍵をにぎっている．現在のところ，正関数 fがさらに 2 単調 (2-monotonic) であれば，ステップ 2 は多項式時間で実行できる．したがって，その同定も多項式時間で可能であることが知られている [4]．正しきい関数 (positive threshold function) は 2 単調であるので [9]，この結果は正しきい関数の同定も多項式時間で可能であることも示している．しかし，一般の正関数に対し，その同定が多項式時間で可能かどうかは，現在のところまだ未解決な問題として残されたままである．

本論文では，ステップ 2 の複雑さを示す一つの尺度として，対象とする正関数の部分クラスについて，その最大潜伏度の概念を導入し (詳しい定義は 2 章)，その値を評価する．一般に，n 変数正関数のあるクラス Cの最大潜伏度が $\Lambda_C(n)$ であるとき，各 $a \in MT \cup MF$に対して，$||a - x|| \leq \Lambda_C(n)$ を満たす (ただし，$||y|| = \sum_{i=1}^{n} |y_i|$) すべてのベクトル x が $x \in T \cup F$を満足すれば，クラス Cの関数 fの部分関数 gにおいて未知ベクトルは存在しないという性質がある．例えば，前述の 2 単調な正関数のクラス $2M$を考えると，最大潜伏度 $\Lambda_{2M}(n) = 1$ であるので [4]，ステップ 2 は，$a \in MT \cup MF$に対して，$||a - x|| \leq 1$ を満たすすべてのベクトル x を調べることで実現できる．この計算の手間は明らかに n と

m の多項式時間で可能であり，その結果，fの同定も多項式時間で可能となるのである．しかし，一般の n 変数正関数のクラス Pを対象とするならば，最大潜伏度 $\Lambda_P(n)$

$$\lfloor n/4 \rfloor + 1 \leq \Lambda_P(n) \leq \lceil n/2 \rceil \tag{1.1}$$

であるので [8]，同定アルゴリズムのステップ 2 を，式 (1.1) を満たす x をすべて調べることで実行するのでは，多項式時間のアルゴリズムは得られない．そのような x の個数は n の指数オーダ存在するからである．このことは，一般の正関数の同定問題の困難さを示しており，仮に多項式時間アルゴリズムが存在するとしても，その発見は容易ではないことを示唆している．

本論文では，まず，マトロイド関数のクラスにおいて，最大潜伏度= 2 であることを示し，さらに，グラフ $G=(V,E)$ の K-スタイナー木関数のクラスにおける最大潜伏度は，$|V|-|K|+2$ 以下であることも示す．

以上の結果，マトロイド関数の同定問題は，アルゴリズムのステップ 2 を，各 $a \in MT \cup MF$に対して，$\| a - x \| \leq 2$ を満たす x をすべて調べれば，解くことができるので，多項式時間で可能であることを示している．

なお，正関数 fの同定問題は，fの双対関数を求める問題とも密接に関連しており [11] (一方が多項式時間で可能ならば，他方も多項式時間で可能であることを示せる)，したがってマトロイド関数の双対関数を求める問題に対する多項式時間アルゴリズムも存在する．

2 正論理関数の最大潜伏度

本章では，論理関数，正論理関数，その部分関数，更に，本論文のテーマである最大潜伏度を定義する．なお，混乱が生じない限り，論理関数を単に関数と記す．

定義 2.1 n 変数ベクトル $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ および $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ において，$x_i \geq y_i$ が $i=1,2,\ldots,n$ に対して成立するならば，$x \geq y$と記す．特に，ある j に対して $x_j > y_j$ が成立するとき $x > y$ と記す．□

n 次元 0−1 ベクトル全体の大小関係を図示したグラフをハッセ図といい，H_n と記す．ハッセ図 (Hasse diagram) では，$a > b$ ならば，a を b の上に位置するように書き，有向枝 (b,a) を結ぶ．ただし $a > c$，$c > b$ を満たす c が存在するならば，推移律によって明らかに $a > b$ であるので a，b 間の枝は省略する．$n=4$ の場合のハッセ図を図 1 に示す．

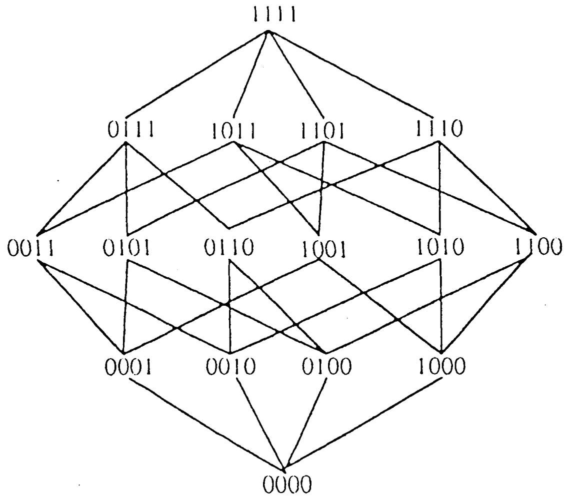


図1　4次元ハッセ図

定義 2.2 論理関数 fにおいて，任意の入力ベクトル x,y に対して，$x \geq y$ ならば $f(x) \geq f(y)$ が成立するとき fを正関数という．□

定義 2.3 fを正関数，さらに $T(f)$ ($F(f)$) を真ベクトル (偽ベクトル) の集合とする．$x \in T(f)$ に対し，$y < x$をみたす $y \in T(f)$ が存在しないならば，x は fの極小真ベクトル (minimal true vector) であるという．極小真ベクトルの集合を $\min T(f)$ と記す．また，$x \in F(f)$ に対し，$y > x$ をみたす $y \in F(f)$ が存在しないならば，x は fの極大偽ベクトル (maximal false vector) であるという．極大偽ベクトルの集合を $\max F(f)$ と記す．□

定義より明らかなように，正関数 f の $\min T(f)$ では，どの二つのベクトル x と x' も比較可能ではない ($x \leq x'$ と $x' \leq x$ のどちらも成立しない)．逆に，比較可能なベクトル対を含まない集合 $S \subseteq \{0,1\}^n$ が与えられたとき，$\min T(f)= S$ によって正関数 f を定めることができる．

よく知られているように (例えば [9])，任意の論理関数は，いくつかの主項 (prime implicant) の論理和として表現することができる．一般的にはこの表現は一意的ではないが，正関数の場合は，すべての主項を集めた完全論理和形 (complete sum) が唯一のものであることが知られている．このとき，正関数 f の各主項は否定リテラル $\bar{x}$ を含まず，しかも，次のように $\min T(f)$ のベクトルと 1 対 1 に対応している．すなわち，各 $x \in \min T(f)$ において $x_j = 1$ の要素に対応するリテラル x_j の論理積を作ると，これは f の主項であり，さらに任意の主項はこのようにして，$\min T(f)$ のベクトルから作ることができる．換言すれば，正関数 f の完全論理和形は，$\min T(f)$ のベクトルを主項という形に直して並べたものである．完全定義正関数 f において，$\min T(f)$ と $\max F(f)$ は次のように関連している．すなわち，f の双対関数 (dual function) $f^d=\bar{f}(\bar{x})$ を求めることができれば，$\min T(f^d)$ ($\max F(f^d)$) の各ベクトルの要素を 0，1 逆にすることによって $\max F(f)(\min T(f))$ が得られる．従って，たとえば $\min T(f)$ から $\min T(f^d)$ を求めることができれば，ただちに $\max F(f)$ を得ることができる．f の双対関数 f^d とは，関数 f のすべての演算について $\vee$ を $\cdot$ に，$\cdot$ を $\vee$ に，またすべての定数について 0 を 1 に，1 を 0 に入れかえた関数，と言うこともできる．

例 2.1 4 変数正関数

$$f = x_1x_2 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3$$

は，$\min T(f) = \{1100, 1001, 0110\}$ をもつ．また，その双対関数

$$\begin{aligned} f^d &= (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3) \\ &= x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_4 \end{aligned}$$

は $\min T(f^d) = \{1100, 1010, 0101\}$ をもつ．つまり，$\max F(f) = \{0011, 0101, 1010\}$ である．□

定義 2.4 完全定義正関数 f に対して，$MT \subseteq \min T(f)$，$MF \subseteq \max F(f)$ が与えられたとき (ただし，$MT \cup MF \neq \phi$)，不完全定義関数 $g : T \cup F \to \{0,1\}$ を次のように定義し，f の部分関数 (partial function) であるという．

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in T \text{のとき} \\ 0, & x \in F \text{のとき}. \end{cases}$$

ただし，

$$\begin{aligned} T &= \{a \mid \text{ある } a' \in MT \text{に対して } a \geq a'\} \\ F &= \{b \mid \text{ある } b' \in MF \text{に対して } b \leq b'\} \end{aligned}$$

である．□

定義 2.5 f の部分関数 g に対して，$u \in \{0,1\}^n \backslash (T \cup F)$ を未知ベクトルといい，その集合 $U = \{0, 1\}^n \backslash (T \cup F)$ を未知ベクトル集合という．□

定義 2.6 g を MT と MF によって定まる n 変数正論理関数 f の部分関数とする．ある $a \in MT \cup MF$ に対して，$||x - a|| \leq k$ を満たすベクトル x の集合を g の k 近傍という．ただし，$||y|| = \sum_{i=1}^{n} |y_i|$ である．g の潜伏度 (latency) $\lambda(g)$ とは，次の条件を満足する整数 λ をいう．

> g の $\lambda - 1$ 近傍に未知ベクトルは存在しないが，λ 近傍には未知ベクトルは存在する．ただし，g に未知ベクトルが存在しないとき，$\lambda(g) = 0$ と定義する．

すなわち，

$$\lambda(g) = \min\{||\, x - a \,|| \mid a \in MT \cup MF, x \in U\}.$$

さらに，正関数のある部分クラス Cの最大潜伏度(maximum latency) $\Lambda_C(n)$ とは，あらゆる n 変数正関数 $f\in C$とその部分関数 g を考えたとき，それらに対する潜伏度 $\lambda(g)$ の最大値をいう．すなわち，

$$\Lambda_C(n)=\max\{\lambda(g)\mid f\in C,\ f\text{は } n \text{ 変数関数}, g\text{は } f\text{の部分関数}\}\quad\square$$

以下，本論文では Cとして，マトロイド関数のクラス，K-スタイナー木関数のクラスの 3 種類を考え，$\Lambda_C(n)$ の上界値と下界値を求める．

例 2.2 4 変数正関数 $f=x_1x_3\vee x_2x_4$は，

$$\min T(f)=\{1010,0101\}$$
$$\max F(f)=\{0011,0110,1001,1100\}$$

をもつ．このとき，

$$MT=\{1010,0101\}$$
$$MF=\{0011,0110,1001\}$$

と仮定すると，これによって定まる部分関数 gの未知ベクトルの集合は，図 2 に示すように

$$U=\{1100\}$$

である．定義より，この g に対する潜伏度 $\lambda(g)$ は 2 である．□

3 マトロイド関数の最大潜伏度

本章では，マトロイド関数の最大潜伏度を導出する．任意のベクトル$x\in\{0,1\}^n$ に対し $Z_x=\{j\mid x_j=0,j=1,2,\ldots,n\}$，$I_x=\{j\mid x_j=1,j=1,2,\ldots,n\}$ と記す．また，集合 Xに対し $|X|$ は X の要素数を表すものとする．

定義 3.1 fが正関数であり，かつ任意の $a^{(1)},a^{(2)}\in\min T(f)$ と任意の $i\in I_{a^{(1)}}-I_{a^{(2)}}$に対して，$a^{(1)}-e_i+e_j\in\min T(f)$ であるような $j\in I_{a^{(2)}}-I_{a^{(1)}}$が存在するとき，$f$をマトロイド関数という．□

すなわち，n 変数マトロイド関数 fに対して定義される集合族 $\{Z_x\mid x\in T(f)\}$ はマトロイドであり，$\{Z_x\mid x\in\min T(f)\}$ はこのマトロイドの基底の集合を与える．その結果，マトロイドの定義より，ある正の定数 $r(\leq n)$ が存在し，任意の $x\in\min T(f)$ に対して，$|Z_x|=n-r$が成立する．この rを fのランク (rank) という．マトロイド関数にはさまざまなクラスの関数が含まれており [3]，次の全域木関数はその一例である．

定義 3.2 連結無向グラフ $G=(V,E)$ において，$E=\{1,2,\ldots n\}$ と考え，各 $i\in E$に変数 x_iを対応させる．正関数 fを

$$f(x)=\begin{cases}1 & G_x=(V,I_x)\text{ が連結のとき}\\ 0 & G_x=(V,I_x)\text{ が非連結のとき}\end{cases}$$

と定めたとき，これを，全域木関数 (spanning tree function) [3] [5] という．□

$\min T(f)$ は G の全域木 (spanning tree) の集合を表し，$(\max F(f))^*$は極小カットの集合を表す．ただし，集合 Xに対して $X^*=\{\bar a\mid a\in X\}$，$a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ に対し，$\bar a=(\bar a_1,\bar a_2,\ldots,\bar a_n)$ である．全域木関数 fのランクは，$r=|V|-1$ である．

補題 3.1 n 変数マトロイド関数のクラス Mの最大潜伏度 $\Lambda_M(n)$ は次の条件を満たす．

$$\Lambda_M(n)=1\quad n=1,2,3\text{ のとき}$$
$$\Lambda_M(n)\geq 2\quad n\geq 4\text{ のとき}$$

証明 $n=1,2,3$ のとき，$\Lambda_M(n)=1$ の成立は明らか．従って，$n\geq 4$ のとき，$\lambda(g)=2$ をみたす n 変数マトロイド関数 fとその部分関数 gを図 2 のグラフ G に基づいて次のように定める．

(1) $n=2k\ (k\geq 2)$ のとき．

$$\min T(f)=\{a\mid \text{すべての } j \text{ に対して } I_a \text{ は } 2j-1,2j \text{ のどちらか一方のみを含む}\}$$
$$\max F(f)=\{b^{(j)}\mid j=1,2,\ldots,k\},$$

ただし，$b^{(j)}$は $Z_{b^{(j)}}=\{2j-1,2j\}$ なるベクトルである．この fに対して，部分関数 gを

$$MT = \min T(f) - \{0101\cdots01\}$$
$$MF = \max F(f)$$

と定める．$u = 0101\cdots01$ とすると，明らかにuは未知ベクトルである．また，任意のjに対して，$u + e_{2j-1} \geq u + e_{2j-1} - e_{2j} \in MT$をみたす．従って，$u + e_{2j-1} \in T$ となり，$MT \cup MF \cup \{u\} = \{0,1\}^n$ となる．また，任意の$a \in MT$に対して，$\| a \| = \| u \| = k$，$a \neq u$より，$\| u - a \| \geq 2$を満たし，とくに，$a = u + e_{2j-1} - e_{2j} \in MT$については，$\| u - a \| = 2$である．一方，任意の$b \in MF$については，$\| b \| = n-2$と$u \not\leq b$から，

$$\| u - b \| \;\geq\; |(n-2)-k| + 2 = k \geq 2$$

となる．それゆえ，このように構成したfとその部分関数gに対して，$\lambda(g) = 2$が成立する．

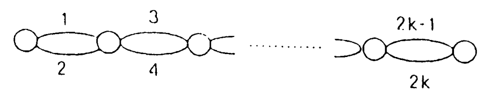
(2) $n = 2k+1$ $(k \geq 2)$ のとき．fは，

$\min T(f) = \{a \mid 2k+1 \in I_a$ かつ，すべてのjに対してI_aは$2j-1, 2j$のどちらか一方のみを含む$\}$
$\max F(f) = \{b^{(j)} \mid j = 1,2,\ldots,k\} \cup \{11\cdots10\}$

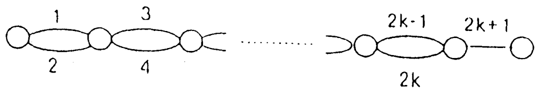
をもつ．部分関数gを

$$MT = \min T(f) - \{0101\cdots011\}$$
$$MF = \max F(f)$$

によって定める．このとき，$u = \{0101\cdots011\}$は未知ベクトルとなり，(1)と同様に$\lambda(g) = 2$を示すことができる．□



(1) n=2kのとき．



(2) n=2k+1のとき．

図 2　$\lambda(g) = 2$を実現する全域木関数f

例 3.1 $n = 4$の場合，補題3.1のfとgは次のようになる（図3）．$f = x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3 \vee x_2x_4$．すなわち，

$$\min T(f) = \{1010, 1001, 0110, 0101\}$$
$$\max F(f) = \{0011, 1100\}$$

であり，gは，

$$MT = \min T(f) - \{0101\}$$
$$= \{1010, 1001, 0110\}$$
$$MF = \max F(f) = \{0011, 1100\}$$
$$U = \{0101\}$$

である．たしかに，潜伏度$\lambda(g) = 2$である．□

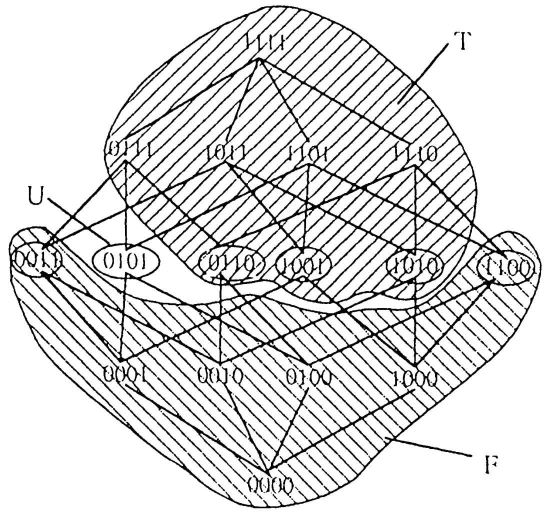


図3 例3.1の部分関数g

補題 3.2 マトロイド関数fの部分関数gにおいて，$MT \neq \phi$かつ，各$a \in MT$に対して，$\| x - a \| \leq 2$をみたすすべてのxが$T \cup F$に含まれるならば，$MT = \min T(f)$である．

証明　$b \in \min T(f) - MT$(すなわち，bは未知ベクトル)が存在するとして矛盾を導く．$a^{(1)} \in MT$を一つ選び，$k = |I_{a^{(1)}} - I_b|$とする．もし，$k = 1$ならば，$\| b - a^{(1)} \| = 2$すなわち，$b \in T \cup F$であり，仮

定 $b \in \min T(f) - MT$ に矛盾する．もし，$k > 1$ ならば，f はマトロイド関数より，ある $i \in I_{a^{(1)}} - I_b$ と $j \in I_b - I_{a^{(1)}}$ に対して，$a^{(2)} = a^{(1)} - e_i + e_j$ であるような $a^{(2)} \in \min T(f)$ が存在する．そのとき，$\| a^{(2)} - a^{(1)} \| = 2$ より，$a^{(2)} \in T \cup F$，つまり，$a^{(2)} \in MT$ であり，さらに，$|I_{a^{(2)}} - I_b| = k - 1$ である．このようにして得られたベクトル列 $a^{(1)}, a^{(2)}, \cdots, a^{(k)}, a^{(k+1)} = b$ は MT に属する．それゆえ，$b \in \min T(f) - MT$ であることに矛盾する．□

補題 3.3 正関数 f において，

(1) 任意の $a \in \min T(f)$ と任意の $j \in I_a$ に対して，$b + e_j \geq a$ であるような $b \in \max F(f)$ が存在する．

(2) 任意の $b \in \max F(f)$ と任意の $j \in Z_b$ に対して，$a - e_j \leq b$ であるような $a \in \min T(f)$ が存在する．

証明　(1) $a - e_j \in T(f)$ ならば，$a \notin \min T(f)$ に矛盾する．従って，$a - e_j \in F(f)$ であり，$b \geq a - e_j$ であるような $b \in \max F(f)$ が存在する．この b において，$j \in I_b$ とすると，$b \geq a$，つまり $a \in F(f)$ となり，矛盾する．従って，$j \notin I_b$．これより，$b + e_j \geq a$ を得る．(2) についても同様に示すことができる．□

補題 3.4 マトロイド関数 f において，任意の $a \in \min T(f)$ と任意の $j \in I_a$ に対して，$b \geq a - e_j$ であるような $b \in \max F(f)$ がただ一つ存在する．

証明　[10] 参照 □

補題 3.5 マトロイド関数 f の部分関数 g において，$MT = \min T(f)$，かつ，各 $a \in MT$ に対して，$\| x - a \| \leq 1$ をみたすすべての x が $T \cup F$ に含まれるならば，$MF = \max F(f)$ である．すなわち，$g = f$ である．

証明　任意の $b \in \max F(f)$ を考える．補題 3.3 (2) より，任意の $j \in Z_b$ に対して，$a - e_j \leq b$ であるような $a \in \min T(f)$ が存在する．仮定より，$a \in MT$ である．この a に対して，$\| a - (a - e_j) \| = 1$ より，$c \geq a - e_j$ であるような $c \in MF$ が存在する．補題 3.4 より，$c = b$ である．つまり，$b \in MF$ である．□

補題 3.6 n 変数マトロイド関数の最大潜伏度 $\Lambda_M(n)$ は $\Lambda_M(n) \leq 2$ をみたす．

証明　補題 3.2 と補題 3.5 より明らか．□

定理 3.1 n 変数マトロイド関数の最大潜伏度 $\Lambda_M(n)$ は次の条件を満たす．

$$\Lambda_M(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, 2, 3 \text{ のとき} \\ 2, & n \geq 4 \text{ のとき} \end{cases}$$

証明　補題 3.1 と補題 3.6 より明らか．□

以下では，$m_1 = |\min T(f)|$，$m_2 = |\max F(f)|$，$m = m_1 + m_2$ とおく．

定理 3.2 もし，所属性質問 (membership queries) の答が n と m の多項式時間で得られるならば，マトロイド関数 f は，n と m の多項式時間で同定される．

証明　最大潜伏度が定数であることと，1 章の議論より明らか．□

補題 3.7 ランク r のマトロイド関数 f において，$m_2 \leq m_1 r$ が成立する．

証明　任意の $a \in \min T(f)$ に対して，$|I_a| = r$ より，$|\{a - e_j \mid j \in I_a\}| = r$．従って，

$$|\{a - e_j \mid a \in \min T(f), j \in I_a\}| \leq m_1 r$$

補題 3.4，補題 3.3 (2) より $m_2 \leq m_1 r$ が成立する．□

定理 3.3 n 変数マトロイド関数 f の完全論理和形が与えられたとき，その双対関数 f^d の完全論理和形を，n と $m_1 (= |\min T(f)|)$ の多項式時間で求めることができる．

証明　fの完全論理和形より $\min T(f)$ を得ることができるので，$MT = \min T(f)$，$MF = \phi$とする．また，$\min T(f)$ を用いて，所属性質問の答を n と m_1 の多項式時間で得ることができる．その結果，定理3.2より，マトロイド関数 fは，n と $m(= m_1 + m_2)$ の多項式時間で $\max F(f)$ が得られる．2 章で述べたように $\max F(f)$ より，双対関数 f^dの完全論理和形を求めることができる．補題 3.7より，m は n と m_1の多項式であり，以上の計算は，n と m_1 の多項式時間である．□

4　グラフ論的関数の最大潜伏度

本章では，全域木 (spanning tree)，極小カット (minimal cut)，単純閉路 (simple circuit) を表す関数とマトロイド関数の関係を示し，さらに，K-スタイナー木関数おける最大潜伏度の上界値を与える．

定義 4.1 全域木関数 fに対し，$f_1(x)$ を次のように定義する．

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{ある } a \in \min T(f) \\ & \quad\text{に対して，} x \le a \text{ のとき} \\ 1, & \text{その他.} \end{cases}$$

明らかに，$\max F(f_1) = \min T(f)$ であり，$\min T(f_1)$ は fが表すグラフの単純閉路の集合を表し，$F(f_1)$ は fが表すグラフの閉路を含まない枝集合の族を表す．また，f_1の双対関数 f_1^dは次のように与えられる．

$$f_1^d(x) = \begin{cases} 1, & \text{ある } a \in (\min T(f))^* \\ & \quad\text{に対して，} x \ge a \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

補題 4.1 fがランク rのマトロイド関数ならば，上記の f_1^dは，ランク $n - r$のマトロイド関数になる．

証明　[10] 参照．□

系 4.1 $m_3 = |\min T(f_1)|$，$m_1 = |\max F(f_1)|$ とするとき，$m_3 \le m_1(n - r)$ が成立する．

証明　補題 4.1，補題 3.7より明らか．□

定理 4.1 もし，全域木，極小カット，単純閉路のいずれかのリストが与えられたとき，その他のリストを n, m_1 (すなわち，枝数と全域木の数) の多項式時間で得ることができる．

証明　定理 3.3と同様に示すことができる．□

定義 4.2 枝数 n の連結無向グラフ $G = (V, E)$ とターゲット節点集合 (the set of target nodes) $K \subseteq V$ が与えられたとき，n 変数 K-スタイナー木関数 (K-steiner tree function) [3] [5] を次のように定義する．

$$f_K(x) = \begin{cases} 1, & G_x = (V, I_x) \text{ において，} \\ & \quad\text{任意の } i, j \in K \text{ が連結のとき} \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

すなわち，$\min T(f_K)$ は G における K-スタイナー木の集合を表し，$(\max F(f_K))^*$ はターゲット集合 K を分ける極小カットの集合を表す．

定義 4.3 グラフ $G = (V, E)$ とターゲット集合 K において，K-スタイナー木関数を f_K，全域木関数を f_Vとするとき，各 $a \in \min T(f_K)$ に対して，$S_a = \{x | x \in \min T(f_V), x \ge a\}$ と定める．□

補題 4.2 グラフ $G = (V, E)$ とターゲット集合 Kに対する，K-スタイナー木関数 f_K，全域木関数 f_Vにおいて，各 $a \in \min T(f_K)$ に対して，$S_a \ne \phi$である．すなわち，すべての $a \in \min T(f_K)$ に対して，$a' \ge a$ であるような $a' \in \min T(f_V)$ が存在する．

証明　K-スタイナー木にいくらかの枝を加え，全域木をつくることができることより，明らか．□

補題 4.3 グラフ $G = (V, E)$ とターゲット集合 Kに対する，K-スタイナー木関数 f_K，全域木関数 f_Vにおいて，任意の $x \in \min T(f_V)$ に対して，$a \le x$ であるような $a \in \min T(f_K)$ がただ一つ存在する．

証明　全域木とその部分グラフである K-スタイナー木の関係より，明らか．□

系 4.2 グラフ $G=(V,E)$ とターゲット集合 Kに対する，K-スタイナー木関数 f_K，全域木関数 f_Vにおいて，$a^{(1)},a^{(2)},\ldots,a^{(m)}\in \min T(f_K)$ とするとき，$\min T(f_V)$ は互いに素なベクトル集合によって一意に

$$\min T(f_V)=\bigcup_{j=1}^{m} S_{a(j)}$$

と分解される．□

補題 4.4 グラフ $G=(V,E)$ とターゲット集合 Kに対する，K-スタイナー木関数 f_K，全域木関数 f_Vにおいて，次の 2 つの条件を満足する．

(1) $T(f_V)\subseteq T(f_K)$

(2) $\max F(f_K)\subseteq \max F(f_V)$

証明 (1) 全域木は K-スタイナー木でもあることから，明らか．(2) $(\max F(f_V))^*$は極小カットの集合，$(\max F(f_K))^*$は Kを分ける極小カットの集合を表すより，明らか．□

二つの集合 X, Yにおいて $\| X-Y \|=\min\{\| x-y \| \mid x\in X, y\in Y\}$ という記法を用いる．

補題 4.5 グラフ $G=(V,E)$ とターゲット集合 Kに対する，K-スタイナー木関数 f_Kの部分関数 gにおいて，$MT\neq\phi$ かつ，各 $a\in MT$ に対して $\| x-a \|\leq |V|-|K|+2$ をみたすすべての x が $T\cup F$に含まれるならば，$MT=\min T(f_K)$ である．

証明 $b\in \min T(f_K)-MT$が存在するとして矛盾を導く．グラフ $G=(V,E)$ の全域木関数を f_Vとする．$a^{(1)}\in MT$を一つ選ぶと，補題 4.2より，$S_{a^{(1)}}\neq\phi$，$S_b\neq\phi$，かつ，系 4.2より，$S_{a^{(1)}}\subseteq T$，$S_b\subseteq U$ である．ある$\alpha\in S_{a^{(1)}}$と，ある$\beta\in S_b$において，$\| S_b-S_{a^{(1)}} \|=\| \beta-\alpha \|$，$k=|I_\beta-I_\alpha|$ とする．もし，$k=1$ ならば，$\| \beta-\alpha \|=2$ となる．$a^{(1)}$は K-スタイナー木より，$\| a^{(1)} \|\geq |K|-1$，αは全域木より，$\| \alpha \|=|V|-1$ である．また，$a_{(1)}\not\leq\beta$より，

$$\begin{aligned}\| \beta-a^{(1)} \| &= \| \beta-\alpha \|+\| \alpha-a^{(1)} \|\\ &\leq 2+|(|V|-1)-(|K|-1)|\\ &= |V|-|K|+2\end{aligned}$$

となる．従って，βが未知ベクトルであることに矛盾するので，$k>1$ である．f_Vはマトロイド関数より，ある $i\in I_\alpha-I_\beta$ と $j\in I_\beta-I_\alpha$に対して，$x=\alpha-e_i+e_j$であるような $x\in\min T(f_V)$ が存在する．そのとき，$\| a^{(1)}-x \|\leq |V|-|K|+2$ より，$x\in T\cup F$である．さらに，$x\in T(f_V)$ より，補題 4.4(1) を用いて，$x\in T$が得られる．補題 4.3 より，$a^{(2)}\leq x$ であるような $a^{(2)}\in\min T(f_K)$ がただ一つ存在する．従って，$a^{(2)}\in MT$であり，ある$\alpha'\in S_{a^{(2)}}$と，ある$\beta'\in S_b$において，$\| S_b-S_{a^{(2)}} \|=\| \beta'-\alpha' \|$とすると，$|I_{\beta'}-I_{\alpha'}|<k$となる．さらに，$a^{(2)}$に対して $a^{(1)}$と同様な操作を繰り返して得られるベクトル列 $a^{(1)},a^{(2)},\cdots,a^{(l)}=b$ は MTに属する．それゆえ，$b\in\min T(f_K)-MT$であることに矛盾する．□

補題 4.6 グラフ $G=(V,E)$ とターゲット集合 Kに対する，K-スタイナー木関数 f_Kの部分関数 gにおいて，任意の $a\in MT\cup MF$ に対して，$\| x-a \|\leq |V|-|K|+2$ をみたすすべての x が $T\cup F$に含まれるならば，$MF=\max F(_K)$ である．

証明 任意の $b\in\max F(f_K)$ を考える．グラフ $G=(V,E)$ の全域木関数を f_V とすると，補題 4.4 (2) より，$b\in\max F(f_V)$ である．補題 3.3 (2) より，任意の $j\in Z_b$に対して，$a-e_j\leq b$ であるような $a\in\min T(f_V)$ が存在する．補題 4.4 (1)，補題 4.5 より，$a\in T$であり，$a'\leq a$ であるような $a'\in MT$ が存在する．$a-e_j\in F$より，$a\not\leq a-e_j$である．従って，

$$\begin{aligned}\| (a-e_j)-a' \| &= \| (a-e_j)-a \|+\| a-a' \|\\ &\leq 1+|(|V|-1)-(|K|-1)|\\ &= |V|-|K|+1\end{aligned}$$

より，$b \geq a - e_j$であるような$c \in MF$が存在する．補題 3.4，補題 4.4より，$c = b$である．つまり，$b \in MF$である．□

定理 4.2 節点数lをもつグラフの位数kの節点集合Kに対するK-スタイナー木関数のクラスを$S(l,k)$とするとき，このクラスの最大潜伏度$\Lambda_{S(l,k)}(n)$は，$\Lambda_{S(l,k)}(n) \leq l - k + 2$をみたす．

証明　補題 4.5，補題 4.6より明らか．□

5　むすび

本研究では，論理関数を正関数に限定し，不完全定義関数における未知ベクトルの発見の尺度として，最大潜伏度$\Lambda_C(n)$の概念を導入した．マトロイド関数のクラスMにおいて，最大潜伏度$\Lambda_M(n) = 2$であること，K-スタイナー木関数のクラス$S(l,k)$における最大潜伏度の上界値$l - k + 2$を与えた．

マトロイド関数においては，最大潜伏度が定数となるため，その同定が多項式時間で可能である．また，マトロイド関数の双対関数を求める問題も，多項式時間で可能である．

謝辞　日頃御議論いただいている研究室の皆様，および，文献 [3] を示し，貴重なコメントをいただいたY. Crama 教授に深謝の意を表します．なお，本研究は一部文部省科学研究費によるものである．

参考文献

[1] Angluin D. : "Learning regular sets from queries and counter -examples", *Information and Computation,* **75**, pp.87-106 (1987).

[2] Angluin D. : "Queries and concept learning", *Machine Learning,* **2**, pp.319-342 (1988).

[3] Ball M.O.,and Provan J.S. : "Disjoint products and efficient computation of reliability", *Operations Research,* **36**, pp.703-715 (1988).

[4] Boros E., Hammer P.L., Ibaraki T. and Kawakami K. : "Identifying 2-monotonic positive Boolean functions in polynomial time", Proc. 2nd International Symposium on Algorithms, Lecture Notes in Computer Science **557**, Springer-Verlag, pp.104-115 (1991).

[5] Colbourn C.J. : "The combinatorics of network reliability", Oxford University Press (1987).

[6] Crama Y., Hammer P.L. and Ibaraki T. : " Cause-effect relationships and patially defined Boolean functions", *Annals of Operations Research,* **16**, pp.299-326 (1988).

[7] Gainanov D.N. : " On one criterion of the optimality of an algorithm for evaluating monotonic Boolean functions", *U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics,* **24**, pp.176-181 (1984).

[8] 牧野和久，茨木俊秀 :"不完全に定義された正論理関数の潜伏度について", 信学技法 COMP92-3, pp.19-25,(1992).

[9] Muroga S. : "Threshold Logic and Its Applications", Wiley-Interscience (1971).

[10] Papadimitriou C.H. and Steiglitz K. : "Combinatrial Optimization : Algorithms and Complexity", PRENTICE-HALL (1982).

[11] Peled U.N. and Simeone B. : "An O(nm)-time algorithm for computing the dual of a regular Boolean function", Technical Report, University Illinois at Chicago (1990).

[12] Sokolov N.A. : "On the optimal evaluation of monotonic Boolean functions", *U.S.S.R.*

Computational Mathematics and Mathematical Physics, **22**, pp.207-220 (1979).

[13] Valiant L.G. : "A theory of the learnable", *Commun. ACM*, **27**, pp.1134-1142 (1984).