数理解析研究所講究録
834巻 1993年 91-103

Existence of infinitely many solutions for a perturbed elliptic equation with exponential growth

名大理　杉村邦彦（Kunihiko Sugimura)

1. Introduction

次の非線形Dirichlet問題を考える.

$$(1)\quad \begin{cases} -\Delta u = g(x,u)+f(x) & \text{in } \Omega, \\ u=0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

ここで, $\Omega\subset \mathbb{R}^N$は有界領域, その境界$\partial\Omega$はなめらかで, $^\forall f\in L^2(\Omega)$とする. さらに, 非線形項$g$は次の条件をみたすものとする.

(g1) $g\in C(\bar{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(g2) $^\exists A_0>0$ s.t. $|g(x,\xi)|\le A_0 e^{\Phi(\xi)}$ for $(x,\xi)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$,
ここに, $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\Phi(\xi)\xi^{-2}\to 0$ $(|\xi|\to\infty)$.

(g3) $^\exists\mu>0$, $^\exists r_0\ge 0$ s.t.
$0<\mu G(x,\xi)\equiv\mu\int_0^\xi g(x,t)\,dt\le\xi g(x,\xi)$ for $x\in\bar{\Omega}$, $|\xi|\ge r_0$.

(g4) $g(x,-\xi)=-g(x,\xi)$ for $(x,\xi)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$.

特に$f=0$の場合, 方程式(1)は条件(g4)のもとに対称性をもつ

ことから，$N=2$のとき条件$(g1)\sim(g4)$, $N\geq 3$のとき条件$(g1)$, $(g3)$, $(g4)$および

$$(2)\ \begin{cases} {}^{\exists}B_0>0,\ 1<{}^{\exists}s<\frac{N+2}{N-2} \quad s.t. \\ |g(x,\xi)|\leq B_0(1+|\xi|^s) \quad \text{for } (x,\xi)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}. \end{cases}$$

なるgrowth条件のもとで，無限個の解(H^1-solution)をもつことが知られている(cf. [AR]).

一方，$f\neq 0$の場合は，Bahri-Berestycki [BB]，Struwe [St]，Rabinowitz [R]らによって研究され，特にRabinowitzは，条件$(g1)$, $(g3)$, $(g4)$に加えてgrowth条件(2)中のsを次のように制限した上で，方程式(1)は無限個の解をもつことを示した.

$$\frac{(N+2)-(N-2)s}{N(s-1)}>\frac{\mu}{\mu-1}.$$

さらに，Tanaka[T]は上のsの条件を$\frac{2(s+1)}{N(s-1)}>\frac{\mu}{\mu-1}$にゆるめた.
また，$g(x,\xi)=|\xi|^{s-1}\xi$という特殊な場合については，Bahri-Lions [BL]によって$1<s<\frac{N}{N-2}$ $(N\geq 3)$または$1<s<\infty$ $(N=2)$のとき，方程式(1)は無限個の解をもつことが示された.

以上の既知結果のうち，特に$N=2$の場合に注目すると，$f\neq 0$であってもgが適当なexponential growth条件をみたす場合に，方程式(1)は無限個の解をもつことが予想される．そこで，この問題を扱うために，$(g1)\sim(g4)$に加えて次のgrowth条件を仮定する.

(g5) $0<{}^{\exists}\alpha_1\leq{}^{\exists}\alpha_2<2,\ {}^{\exists}A_1,{}^{\exists}A_2>0,\ {}^{\exists}B_1,{}^{\exists}B_2\geq 0$ s.t.

$$A_1 e^{|\xi|^{\alpha_1}}-B_1\leq G(x,\xi)\equiv\int_0^{\xi}g(x,t)dt\leq A_2 e^{|\xi|^{\alpha_2}}+B_2 \quad \text{for } (x,\xi)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R},$$

さらにα_1,α_2は$\frac{2}{\alpha_2}-2>\frac{1}{\alpha_1}$をみたすものとする.

注意. 条件(g1)〜(g5)をみたす具体例: $g(x,u)=ue^{|u|^{\alpha}}$ $(0<\alpha<\frac{1}{2})$.

このとき次の定理が得られる.

<u>定理</u>. $N=2$でgは条件(g1)〜(g5)をみたすものとする. このとき, 任意の$f\in L^2(\Omega)$に対して, 方程式(1)は無限個の解$\{u_j\}_{j=1}^{\infty}\subset H_0^1(\Omega)$で$\|u_j\|_{H^1(\Omega)}\to\infty$ $(j\to\infty)$をみたすものをもつ.

以下, いくつかの章を通して定理の証明を述べる.

2. Variational formulation and a modified functional

$E=H_0^1(\Omega)$とおき, Eのノルムとして$\|u\|=\left(\int_\Omega|\nabla u|^2dx\right)^{1/2}$を採用する. また, $\|u\|_{L^p(\Omega)}=\left(\int_\Omega|u|^pdx\right)^{1/p}$と記す.

さて, 方程式(1)に対応する次の汎関数を考える.

$$I(u)=\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}|\nabla u|^2-G(x,u)-f\cdot u\right\}dx \quad \text{for } u\in E.$$

このとき, 条件(g1)および(g2)のもとで, $I\in C^1(E,\mathbb{R})$かつ

$$(I'(u),\varphi)=\int_\Omega\{\nabla u\cdot\nabla\varphi-g(x,u)\varphi-f\cdot\varphi\}dx \quad \text{for } \varphi\in E.$$

が示される. ここで$(\cdot,\cdot)$は$E^*(=H^{-1}(\Omega))$とEのduality product.

したがって, 方程式(1)の解(H^1-solution)を汎関数Iのcritical pointとしてとらえることができる.

次に，Rabinowitzの方法(cf. [R])に従い，Iの修正汎関数Jを構成する．まず，条件(g3)より

$$\frac{1}{\mu}(\xi g(x,\xi)+a_1) \geq G(x,\xi)+a_2 \geq a_3|\xi|^{\mu} \quad \text{for } (x,\xi)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}.$$

をみたす$a_1, a_2, a_3>0$が存在することに注意する．さらに，$\chi\in C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$を $\chi(\xi)=\begin{cases}1 & (\xi\leq 1)\\ 0 & (\xi\geq 2)\end{cases}$，$-2<\chi'(\xi)<0$ $(1<\xi<2)$ をみたすようにとり，

$$Q(u)=A(I(u)^2+1)^{1/2}, \quad \Psi(u)=\chi\left(Q(u)^{-1}\int_{\Omega}(G(x,u)+a_2)\,dx\right)$$

とおく．ここに，Aは以下に述べる命題1の(2°)をみたすべく選ばれたuに依存しない正の定数である(cf. [Su])．ここで，汎関数Jを次のように定義する．

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx-\int_{\Omega}G(x,u)dx-\Psi(u)\int_{\Omega}f\cdot u\,dx \quad \text{for } u\in E.$$

このとき，$J\in C^1(E,\mathbb{R})$であり，さらに次のことが成り立つ．

<u>命題1</u>．$^{\exists}B=B(\|f\|_{L^2(\Omega)})>0$，$^{\exists}M_0=M_0(\|f\|_{L^2(\Omega)})>0$ s.t.

(1°) $|J(u)-J(-u)|\leq B\{(\log(|J(u)|+1))^{1/\mu}+1\}$ for $u\in E$.

(2°) もし$J(u)\geq M_0$かつ$J'(u)=0$ならば$J(u)=I(u)$かつ$I'(u)=0$.

(3°) Jは次のPalais-Smale (PS) 条件をみたす．

(PS) $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}\subset E$が$M_0\leq J(u_j)\leq{}^{\exists}M$および$\|J'(u_j)\|_{E^*}\to 0$ $(j\to\infty)$をみたすとき，$\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$は収束部分列をもつ．

注意．汎関数Iそのものについては，上の命題中の(1°)のような対称性からのずれの評価が得られない．このことが，修正

汎関数 J を導入した主因である.

命題 1 中の (1°) は, J の定義と条件 (g5) の左辺の不等式を用いて容易に示される (cf. [Su]). (2°) および (3°) の証明については [R, Su] を参照されたい.

3. Minimax methods and an existence result

固有値問題: $\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$ の固有値を λ_j $(0<\lambda_1<\lambda_2\le\lambda_3\le\cdots)$ とし, 対応する固有関数 e_j を $\int_\Omega \nabla e_i\cdot\nabla e_j\,dx = \delta_{ij}$ をみたすようにとり, $E_n = \mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_n\}$ とおく. このとき $u\in E_n$ に対して $\|u\| \le \lambda_n^{1/2}\|u\|_{L^2(\Omega)}$ が成り立つことに注意すれば, 次をみたす正数の列 $\{R_n\}$ がとれる.

$$\begin{cases} R_{n+1} > R_n \ (\forall n\in\mathbb{N}) \text{ かつ } J(u)\le 0 \quad \text{for } u\in E_n\setminus B_{R_n}, \\ \text{ここに, } B_{R_n} = \{u\in E\,;\, \|u\|\le R_n\}. \end{cases}$$

ここで, $D_n = B_{R_n}\cap E_n$ とおき

$$\Gamma_n = \{\gamma\in C(D_n,E)\,;\, \gamma(-u) = -\gamma(u) \text{ in } D_n,\ \gamma(u) = u \text{ on } \partial D_n\},$$

$$U_n = \{u\in te_{n+1}+w\,;\, t\in[0,R_{n+1}],\ w\in B_{R_{n+1}}\cap E_n,\ \|u\|\le R_{n+1}\},$$

$$\Lambda_n = \{H\in C(U_n,E)\,;\, H|_{D_n}\in\Gamma_n,\ H(u) = u \text{ for } u\in\partial U_n\setminus D_n\}$$

と定義する. これらを用いて J に関する minimax-value を次のように定める.

$$b_n = \inf_{\gamma\in\Gamma_n}\max_{u\in D_n} J(\gamma(u)), \qquad c_n = \inf_{H\in\Lambda_n}\max_{u\in U_n} J(H(u)).$$

このとき，定義より $c_n \geq b_n$ ($^\forall n \in \mathbb{N}$)．さらに次のことが示される．

<u>命題2</u>．$c_n > b_n \geq M_0$ と仮定した上で，$^\exists \delta \in (0, c_n - b_n)$ をとり

$$\Lambda_n(\delta) = \{ H \in \Lambda_n ;\ J(H(u)) \leq b_n + \delta \quad \text{for } u \in D_n \},$$

$$c_n(\delta) = \inf_{H \in \Lambda_n(\delta)} \max_{u \in U_n} J(H(u))$$

と定義する．このとき，$c_n(\delta) \geq c_n$ であり，$c_n(\delta)$ は汎関数 I の critical value となる．

上の命題中の，$c_n(\delta) \geq c_n$ という主張は定義より明らかである．$c_n(\delta)$ が I の critical value であることをいうには命題1の(2°)より，$c_n(\delta)$ が J の critical value であることを示せばよい．その証明は，通常 "Deformation Lemma" を用いてなされる．詳しくは[R, Su]を参照されたい．

命題2により，定理の証明には次のことを示せばよいことがわかる．

$$\begin{cases} ^\exists \{n_j\} \subset \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \\ c_{n_j} > b_{n_j} \geq M_0 \quad \text{for } j \in \mathbb{N} \text{ かつ } b_{n_j} \to \infty \ (j \to \infty). \end{cases}$$

このような部分列を得るために，b_n の growth order を計算する必要がある．それには，Morse index に関連する評価（第4章）およびスペクトルに関連する評価（第5章）が必要である．それらの評価を用いて，第6章で b_n の growth order の計

算を完結するであろう.

4. A Morse index estimate

まず, 条件(g5)の右辺の不等式より, $^\exists a_0>0$, $^\exists C>0$ で次をみたすものがとれることに注意する.

$$J(u)\ge\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx-a_0\int_\Omega e^{(u^2+1)^{\alpha/2}}dx-C \quad \text{for } u\in E.$$

ここで, $G_0(u)=a_0e^{(u^2+1)^{\alpha/2}}$ とおき,

$$K(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx-\int_\Omega G_0(u)dx \quad \text{for } u\in E.$$

と定義すると, $J(u)\ge K(u)-C$ $(^\forall u\in E)$ である. したがって,

$$d_n=\inf_{\gamma\in\Gamma_n}\max_{u\in D_n}K(\gamma(u))$$

と定めれば,

$$b_n\ge d_n-C \quad \text{for } n\in\mathbb{N}. \tag{4.1}$$

となる.

次に, "$u\in E\Rightarrow G_0''(u)\in L^p(\Omega)$ $(^\forall p\ge1)$" となることに注意し

$$\begin{aligned}K''(u)(h,h)&\equiv\int_\Omega|\nabla h|^2dx-\int_\Omega G_0''(u)h^2dx\\&=((-\Delta-G_0''(u))h,\ h) \quad \text{for } h\in E.\end{aligned} \tag{4.2}$$

とおく. そして, $K''(u)$の "augmented Morse index" を次のように定義する.

$$m^*(K''(u))\equiv\max\{\dim F\ ;\ F\text{は}E\text{の部分空間で}\ K''(u)(h,h)\le0 \text{ for } ^\forall h\in F\text{をみたす}\}. \tag{4.3}$$

このとき, Tanaka[T]の Theorem Bの特別な場合として, 次

のことが示される.

<u>命題3</u>. 各$n\in\mathbb{N}$に対して, 次をみたす$v_n\in E$が存在する.

$$K(v_n)\le d_n,\quad K'(v_n)=0,\quad m^*(K''(v_n))\ge n\ .$$

上の命題の証明については[T]を参照されたい.

5. A spectral estimate

固有値問題: $\begin{cases}-\Delta h-V(x)h=\lambda h & \text{in } \Omega,\\ \qquad h=0 & \text{on } \partial\Omega,\end{cases}$ (ここに$V\in L^p(\Omega)$, $^\exists p>1$)

の$\delta(\le 0)$以下の固有値の数(重複も数えて)を$N_\delta(V,\Omega)$と記す.

このとき, (4.2)および(4.3)により,

$$N_0(G_0''(u),\Omega)=m^*(K''(u))\quad \text{for } u\in E \tag{5.1}$$

が示される. また, 一般に次の不等式が成り立つ.

<u>命題4</u>.

$$N_0(V,\Omega)\le C_0\left\{1+\int_\Omega V_+(x)\log(V_+(x)+1)\,dx\right\},$$

ここに, C_0はVに依存しない正の定数, $V_+(x)\equiv\max(V(x),0)$.

この命題の証明にはE. Lieb[Li]によって得られた次の不等式($N=2$の場合)を用いる.

<u>E. Liebの不等式($N=2$の場合)</u>

$\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$は下半連続, convexで次をみたすものとする.

$\varphi(t)/t^m$ $(t\to\infty, {}^{\exists}m>0)$, $\varphi(0)=0$, $\int_0^\infty t^{-1}e^{-t}\varphi(t)\,dt=1$.
このとき，$g<0$ に対して次の不等式が成り立つ．

$$N_g(V,\mathbb{R}^2)\le\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^\infty t^{-1}e^{gt}S(x,x;t)\,\varphi(tV_+(x))\,dt\,dx,$$

ここに，$S(x,y;t)$ は $\mathbb{R}^2$ における熱方程式の基本解で，$S(x,x;t)=(4\pi t)^{-1}$.

この E. Lieb の不等式の証明（$N\ge3$ の場合も含めて）については [Li] を参照されたい．

<u>命題 4 の証明</u>．上の φ として，$\varphi(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le1,\\ a(t-1) & t\ge1.\end{cases}$ とおく．
ここに $a\equiv\left(e^{-1}-\int_1^\infty t^{-1}e^{-t}dt\right)^{-1}$. また，

$$1_\Omega(x)=\begin{cases}1, & x\in\Omega,\\ 0, & x\in\mathbb{R}^2\setminus\Omega,\end{cases}\qquad \widetilde{V}_+(x)=\begin{cases}V_+(x), & x\in\Omega,\\ 0, & x\in\mathbb{R}^2\setminus\Omega.\end{cases}$$

とする．このとき，

$$N_0(V,\Omega)\le N_0(V_+,\Omega)=N_{-1}(V_++1,\Omega)\le N_{-1}(\widetilde{V}_++1_\Omega,\mathbb{R}^2)$$

となることに注意して E. Lieb の不等式を用いれば，

$$\begin{aligned}N_0(V,\Omega)&\le N_{-1}(\widetilde{V}_++1_\Omega,\mathbb{R}^2)\\&\le\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^\infty t^{-1}e^{-t}(4\pi t)^{-1}\varphi\big(t(\widetilde{V}_+(x)+1_\Omega(x))\big)\,dt\,dx\\&=\int_\Omega\int_{\frac{1}{V_+(x)+1}}^\infty t^{-1}e^{-t}(4\pi t)^{-1}a\{t(V_+(x)+1)-1\}\,dt\,dx\\&\le\frac{a}{4\pi}\int_\Omega(V_+(x)+1)\int_{\frac{1}{V_+(x)+1}}^\infty t^{-1}e^{-t}\,dt\,dx.\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\int_{\frac{1}{V_+(x)+1}}^\infty t^{-1}e^{-t}dt\le\int_{\frac{1}{V_+(x)+1}}^1 t^{-1}dt+\int_1^\infty e^{-t}dt=\log(V_+(x)+1)+e^{-1}$

となることに注意すれば，命題4中の不等式が示される．∎

命題4で特に$V(x)=G_0''(u(x))$とおき(5.1)を用いると，次の不等式が得られる．

$$m^*(K''(u)) \le C_0\left\{1+\int_\Omega G_0''(u)_+ \log(G_0''(u)_+ +1)\,dx\right\} \quad \text{for } u\in E. \tag{5.2}$$

6. An estimate from below on the growth of b_n

この章では，先の二つの章の結果を用いて，b_nのgrowth orderに関する次の命題を証明する．

<u>命題5</u>． $^\exists \theta_1>0$, $^\exists N_1\in\mathbb{N}$ s.t.

$$b_n \ge n(\log n)^{\frac{2}{\alpha_2}-2} \quad \text{for } n\ge N_1.$$

<u>証明</u>．以下，$C_1, C_2, \cdots, C_1', C_2', \cdots$ は$u\in E$および$n\in\mathbb{N}$に依存しない定数とする．まず，$G_0(\xi)=a_0 e^{\langle\xi\rangle^{\alpha_2}}$ (ここに$\langle\xi\rangle\equiv(\xi^2+1)^{1/2}$) であることから簡単な計算により次の不等式が得られる．

$$\begin{cases} G_0'(\xi)\xi \ge C_1\langle\xi\rangle^{\alpha_2}e^{\langle\xi\rangle^{\alpha_2}}-C_2, \\ G_0''(\xi)_+ \le C_3\langle\xi\rangle^{2\alpha_2-2}e^{\langle\xi\rangle^{\alpha_2}}, \end{cases} \quad \text{for } \xi\in\mathbb{R}.$$

(4.1)，命題3，(5.2)および上の不等式を用いることにより，

$$\begin{aligned} b_n &\ge d_n - C \ge K(v_n) - C = K(v_n) - \tfrac{1}{2}(K'(v_n), v_n) - C \\ &= \int_\Omega \left\{\tfrac{1}{2}G_0'(v_n)v_n - G_0(v_n)\right\}dx - C \\ &\ge C_1'\int_\Omega \langle v_n\rangle^{\alpha_2}e^{\langle v_n\rangle^{\alpha_2}}dx - C_2', \end{aligned} \tag{6.1}$$

および

$$n \le m^*(K''(v_n)) \le C_0\left\{1+\int_\Omega G_0''(v_n)_+ \log(G_0''(v_n)_+ +1)\,dx\right\}$$
$$\le C_0'\int_\Omega \langle v_n\rangle^{3\alpha_2-2} e^{\langle v_n\rangle^{\alpha_2}}\,dx.$$

すなわち

$$\int_\Omega \langle v_n\rangle^{3\alpha_2-2} e^{\langle v_n\rangle^{\alpha_2}}\,dx \ge C_4 n \quad \text{for } n\in\mathbb{N}. \tag{6.2}$$

ここで $\varphi_0(\xi)=\begin{cases}\xi\{\log(\xi+1)\}^{\frac{2}{\alpha_2}-2}, & \xi\ge 0,\\ 0, & \xi\le 0.\end{cases}$ とおくと条件(g5)中の

α_1, α_2 に関する条件より $\frac{2}{\alpha_2}-2>2$ であるから，φ_0 は単調増加，

convexとなる．したがって，Jensenの不等式および φ_0 の定義

を用いることにより，

$$\varphi_0\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \langle v_n\rangle^{3\alpha_2-2} e^{\langle v_n\rangle^{\alpha_2}}\,dx\right) \le \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \varphi_0\left(\langle v_n\rangle^{3\alpha_2-2} e^{\langle v_n\rangle^{\alpha_2}}\right)dx$$
$$\le C_5\int_\Omega \langle v_n\rangle^{\alpha_2} e^{\langle v_n\rangle^{\alpha_2}}\,dx \tag{6.3}$$

(6.1), (6.2), (6.3)および φ_0 の定義により，十分大きなすべて

の $n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$b_n \ge C_1'\int_\Omega \langle v_n\rangle^{\alpha_2} e^{\langle v_n\rangle^{\alpha_2}}\,dx - C_2'$$
$$\ge C_6\varphi_0\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \langle v_n\rangle^{3\alpha_2-2} e^{\langle v_n\rangle^{\alpha_2}}\,dx\right) - C_2'$$
$$\ge C_6\varphi_0(C_4'n) - C_2' \ge \theta_1 n(\log n)^{\frac{2}{\alpha_2}-2} \qquad (\exists\theta_1>0)$$

が成り立ち，命題5の証明が終了する．■

7. Proof of Theorem

定理の証明を完了するためには，次の命題が必要である．

<u>命題6</u>．"$C_n = b_n \ \forall n \geq {}^\exists n_0$" が成り立つと仮定すると，

$${}^\exists \theta_2 > 0,\ {}^\exists n_1 \geq n_0 \ \text{s.t.}$$

$$b_n \leq \theta_2 n (\log n)^{\frac{1}{\delta_1}} \quad \text{for } n \geq n_1 .$$

<u>証明の概要</u>．"$C_n = b_n \ \forall n \geq {}^\exists n_0$" なる仮定と命題1の(イ)および $b_n \to \infty$ (命題5による)となることを用いて，次の漸化不等式が得られる．

$${}^\exists \beta > 0 \ \text{s.t.} \ b_{n+1} \leq b_n + \beta (\log b_n)^{\frac{1}{\delta_1}} \quad \text{for } n \geq {}^\exists n_1 (\geq n_0).$$

この不等式を用いて，帰納法により命題6が証明される．詳しくは[Su]を参照されたい．

以上で定理の証明の準備がととのった．

<u>定理の証明</u>．条件 $\frac{2}{\delta_2} - 2 > \frac{1}{\delta_1}$ を考慮すれば，命題6中の不等式は命題5中の不等式に矛盾することになる．したがって，命題6中の仮定 "$C_n = b_n \ \forall n \geq {}^\exists n_0$" が否定される．一方，定義より $C_n \geq b_n (\forall n \in \mathbb{N})$ であり，さらに命題5より $b_n \to \infty (n \to \infty)$ である．これらのことから部分列 $\{n_j\} \subset \mathbb{N}$ で次をみたすものがとれる．

$$C_{n_j} > b_{n_j} \geq M_0, \quad b_{n_j} \to \infty \ (j \to \infty).$$

このとき，命題2により $\{C_{n_j}(\delta)\}_{j=1}^{\infty}$ は汎関数 I の critical value

の列で, $c_{\eta_j}(\delta)\to\infty\ (j\to\infty)$ をみたす. したがって, これらの critical value に対応する critical point たちが, 定理にいう方程式(1)の H^1-solution の列となることがわかる. ∎

References

[AR] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349–381.

[BB] A. Bahri and H. Berestycki, Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), 1–32.

[BL] A. Bahri and P. L. Lions, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), 1027–1037.

[Li] E. Lieb, Proc. Sym. Pure Math. 36 (1980), 241–252.

[R] P. H. Rabinowitz, Trans. Amer. Math. Soc. 272 (1982), 753–769.

[St] M. Struwe, Manuscripta Math. 32 (1980), 335–364.

[Su] K. Sugimura, Nonlinear Anal. T. M. A. (to appear).

[T] K. Tanaka, Comm. Partial Diff. Eq. 14 (1989), 99–128.