数理解析研究所講究録
第834巻 1993年 28-41

退化する非線形楕円型境界値問題のHölder連続な弱解について

熊本大教養 池邊 信範 (Nobunori Ikebe)
有明高専 荒木 眞 (Makoto Araki)
西日本工大 水谷 裕 (Yutaka Mizutani)

§1. 序

Ω は R^n の有界な領域で、境界 $\partial\Omega$ は $C_{2,\alpha}$ クラスであるとする。次の様な $u=(u^1,\ldots,u^N)=0$ で退化する非線形楕円型偏微分方程式の系を考える。

(1.1) $$Lu\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}\{a_{ij}(x,u(x))u_{x_j}(x)\}-|u|^{\tau/2}b_j(x,u(x))u_{x_j}(x)$$
$$-b_0(x,u(x)) = 0 \qquad (x,u)\in\Omega\times R^N,$$

(1.2) 境界条件 $u|_{\partial\Omega} = \phi,$

ただし $\tau\geqq0$, 係数 $a_{ij}(x,u)$ $(i,j=1,\ldots,n)$ は

(A_1) $$a_{ij}(x,u)=a_{ji}(x,u),$$
$$C_0|u|^{\tau}|\xi|^2\leqq a_{ij}(x,u)\xi_i\xi_j\leqq C_0^{-1}|u|^{\tau}|\xi|^2 \qquad (x,u)\in\bar{\Omega}\times R^N,$$

を満たす。ただし $C_0>0$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in R^n$. ここで $u(x)=(u^1(x),\ldots,u^N(x))$, $b_0(x,u)=(b_0{}^1(x,u),\ldots,b_0{}^N(x,u))$, $\phi(x)=(\phi^1(x),\ldots,\phi^N(x))\in R^N$, $a_{ij}(x,u)$, $b_j(x,u)\in R$ である。

$u=0$ で楕円性が退化する形の問題の可解性については、Dubinskii [2], Lions [8] 等多くの結果があるが、特にHayasida-Yokoi [5] は境界近くで解のHölder連続性を、Ural'tseva [12] は (1.1) で $b_0(x,u)\equiv0$, $b_j(x,u)\equiv0$ の場合についてHölder連続な弱解の存在を示した。その後、池邊-小原 [6] は低階の項をもつシングルな方程式を考察し(非負な)Hölder連続な弱解の存在を示した。荒木は池邊-小原の結果 [6] を連立な方程式の場合に拡張した。水谷 [9] はシングルな方程式を考察し、(必ずしも非負でない)Hölder連続な弱解の存在を示した。ここでは、系 (1.1), (1.2) につい

て、(必ずしも非負でない)Hölder連続な弱解の存在を示す。

§2. 条件、定義、定理

境界 $\partial\Omega$ は次の条件を満たすものとする、

$$\mathrm{mes}\,(K_\rho \backslash \Omega \cap K_\rho) \geq \theta_0\, \mathrm{mes}\, K_\rho$$

ただし、K_ρ は半径 $\rho(\leq\rho_0)$ 中心を境界 $\partial\Omega$ にもつ開球で ρ_0, $\theta_0>0$ (cf. [7], [12], [5]). さらに、係数 $a_{ij}(x,u)\in C_{1,\alpha}(\Omega\times R^N)\cap C_{0,\alpha}(\bar{\Omega}\times R^N)$, $b_j(x,u)$, $b_0{}^l(x,u)\in C_{0,\alpha}(\bar{\Omega}\times R^N)$, $(0<\alpha<1,\ j=1,\ldots,n,\ l=1,\ldots,N)$

(A_2) $\qquad |b_j(x,u)|,\ |b_0(x,u)|\leq C_1 \qquad (x,u)\in\bar{\Omega}\times R^N$

ただし、$C_1>0$.

(A_3) $\qquad -b_0(x,u)u\leq -C_2|u|^2+C_3 \qquad (x,u)\in\bar{\Omega}\times R^N$

ただし、$C_2>0$, $C_3>0$。

境界値 $\phi(x)$ の成分 $\phi^l(x)\in C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ は次の条件を満たすとする:

(A_4) $\qquad |\phi^l(x)|\leq M' \qquad x\in\partial\Omega$

ただし、$M'>0$ $(l=1,\ldots,N)$.

[定義] 次の条件を満たすベクトル値関数 $u(x)$ を境界値問題 (1.1), (1.2) の弱解という。

(1) $\quad |u|^{\tau/2+1}$, $u^l|u|^{\tau/2}\in W_2{}^1(\Omega)$,

(2) $\quad u|_{\partial\Omega}=\phi$,

(3) $\quad$ 任意の関数 $\zeta^l(x)\in \overset{o}{W}_2{}^1(\Omega)$ $(l=1,\ldots,N)$ について

$$\int_\Omega [\frac{a_{ij}(x,u)}{|u(x)|^{\tau/2}}\{(u^l|u|^{\tau/2})_{x_j}-\frac{\tau}{(\tau+2)}\frac{u^l}{|u|}(|u|^{\tau/2+1})_{x_j}\}\zeta^l{}_{x_i} + b_j(x,u)\{(u^l|u|^{\tau/2})_{x_j}-\frac{\tau}{(\tau+2)}\frac{u^l}{|u|}(|u|^{\tau/2+1})_{x_j}\}\zeta^l + b_0{}^l(x,u)\,\zeta^l]\,dx=0 \tag{2.1}$$

が成立する。

[定理]　上の条件の下で、境界値問題 (1.1), (1.2) の有界でHölder連続な弱解 $u(x)$ が存在する。

この定理を証明するために 問題 (1.1), (1.2) の ε-楕円正規化を行う。
任意の $\varepsilon>0$ にたいして、次の方程式を考える。

(2.2) $$L_\varepsilon u \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\{a^\varepsilon{}_{ij}(x,u(x))u_{x_j}(x)\} - |u(x)|^{\tau/2} b_j(x,u(x))u_{x_j}(x) - b_0(x,u(x)) = 0 \qquad (x,u)\in\Omega\times R^N,$$

(2.3)　境界条件　$u|_{\partial\Omega}=\psi$

ただし、$a^\varepsilon{}_{ij}(x,u)=\varepsilon\delta_{ij}+f_\varepsilon(|u|)a_{ij}(x,u)$ (δ_{ij}:Kronecker's delta),
$f_\varepsilon(t)$ は次のような非減少で2階連続微分可能な関数である:

(2.4) $$f_\varepsilon(t)=\begin{cases}1 & t>(\varepsilon/2)^{1/\tau}\\ 0 & 0\leq t<(\varepsilon/4)^{1/\tau}\end{cases}.$$

係数 $a^\varepsilon{}_{ij}(x,u)$ について、条件 (A_1), (2.4) より次の評価ができる。

(2.5) $$\frac{2C_0}{3}(\varepsilon+|u|^\tau)|\xi|^2 \leq a^\varepsilon{}_{ij}(x,u)\xi_i\xi_j \leq C_0{}^{-1}(\varepsilon+|u|^\tau)|\xi|^2.$$

さて、正規化された問題 (2.2), (2.3) の解 $u_\varepsilon(x)$ について、次の評価が出来る:
解の成分 $u_\varepsilon{}^l\in C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ について

(2.6) $$|u_\varepsilon{}^l(x)| \leq M_1 \qquad x\in\bar{\Omega} \qquad (l=1,\ldots,N),$$

ただし、 $M_1=\max\{\max_{\partial\Omega}|\psi|, (C_3/\min(1,C_2))^{1/2}\}$ (cf. [7] p.421, [11]).

§3.　補助定理

ここでは、解のHölder評価 をするために必要な補助定理を述べる(cf. [6], [7], [12])。ある関数 $\varphi(x)$ に対して $A_{k,\rho}\equiv\{x\in K_\rho\cap\Omega:\varphi(x)>k\}$, $B_{k,\rho}\equiv\{x\in K_\rho\cap\Omega:\varphi(x)<k\}$ また K_ρ は R^n での半径ρ の開球とする。

補助定理 3.1. ([7])　　関数 $\varphi(x)\in W_2{}^1(\Omega)$ は、ある正の数 M,C があって次の条件を満たすとする。

(3.1) $$|\varphi(x)| \leq M$$

(3.2) $$\int_{A_{k,\rho}} |\nabla\varphi|^2 \zeta^2 \, dx \leq C \int_{A_{k,\rho}} \{(\varphi-k)^2 |\nabla\zeta|^2 + \zeta^2\} dx$$

が 任意の開球 $K_\rho \subset \Omega$，任意の $\zeta(x) \in C_0^\infty(K_\rho)$，任意の数 k について成りたつ、

ただし、

(3.3) $$k \geq \max_{K_\rho} \varphi - \delta \operatorname{osc}(\varphi, K_\rho), \quad \delta \in (0,1).$$

さらに

(3.4) $$\operatorname{mes}\{x \in K_{\rho/2} : \varphi(x) \leq \max_{K_\rho} \varphi - \delta \operatorname{osc}(\varphi, K_\rho)\} \geq \gamma \operatorname{mes} K_{\rho/2}, \quad \gamma \in (0,1)$$

が成りたつとする。 このとき、正の数 $s=s(M,C,\delta,\gamma)$ があって、次のいずれかの評価を得る：

(3.5) $$\operatorname{osc}(\varphi, K_{\rho/2}) \leq 2^s \rho$$

または

(3.6) $$\operatorname{osc}(\varphi, K_{\rho/4}) \leq (1-2^{1-s}) \operatorname{osc}(\varphi, K_\rho)$$

ただし、K_ρ，$K_{\rho/2}$，$K_{\rho/4}$ は同心開球。

補助定理 3.1′.（[7]） 関数 $\varphi(x) \in W_2{}^1(\Omega)$ は、ある正の数 M, C があって次の条件を満たすとする。

(3.1)′ $$|\varphi(x)| \leq M$$

(3.2)′ $$\int_{B_{k,\rho}} |\nabla\varphi|^2 \zeta^2 \, dx \leq C \int_{B_{k,\rho}} \{(\varphi-k)^2 |\nabla\zeta|^2 + \zeta^2\} dx$$

が 任意の開球 $K_\rho \subset \Omega$，任意の $\zeta(x) \in C_0^\infty(K_\rho)$，任意の数 k について成りたつ、

ただし、

(3.3)′ $$k \leq \min_{K_\rho} \varphi + \delta \operatorname{osc}(\varphi, K_\rho), \quad \delta \in (0,1).$$

さらに

(3.4)′ $$\operatorname{mes}\{x \in K_{\rho/2} : \varphi(x) \geq \min_{K_\rho} \varphi + \delta \operatorname{osc}(\varphi, K_\rho)\} \geq \gamma \operatorname{mes} K_{\rho/2}, \quad \gamma \in (0,1)$$

が成りたつとする。 このとき、正の数 $s=s(M,C,\delta,\gamma)$ があって、次のいずれかの評価を得る：

(3.5)′ $$\operatorname{osc}(\varphi, K_{\rho/2}) \leq 2^s \rho,$$

(3.6)′ $$\operatorname{osc}(\varphi, K_{\rho/4}) \leq (1-2^{1-s}) \operatorname{osc}(\varphi, K_\rho),$$

ただし、K_ρ，$K_{\rho/2}$，$K_{\rho/4}$ は同心開球。

補助定理 3.2.([12]) 関数 $\varphi(x)\in W_2{}^1(\Omega)$ は、ある正の数 M,C があって次の条件を満たすとする。

(3.7) $$|\varphi(x)|\leq M$$

(3.8) $$\int_{B_{k,\rho}\setminus B_{h,\rho}} |\nabla\varphi|^2\ \zeta^2\ dx \leq C\int_{B_{k,\rho}} \{(\varphi-k)^2|\nabla\zeta|^2+\zeta^2\}dx$$

が 任意の開球 $K_\rho\subset\Omega$, 任意の $\zeta(x)\in C_0^\infty(K_\rho)$, 任意の数 k,h について成りたつ、

ただし、

(3.9) $$h\in[\min_{K_\rho}\varphi+\frac{\mathrm{osc}(\varphi,K_\rho)}{2^s},\ \min_{K_\rho}\varphi+\delta\,\mathrm{osc}(\varphi,K_\rho)],\quad k\in[h,2h-\min_{K_\rho}\varphi],$$

$\delta\in(0,1)$. さらに

(3.10) $$\mathrm{mes}\{x\in K_{\rho/2}:\varphi(x)\geq\min_{K_\rho}\varphi+\delta\,\mathrm{osc}(\varphi,K_\rho)\}\geq\gamma\,\mathrm{mes}\,K_{\rho/2},\quad \gamma\in(0,1).$$

このとき 正の数 $s=s(M,C,\delta,\gamma)$ を次のいずれかの評価が得られるように取る事が出来る:

(3.11) $$\mathrm{osc}(\varphi,K_{\rho/2})\leq 2^s\rho,$$

(3.12) $$\mathrm{osc}(\varphi,K_{\rho/4})\leq(1-2^{1-s})\,\mathrm{osc}(\varphi,K_\rho).$$

補助定理 3.3.([7]) $\Omega_{\rho_0}=K_{\rho_0}\cap\Omega$ 上のベクトル値関数 $U(x)=(U^1(x),\ldots,U^N(x))$ にたいして、N_1個の関数 $W^1(x),\ldots,W^{N_1}(x)$ があって次の条件を満たす関数 $\varphi(x)\in\{W^r(x):r=1,\ldots,N_1\}$ が存在するとする: 任意の球 K_ρ ($\rho\leq\rho_0$, K_{ρ_0} と同心) について

(3.13) $$\mathrm{osc}(\varphi,\Omega_\rho)\geq\delta_1\max_{1\leq l\leq N}\mathrm{osc}(U^l,\Omega_\rho),$$

と、次のいずれかが成りたつ

(3.14) $$\mathrm{osc}(\varphi,\Omega_{\rho/4})\leq c_1\rho^\varepsilon,$$

(3.15) $$\mathrm{osc}(\varphi,\Omega_{\rho/4})\leq\theta\ \mathrm{osc}(\varphi,\Omega_\rho),$$

ただし、δ_1,c_1,ε と $\theta<1$ はある正の数とする。 このとき、 任意の $\rho\leq\rho_0$ について、次の評価を得る: ある正の数α, c があって

(3.16) $$\mathrm{osc}(U^l,\Omega_\rho)\leq c\rho_0{}^{-\alpha}\rho^\alpha\qquad(l=1,\ldots,N)$$

ただし、$\alpha=\alpha(N_1,\varepsilon,\theta)$, $c=(\alpha,N_1,\delta_1,c_1,\rho_0,\varepsilon,\max_{1\leq r\leq N_1}\mathrm{osc}(W^r,\Omega_{\rho_0}))$.

これらの補助定理の証明は [7] の Chapter 2 の Lemma 4.9, 6.1, 6.2, 7.1 を参照。(cf. [12]).

<注意> 補助定理 3.1, 3.1′, 3.2 は 条件 (3.4), (3.4)′, (3.10) の代りに 中心が $\partial\Omega$ 上にある半径 $\rho(\leq\rho_0)$ の開球 K_ρ を取り

$$\max\{\varphi:\partial\Omega\cap K_\rho\}\leq\max\{\varphi:\Omega\cap K_\rho\}-\delta\, osc\,(\varphi:K_\rho\cap\Omega)$$

または、 $\min\{\varphi:\partial\Omega\cap K_\rho\}\geq\min\{\varphi:\Omega\cap K_\rho\}+\delta\, osc\,(\varphi:K_\rho\cap\Omega)$

とおきかえても成りたつ。

§4. 積分不等式

偏微分方程式の系 (2.2) と ベクトル値関数 $\eta=(\eta^1,...,\eta^N)$, $\eta^l(x)\in\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ のスカラー積をとり、領域 Ω で積分して

(4.1) $$\int_\Omega\{a^\varepsilon{}_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i}+|u|^{\tau/2}b_ju_{x_j}\eta+b_0\eta\}dx=0.$$

ここで、特に $\eta=\{\pm5Ne^l+\sum_{r=1}^N(\pm e^r)\}\eta$ または $\eta=\pm e^l\eta$ $(\eta(x)\in\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$ とおけば、次の式を得る:

(4.2) $$\int_\Omega\{a^\varepsilon{}_{ij}w_{x_j}\eta_{x_i}+|u|^{\tau/2}b_jw_{x_j}\eta+B_0\eta\}dx=0,$$

ただし、$w\equiv\pm5Nu^l+\sum_{r=1}^N(\pm u^r)$ (または $\pm u^l$), また $B_0\equiv\pm5Nb_0{}^l+\sum_{r=1}^N(\pm b_0{}^r)$ (または $\pm b_0{}^l$). さて、ここで $\tau\geq1$ のとき、次の予備定理を準備する。

補助定理 4.1. $u(x)$ は 条件 (2.6) を満たす問題 (2.2), (2.3) の解とする。また、$w(x)\equiv\pm5Nu^l+\sum_{r=1}^N(\pm u^r)$ (または $\pm u^l$) とする。このとき、$w(x)$ は次の積分不等式を満たす: 任意の $\zeta(x)\in C_0^\infty(K_\rho)$, 任意の 球 $K_\rho\subset\Omega$ にたいして、

(i) $k\geq0$ のとき

(4.3) $$\min_{A_{k,\rho}}(\varepsilon+|u|^\tau)\int_{w>k}|\nabla w^\tau|^2\zeta^2\ dx$$
$$\leq C_{(1)}\max_{A_{k,\rho}}(\varepsilon+|u|^\tau)\int_{w>k}[(w^\tau-k^\tau)^2|\nabla\zeta|^2+\zeta^2]dx\ ,$$

$$(4.4)\qquad \min_B (\varepsilon+|u|^\tau) \int_B |\nabla w^\tau|^2 \zeta^2\, dx$$
$$\le C_{(2)} \max_{B_{k,\rho}} (\varepsilon+|u|^\tau) \int_{w<k} [(k^\tau-w^\tau)^2 |\nabla\zeta|^2 + \zeta^2]\, dx,$$

ただし、 $A_{k,\rho}=\{x\in K_\rho : w>k\}$, $B_{k,\rho}=\{x\in K_\rho : w<k\}$, $B=B_{k,\rho}$ ($w>0$ のとき)または $B=B_{k,\rho}-B_{h,\rho}$ ($0\le h\le k$ のとき)、 また $C_{(1)}$, $C_{(2)}$ は $\tau, N, M_1, C_0, C_1, C_2, C_3$ に依存する定数。 (ii) $k<0$ のとき $w(x)$ は不等式 (4.4) を $B=B_{k,\rho}$ として満たす。

(注意: 冪乗 w^τ, k^τ は $w|w|^{\tau-1}$, $k|k|^{\tau-1}$ の意味である。また $\tau\ge1$ とする。)

証明. (i) $k\ge0$ のとき、 (4.2) の $\eta(x)$ として

$$\eta(x)=\max\{w^{2\tau-1}-k^{2\tau-1}, 0\}\zeta^2(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

とおく。第2章の条件 (2.5), b_j, $b_0{}^l$ の条件を考慮し、また 不等式: $w^{2\tau-1}-k^{2\tau-1} \le 2w^{\tau-1}(w^\tau-k^\tau)$ (ただし $w>k\ge0$) を用いて

$$\int_{w>k} (\varepsilon+|u|^\tau)\, |\nabla w|^2\, w^{2\tau-2}\ \zeta^2\ dx$$
$$\le C_4 \int_{w>k} [(\varepsilon+|u|^\tau)(w^\tau-k^\tau)^2 |\nabla\zeta|^2 + \{(w^\tau-k^\tau)^2 + w^{\tau-1}(w^\tau-k^\tau)\}\zeta^2]\, dx$$

を得る。ここで、$w(x)$ が有界で $|w|\le 6N|u|$ であることを考慮すると (4.3) を得る。

また、
$$\eta(x)=k^{2\tau-2}\max\{k-w, 0\}\zeta^2(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

とおいて、第2章の条件 (2.5), b_j, $b_0{}^l$ の条件を考慮し、また 不等式 $k^{\tau-1}(k-w) \le 2(k^\tau-w^\tau)$ (ただし $w<k$, $k\ge0$) を用いれば

$$\int_{w<k} (\varepsilon+|u|^\tau)\, (k^{\tau-1}\ |\nabla w|)^2\, \zeta^2\, dx$$
$$\le C_5 \int_{w<k} [(\varepsilon+|u|^\tau)(k^\tau-w^\tau)^2 |\nabla\zeta|^2 + k^{2\tau-2}\{(k-w)^2+(k-w)\}\zeta^2]\, dx.$$

これより $B=B_{k,\rho}$ ($w>0$ のとき) または $B=B_{k,\rho}-B_{h,\rho}$ ($0\le h\le k$ のとき) について (4.4) を得る。

(ii) $k<0$ のときは、(4.2) の $\eta(x)$ として

$$\eta(x)=\max\{k^{2\tau-1}-w^{2\tau-1}, 0\}\zeta^2(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

(ただし $k^{2\tau-1}=k|k|^{2\tau-2}$, $w^{2\tau-1}=w|w|^{2\tau-2}$) とおけば、(4.4) が $B=B_{k,\rho}$ にたいして成りたつ。 途中 $|k^{2\tau-1}-w^{2\tau-1}| \le 2|w|^{\tau-1}|k^\tau-w^\tau|$ ($w\le k\le0$) を用いる。

§5. Hölder 評価

補助定理 5.1.　$u(x)$ を 問題 (2.2), (2.3) の解で、条件 (2.6) を満たすものとする。このとき、ε に依存しないある正の数 C_6, $\beta\in(0,\alpha)$ があって

$$|u|_{\beta,\bar{\Omega}} \le C_6 \tag{5.1}$$

が成りたつ。$|\cdot|_{\beta,\bar{\Omega}}$ は Hölderノルム。

補助定理 5.1 は 補助定理 3.3 と 次の補助定理を用いて直ちに得られる。

補助定理 5.2.　補助定理 5.1 の仮定の解 $u(x)$ の成分 $u^l(x)$ について、次の関数を考える:

$$(\pm u^l)^\tau, \quad \{\pm 5Nu^l+\sum_{r=1}^{N}(\pm u^r)\}^\tau \qquad (l=1,\ldots,N) \tag{5.2}$$

ただし、$\tau\ge 1$ で、$(*)^\tau=*|*|^{\tau-1}$ を意味する。　このとき、関数 (5.2) の中に補助定理 3.3 の仮定を満たす関数 $\varphi(x)$ が存在する。

証明.　任意に一つの開球 $K_\rho\subset\Omega$ を固定する。関数 $\pm u^l$ のうち K_ρ で値域の半分以上が正の値と成るものを取る。これを、一般性を失うことなく、改めて u^l とかき、$U^l(x)\equiv(u^l)^\tau$, $W^l(x)\equiv(5Nu^l+\sum_{r=1}^{N}u^r)^\tau$ $(l=1,\ldots,N)$ とおく。このとき、$\bar{\omega}^l=\mathrm{osc}(U^l,K_\rho)$, $\bar{m}^l=\min\{\min_{K_\rho} U^l, 0\}$ とおけば、

$$\bar{m}^l+\frac{\bar{\omega}^l}{2}\ge 0 \tag{5.3}$$

が成りたつ。また、同様な関係式が $W^l(x)$ についても成りたつ。　次の分類をする:
ただし、番号 l_0 は $\bar{\omega}^{l_0}=\max_{1\le l\le N}\bar{\omega}^l$ となるもの、正の数 q は十分大きい数で 証明の途中で決定されるものである。

(5.1a)　Case I.　$|\bar{m}^l| \le \dfrac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^q}$ (すべての $l=1,\ldots,N$ について),

$$\text{さらに}\begin{cases}(\mathrm{i}) & |\min_{K_\rho} U^{l_0}| \leq \dfrac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^q} \\ (\mathrm{ii}) & \min_{K_\rho} U^{l_0} > \dfrac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^q}\end{cases}.$$

(5.1b) Case II. $\bar{m}^l < -\dfrac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^q}$ （ある l について）.

Case I(i) の場合は $\varphi(x)=(5Nu^{l_0}+\sum_{r=1}^{N}u^r)^\tau$ が、Case I(ii) の場合は $\varphi(x)=(u^{l_0})^\tau$ が、Case II の場合は (5.1b) の成りたつ $\varphi(x)=(u^l)^\tau$ が補助定理5.2 の主張を満たすことを示す。

始めに、Case I(i) の場合を考える。$w(x)=5Nu^{l_0}+\sum_{r=1}^{N}u^r$, $W(x)=(w)^\tau$, $\underline{\omega}=\mathrm{osc}(w,K_\rho)$, $\bar{\omega}=\mathrm{osc}(W,K_\rho)$, $\underline{m}^l=\min\{\min_{K_\rho} u^l,0\}$, $\underline{\omega}^l=\mathrm{osc}(u^l,K_\rho)$ また $q>\tau$ とする。$\underline{\omega}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}^{l_0}$, $\underline{m}^l$, $\underline{\omega}^l$, $|\boldsymbol{u}|$, $w(x)$ について、次の関係が成りたつ：

(1) $|\underline{m}^l| \leq (\dfrac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^q})^{1/\tau}$ (2) $(\bar{\omega}^{l_0})^{1/\tau} \leq 2\underline{\omega}^{l_0}$

(3) $\underline{\omega}^l \leq 2(\bar{\omega}^{l_0})^{1/\tau}$ (4) $\underline{\omega}^l \leq 4\underline{\omega}^{l_0}$

(5) $N\underline{\omega}^{l_0} \leq \underline{\omega}$ (6) $\underline{\omega} \leq 2(\bar{\omega})^{1/\tau}$

(7) $|w(x)| \leq 5N|u^{l_0}|+\sum_{r=1}^{N}|u^r| \leq 6N|\boldsymbol{u}|$.

(1), (2), (5) より、

$$(8)\quad |\boldsymbol{u}| \leq \sum_{r=1}^{N}|u^r| \leq \sum_{r=1}^{N}(u^r-\underline{m}^r)+\sum_{r=1}^{N}|\underline{m}^r|+5N(u^{l_0}-\underline{m}^{l_0})$$
$$\leq w(x) + (\frac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^q})^{1/\tau}\cdot 7N \leq w(x) + (\frac{1}{2^q})^{1/\tau}\cdot 14\underline{\omega}.$$

(2), (5), (6) より、

$$(5.4)\qquad \bar{\omega} \geq (N/4)^\tau\, \bar{\omega}^{l_0}$$

つまり、補助定理 3.3 の仮定 (3.13) が $\delta_1=(N/4)^\tau$ として成りたっている。

$k \geq k^0 \equiv \max_{K_\rho} W - \dfrac{\bar{\omega}}{4} = \min_{K_\rho} W + \dfrac{3\bar{\omega}}{4}$ また $A_{k,\rho} \equiv \{x\in K_\rho : W(x)>k\}$ とする。

(8) より、

$$(5.5)\qquad \max_{A_{k,\rho}} |\boldsymbol{u}| \leq \max_{K_\rho} w + 14\cdot(\frac{1}{2^q})^{1/\tau}\underline{\omega} \leq \min_{K_\rho} w + 8\underline{\omega} \quad (q>\tau).$$

(9)　　$W>k>k^0$ のとき $k^{1/\tau}>\min_{K_\rho} w(x)+\dfrac{3\omega}{4}$ が成りたつ。(注$\tau\geq 1$)

(7), (9) より

(5.6)　　$$\min_{A_{k,\rho}} |u| \geq \frac{1}{6N} \min_{A_{k,\rho}} w \geq \frac{k^{1/\tau}}{6N} \geq \frac{1}{6N} \left(\min_{K_\rho} w + \frac{3\underline{\omega}}{4}\right) \geq \frac{\underline{\omega}}{24N}.$$

よって、(5.5), (5.6) より、

(5.7)　　$$\max_{A_{k,\rho}} |u| \leq 192N \min_{A_{k,\rho}} |u| \ .$$

(5.7) を 不等式 (4.3) に用いて、$\varphi=W(x)$ にたいして 補助定理 3.1 の (3.2) が $C=(192N)^\tau C_{(1)}$ として $k\geq k^0\equiv\max_{K_\rho} W-\bar{\omega}/4$ のとき成りたつ。

$s+1\leq q$, $\dfrac{\bar{\omega}}{2^{s+1}} \leq h \leq k \leq 3h$ また $B_{k,\rho}=\{x\in K_\rho : W<k\}$ とする。

(8), (6) より

(5.8)　　$$\max_{B_{k,\rho}} |u| \leq \max_{B_{k,\rho}} w + 14\left(\frac{1}{2^q}\right)^{1/\tau}\underline{\omega} \leq k^{1/\tau} + 14\left(\frac{1}{2^q}\right)^{1/\tau}\underline{\omega}$$
$$\leq k^{1/\tau}+14\left(\frac{1}{2^q}\right)^{1/\tau} 2(\bar{\omega})^{1/\tau} \leq 29k^{1/\tau} \qquad (q\geq s+1).$$

(7) より

(5.9)　　$$\min_{B_{k,\rho}\setminus B_{h,\rho}} |u| \geq \frac{1}{6N} \min_{B_{k,\rho}\setminus B_{h,\rho}} w \geq \frac{1}{6N}\cdot h^{1/\tau} \geq \frac{1}{18N} k^{1/\tau} \qquad (\tau\geq 1).$$

よって、(5.8), (5.9) より

(5.10)　　$$\max_{B_{k,\rho}} |u| \leq 522N \min_{B'_{k,\rho}\setminus B_{h,\rho}} |u|.$$

(5.10) を 不等式 (4.4) に用いて、$\varphi=W(x)$ について 補助定理 3.2 の (3.8) が $C=(522N)^\tau C_{(2)}$ として、$h\geq\bar{\omega}/2^{s+1}$, $k\in[h,3h]$ のとき成りたつ。

ところで、次のいずれかが成りたつ。

(a)　　$\mathrm{mes}\{x\in K_{\rho/2} : W(x)\leq k^0\} \geq \frac{1}{2}\,\mathrm{mes}\, K_{\rho/2}$,

(b)　　$\mathrm{mes}\{x\in K_{\rho/2} : W(x)\geq k^0\} \geq \frac{1}{2}\,\mathrm{mes}\, K_{\rho/2}$.

(a) が成りたつ場合は $\varphi=W(x)$ について 補助定理 3.1 の仮定 (3.3), (3.4) が $k^0\equiv\max_{K_\rho} W-\bar{\omega}/4$, $\delta=1/4$, $\gamma=1/2$ として満たされる。(b) が成りたつ場合は $\varphi=W(x)$ について 補助定理 3.2 の仮定 (3.9), (3.10) が $\delta=3/4$, $\gamma=1/2$ として満たされる。したがって、$\varphi=W(x)$ について 補助定理 3.1 と 補助定理 3.2 が 補助定理 3.3 の仮定 (3.14) または (3.15) を保証する。

次に、Case Ⅰ(ii) の場合を $\varphi=U^{l_0}(x)$ について考察する。このとき、補助定理 3.3 の仮定 (3.13) が $\delta_1=1$ として満たされている。$U=(U^1(x),...,U^N(x))$, $A_{k,\rho}=\{x\in K_\rho : U^{l_0}>k\}$, $B_{k,\rho}=\{x\in K_\rho : U^{l_0}<k\}$ とする。次の評価が成りたつ。

$$\max_{K_\rho}|U| \leqq \min_{K_\rho}|U| + N\bar{\omega}^{l_0}. \tag{5.11}$$

$k\geqq k'^0\equiv \max_{K_\rho} U^{l_0} - \dfrac{\bar{\omega}^{l_0}}{4} = \min_{K_\rho} U^{l_0} + \dfrac{3}{4}\bar{\omega}^{l_0}>0$ のとき、

$$\begin{aligned}\min_{A_{k,\rho}}|U| &\geqq \frac{1}{2}\left(\min_{A_{k,\rho}}|U| + \min_{A_{k,\rho}}|U^{l_0}|\right)\\ &\geqq \frac{1}{2}\left(\min_{K_\rho}|U| + \frac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^q}\right).\end{aligned} \tag{5.12}$$

よって、(5.11),(5.12) より

$$\max_{A_{k,\rho}}|U|\leqq 2^{q+1}N\min_{A_{k,\rho}}|U| \quad \text{または} \quad \max_{A_{k,\rho}}|u|^{\tau}\leqq 2^{q+1}N^{2+\tau/2}\min_{A_{k,\rho}}|u|^{\tau}. \tag{5.13}$$

$k\leqq k'_0\equiv \min_{K_\rho} U^{l_0} + \dfrac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^{q+1}}$ のとき、

$$\min_{B_{k,\rho}}|U| \geqq \frac{1}{2}\left(\min_{B_{k,\rho}}|U| + \min_{B_{k,\rho}}|U^{l_0}|\right) \geqq \frac{1}{2}\left(\min_{K_\rho}|U| + \frac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^q}\right). \tag{5.14}$$

よって、(5.11),(5.14) より

$$\max_{B_{k,\rho}}|U|\leqq 2^{q+1}N\min_{B_{k,\rho}}|U| \quad \text{または} \quad \max_{B_{k,\rho}}|u|^{\tau}\leqq 2^{q+1}N^{2+\tau/2}\min_{B_{k,\rho}}|u|^{\tau}. \tag{5.15}$$

(5.13) (または (5.15)) を不等式 (4.4) に用いると、$\varphi=U^{l_0}(x)$ にたいして補助定理 3.1 の (3.2) (または 補助定理 3.1′ の (3.2)′) が $C=2^{p+1}N^{2+\tau/2}\max\{C_{(1)}, C_{(2)}\}$ として $k\geqq k'^0\equiv\max_{K_\rho} U^{l_0} - \bar{\omega}^{l_0}/4$ (または $k\leqq k'_0\equiv \min_{K_\rho} U^{l_0} + \bar{\omega}^{l_0}/2^{q+1}$) のとき成りたつ。 さらに、次のいずれかが成りたつ。

(a') $\quad \mathrm{mes}\{x\in K_{\rho/2} : U^{l_0}(x)\leqq k'^0\} \geqq \dfrac{1}{2}\mathrm{mes}\, K_{\rho/2}$,

(b') $\quad \mathrm{mes}\{x\in K_{\rho/2} : U^{l_0}(x)\geqq k'_0\} \geqq \dfrac{1}{2}\mathrm{mes}\, K_{\rho/2}$.

よって、$\varphi=U^{l_0}(x)$ について、補助定理 3.1 が $\delta=1/4, \gamma=1/2$ として、または補助定理 3.1′ が $\delta=1/2^{q+1}$, $\gamma=1/2$ として成りたつ。したがって、補助定理 3.1 または 補助定理 3.1′ が 補助定理 3.3 の (3.14) または (3.15) を保証する。

最後に、Case Ⅱ の場合を (5.1b) が成りたつ $\varphi=U^l(x)$ について考察する。この場合 (5.3) と (5.1b) より、つぎの評価を得る。

(5.16) $$\bar{\omega}^{l} \geq \frac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^{q-1}}.$$

つまり、補助定理 3.3 の (5.13) が $\delta_1=2^{-q+1}$ として成りたっている。$\varphi=U^l(x)$ について 補助定理 3.3 の (3.14) または (3.15) が 成りたつことが Case I (ii) の場合と同様に示される。 これで、補助定理 5.2 の証明が終る。

補助定理 3.3 を適用して $U^l(x)$ $(l=1,...,N)$ の内部評価を得る。また、第3章の<注意>を考慮すると $U^l(x)$ の境界の近傍での評価を得る。つまり、$\beta\in(0,1)$ があって

(5.17) $$|U^l|_{\beta\tau,\bar{\Omega}} \leq C_7 \quad \text{または} \quad |u^l|_{\beta,\bar{\Omega}} \leq C_8,$$

ただし C_7, C_8 は ε に無関係なある正の数。 これで、補助定理 5.1 が $\tau\geqq 1$ のとき証明された。($0\leqq\tau<1$ のときは $\eta(x)=\max\{w(x)-k,0\}\zeta^2(x)$ または $\eta(x)=\max\{k-w(x),0\}\zeta^2(x)$ とおけば、上と同様に評価 (5.17) を得る。)

§6. 定理の証明

$u_\varepsilon{}^l(x)\in C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ は条件 (2.6) を満たす問題 (2.2), (2.3) の解とする。

(5.1) より、

(6.1) $$|u_\varepsilon{}^l|_{\beta,\bar{\Omega}} \leq C_6 \qquad (l=1,...,N)$$

ただし、C_6 は ε に無関係な正の数。 $u_\varepsilon{}^l-\varphi^l\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ であるから、

$$\int_\Omega [a^\varepsilon{}_{ij}(x,u_\varepsilon)u_\varepsilon{}^l{}_{x_j}(u_\varepsilon{}^l{}_{x_i}-\varphi^l{}_{x_i})+\{b_j(x,u_\varepsilon)|u_\varepsilon|^{\tau/2}\, u_\varepsilon{}^l{}_{x_j} +b_0{}^l(x,u_\varepsilon)\}(u_\varepsilon{}^l-\varphi^l)]\,dx=0.$$

条件 (A_1), (A_2) より

(6.2) $$\int_\Omega(\varepsilon+|u_\varepsilon|^\tau)\sum_{l=1}^{N}|\nabla u_\varepsilon{}^l|^2\,dx \leq C_9,$$

ただし、C_9 は ε に無関係な正の数。

次の関数を考える:

(6.3) $$V_\varepsilon(x)\equiv|u_\varepsilon|^{\tau/2+1}, \quad V_\varepsilon{}^l(x)\equiv u_\varepsilon{}^l|u_\varepsilon|^{\tau/2} \qquad (l=1,...,N).$$

これについて、(6.2) より、次の評価を得る:

(6.4) $$\int_\Omega\{|V_{\varepsilon x_j}|^2+\sum_{l=1}^{N}|V_\varepsilon{}^l{}_{x_j}|^2\}dx \leq C_{10} \qquad (j=1,..,n)$$

ただし、C_{10} は ε に無関係な正の数。 評価 (6.1), (6.4) より $\{u_\varepsilon{}^l\}$ の部分列 $\{u_{\varepsilon_p}{}^l\}$ があって、

(6.5) $$u_{\varepsilon_p}{}^l \longrightarrow u^l \quad \text{in } C_{0,\beta}(\bar{\Omega}) \quad (l=1,\ldots,N),$$

(6.6) $$(V_{\varepsilon_p})_{x_j} \longrightarrow V_{x_j} \quad \text{weakly in } L_2(\Omega),$$

(6.7) $$(V_{\varepsilon_p}{}^l)_{x_j} \longrightarrow V^l{}_{x_j} \quad \text{weakly in } L_2(\Omega),$$

が成りたつ、ただし、$u^l(x) \in C_{0,\beta}(\bar{\Omega})$ また $V(x), V^l(x) \in W_2{}^1(\Omega)$. したがって、関数 $u^l(x) \in C_{0,\beta}(\bar{\Omega})$ は弱解の定義式 (2.1) を満たす。ただし、$(u^l|u|^{\tau/2})_{x_j}$, $(|u|^{\tau/2+1})_{x_j}$ は、それぞれ $V^l{}_{x_j}(x)$, $V_{x_j}(x)$ と解釈する。 これで 定理の証明を終る。

参考文献

[1] Araki, M.; On the Hölder continuous non-negative weak solutions of the Dirichlet problem for a degenerate quasi-linear elliptic system, (to appear in Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Math.).

[2] Dubinskii, Ju. A.; Some integral inequalities and the solvability of degenerate quasilinear elliptic systems of differential equations, Mat. Sb., 64(106):3 (1964), 458-480

[3] Gilberg, D. and Trudinger, N. S.; Elliptic partial differential equations of second order, 2nd ed, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983.

[4] Furusho, Y.; Existence of positive entire solutions for weakly coulped semilinear elliptic systems, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 120A (1992), 79-91.

[5] Hayasida, K. and Yokoi, Y.; On the Hölder continuity at the boundary of weak solutions of the Dirichlet problem

for degenerate quasilinear elliptic equations, Math. Japonica, 31, No 4 (1986), 561-606.

[6] Ikebe, N. and Ohara, Y.; On the non-negative weak solutions of the Dirichlet problem for degenerate quasi-linear elliptic equations, Funkcial. Ekvac., **24** (1981), 103-111.

[7] Ladyzhenskaya, O. A. and Ural'tseva, N. N.; Linear and quasi-linear differential equations of elliptic type, (translation in English), Academic Press, New York, 1968.

[8] Lions, J. L.; Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod gauthier Vallars, 1969.

[9] Mizutani, Y.; On the Hölder continuous solutions of the Dirichlet problem for degenerate quasi-linear elliptic equations, (to appear in Funkcial. Ekvac.).

[10] Ohara, Y. and Ikebe, N.; On the Hölder continuity of the solutions for degenerate elliptic equations, Funkcial. Ekvac., **26** (1983), 339-347.

[11] Serrin, J.; The problem of Dirichlet for quasilinear differential equations with many independent variables, Philos. Trans. Roy. Soc. London, **A264** (1969), 413-496.

[12] Ural'tseva, N. N.; Degenerate quasilinear elliptic systems, Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov, **7** (1968), 184-222.