数理解析研究所講究録
835巻 1993年 133-143

Hahn Banachの定理と不動点定理

東工大 理 高橋 渉(Wataru Takahashi)

ここでは最適化の数理と関連するいくつかの定理をHahn Banachの定理及び不動点定理の観点から種々議論したい.

$$X = \{x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^\infty : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ は収束する}\}$$

とする. このとき, Xはl^∞の線形部分空間であるが, Xの元$x = (x_1, x_2, \cdots)$に対して

$$\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

と定義すると, λはX上の線形有界汎関数になる. このλをHahn Banachの定理によってl^∞上に拡張すると, よく知られたBanach limit μとなる. すなわち,

$$\|\mu\| = 1 = \mu(e), \quad \mu_n(x_n) = \mu_n(x_{n+1})$$

を満たすl^∞上の線形有界汎関数となる. このBanach limitを用いて, この報告ではまず最適化理論で重要なEkelandの定理やCaristiの不動点定理, 最小値定理等がすべて"同値"であることを証明する. Banach limitはKakutani-Markovの不動点定理を用いると, 可換な半群(例えば$R^+ = [0, \infty)$)上の

invariant mean にまで拡張でき，最小化問題の解の究明に役立つが，一方これと Fan の system 定理（Brouwer の不動点定理から証明可能）を用いて，Hahn Banach の定理の拡張定理である Mazur-Orlicz の定理を証明することができる．この定理より König の定理が得られ，さらにこれから最小ノルム問題に関する命題が得られる．この報告の最後には，Banach 空間 E に一様凸であるとか，E^*（E の dual 空間）に一様凸であるとかの条件をつけることによって，複数の点からの最小ノルム問題を研究する．

1．完備距離空間におけるいくつかの定理

完備距離空間上の最小値定理，Caristi の不動点定理，さらに Ekeland の ε 変分不等式とはつぎのようなものである．

定理 1（最小値定理）　X を完備距離空間とし，f を X から $(-\infty, \infty]$ への下半連続で，proper，下に有界な関数とする．このとき，$\inf_{x \in X} f(x) < f(u)$ となる $u \in X$ に対して，$u \neq v$ かつ $f(v) + d(u, v) \leq f(u)$ となる元 $v \in X$ が存在するなら

$$f(x_0) = \inf_{x \in X} f(x)$$

となる $x_0 \in X$ が存在する．

定理 2（Caristi の不動点定理）　X を完備距離空間とし，f を X から $\mathbb{R}$ への下半連続で，下に有界な関数とする．また T を X から X へのつぎの条件を満たす写像とする．

$$d(x, Tx) \leq f(x) - f(Tx) \quad (^{\forall} x \in X)$$

このとき，$Tx_0 = x_0$ となる点 $x_0 \in X$ が存在する．

定理3（Ekelandの ε 変分不等式）　X を完備距離空間とし，f を X から $(-\infty, \infty]$ への下半連続で，proper，下に有界な関数とする．$\varepsilon > 0$ と $u \in X$ を

$$f(u) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon$$

となるものとする．このとき，つぎの (1)～(3) を満たす $v \in X$ が存在する．(1) $f(v) \leq f(u)$；(2) $d(u, v) \leq 1$；(3) v と異なるすべての $w \in X$ に対して，$f(w) > f(v) - \varepsilon d(v, w)$ である．

定理1の証明が比較的簡単で，それを用いて，定理2，定理3が簡単に証明できる [10]．さらに定理1より次の定理が証明できる．

定理4　X を完備距離空間とし，$\{x_n\}$ を X の有界な点列とする．μ を $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ 上の mean とし，$\inf_{x \in X} \mu_n d(x_n, x) = 0$ とする．このとき，$\mu_n d(x_n, x_0) = 0$ となる $x_0 \in X$ が存在する．

証明　$\{x_n\}$ を X の有界点列とし，μ を $\mathbb{N}$ 上の mean とする．このとき，任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, y) + d(y, x)$$

であることより，$\mu_n d(x_n, x) \leq \mu_n d(x_n, y) + d(y, x)$ となる．同様にして，$\mu_n d(x_n, y) \leq \mu_n d(x_n, x) + d(x, y)$ であるので

$$|\mu_n d(x_n, x) - \mu_n d(x_n, y)| \leq d(x, y)$$

を得る．ここで，$g(x)=\mu_n d(x_n, x)$ $(\forall x \in X)$ とおくと，$g(x)$ は X 上の連続関数である．いま結論を否定し，任意の $u \in X$ に対して，$\mu_n d(x_n, u)>0$ とする．$a=\mu_n d(x_n, u)$ とすると，仮定より $\inf_{x \in X} \mu_n d(x_n, x)=0$ であるから $\mu_n d(x_n, v)<\frac{a}{3}$ となる $v \in X$ が存在する．$d(u, v) \leq d(u, x_n)+d(x_n, v)$ なので

$$d(u, v) \leq \mu_n d(x_n, u)+\mu_n d(x_n, v)<a+a=2a$$

となり

$$\begin{aligned} 3g(v)+d(u, v) &= 3\mu_n d(x_n, v)+d(u, v) \\ &< a+2a=3\mu_n d(x_n, u)=3g(u) \end{aligned}$$

と得る．ここで最小値定理を用いて，$\mu_n d(x_n, x_0)=0$ となる $x_0 \in X$ を得る．

定理4，定理1，2，3を関連づけるために，l^∞ 上の Banach limit を次の形に変形しておく．

性質　μ を l^∞ 上の Banach limit とする．このとき，$x=(x_1, x_2, \cdots) \in l^\infty$ に対して

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leq \mu_n(x_n) \leq \varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

である．特に，$x_n \to a$ ならば $\mu_n(x_n)=a$ である．

これを用いて，次の命題を証明することができる．

定理5　X を距離空間とする．このとき，次の (1)，(2) は同値である．

(1)　X は完備である；

(2) X の有界点列 $\{x_n\}$ と $\mathbb{N}$ 上の mean μ に対して，

$\inf_{x\in X}\mu_n d(x_n, x)=0$ が成り立つならば $\mu_n d(x_n, x_0)=0$

となる $x_0\in X$ が存在する．

証明 最小値定理を用いて，(1) ⇒ (2) はすでに証明ずみである．(2) ⇒ (1) を証明しよう．$\{x_n\}$ を X の Cauchy 点列とする．任意の $x\in X$ に対して，$m, n\to\infty$ ならば

$$|\,d(x_m, x)-d(x_n, x)\,|\leq d(x_m, x_n)\to 0$$

であるので，$\phi(x)=\lim_{n\to\infty} d(x_n, x)$ が存在する．また，$\inf_{x\in X}\phi(x)=0$ である．いま μ を l^∞ 上の Banach limit とすると

$$\inf_{x\in X}\mu_n d(x_n, x)=\inf_{x\in X}\phi(x)=0$$

であるので，(2) の仮定より，$\phi(x_0)=\mu_n d(x_n, x_0)=0$ となる $x_0\in X$ が存在する．すなわち，$x_n\to x_0$ となる $x_0\in X$ の存在がわかる．

2. 最小ノルム問題

Kakutani-Markov の不動点定理と Fan の system 定理を使うと Hahn Banach 定理の拡張定理である Mazur-Orlicz の定理を証明することができる．

定理 6（Mazur-Orlicz の定理） p を線形空間 E の sublinear な関数とする．$\{x_\nu : \nu\in I\}$ を E の元からなる族とし，$\{\alpha_\nu ; \nu\in I\}$ をそれに対応する実数の族とする．このとき，

$$f(x)\leq p(x)\ \ (^\forall x\in E),\quad \alpha_\nu\leq f(x_\nu)\ \ (^\forall \nu\in I)$$

となる $f \in E'$ が存在することと，次の条件は同値である．

任意の $n \in \mathbb{N}$ と，$\delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n) \in T_n$，$\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n \in I$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \alpha_{\nu_i} \leq p\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i x_{\nu_i}\right)$$

がつねに成り立つ．ただし，$T_n = \{\delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n) : \delta$ は dyadic, $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1\}$ である．

この定理より，König の定理を証明することができる．

p を線形空間 E の sublinear な関数であるとし，T を E の部分集合とする．任意の $u, v \in T$ に対して，$p(x - \frac{u+v}{2}) \leq 0$ となるような $x \in T$ がつねにとれるとき，T は p-midconvex であるといわれる．

定理7（König の定理）　E を線形空間とする．p を E 上の sublinear な関数とし，T を E の p-midconvex 集合とする．このとき，

$$\inf_{x \in T} p(x) = \max_{f \leq p} \inf_{x \in T} f(x)$$

がつねに成立する．

E を Banach 空間とする．このとき，$x \in E$ に対して，E^* の部分集合 $J(x) = \{f \in E^* : (x, f) = \|x\|^2 = \|f\|^2\}$ を対応させる写像 J を E から E^* への duality mapping と呼ぶ．$J(x) \neq \phi$ であることは Hahn Banach の定理を使って証明できる．König の定理から次の最小ノルム問題に関する命題を得ることができる．

定理8　KをBanach空間Eの凸集合とし，$x\in E$, $x_0\in K$とする．このとき，

$$\|x-x_0\|=\min\{\|x-y\| : y\in K\}$$

であるための必要十分条件は，$(y-x_0, j)\geq 0\ (\forall y\in K)$となるような$j\in J(x_0-x)$が存在することである．

最後に，一様凸Banach空間上で，複数の点からの最小ノルム問題を考える．定理8と関連した命題としては次の定理がある[5]．

定理9（Lau-Takahashiの定理）　KをBanach空間Eの凸集合とし，$\{x_n\}$をEの有界な点列とする．E^*を一様凸なBanach空間とするとき，$\mathbb{N}$上のmean μと$x_0\in K$に対して

$$\mu_n\|x_n-x_0\|^2=\min_{y\in K}\mu_n\|x_n-y\|^2 \qquad \cdots (*)$$

であるための必要十分条件は

$$\mu_n\left(z-x_0, J(x_n-x_0)\right)\leq 0 \quad (\forall z\in K)$$

が成立することである．

上の定理で，E^*は一様凸であるから，EからE^*へのduality mapping Jは一価の写像となっている．

(*)式を満たす$x_0\in K$の存在と一意性に関する命題を証明するにあたっては次の補助定理が大切である（[11]，[12]）．

補助定理　$p>1$，$b>0$とする．このとき，Banach空間Eが一様凸となるための必要十分条件は，$g(0)=0$，

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^p \le \lambda\|x\|^p+(1-\lambda)\|y\|^p - W_p(\lambda)g(\|x-y\|),$$
$$\forall x, y \in B_b,\ 0 \le \lambda \le 1$$

を満たす関数 $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ で，連続かつ，狭義に増加，凸であるものが存在することである．ここで，W_p は

$$W_p(\lambda)=\lambda(1-\lambda)^p+\lambda^p(1-\lambda)$$

であり，B_b は中心が 0，半径 b の閉球である．

定理10　E を一様凸な Banach 空間とし，K を E の閉凸集合とする．μ を $\mathbb{N}$ 上の submean とし，$\{x_n\}$ を E の有界な点列とする．このとき，

$$\mu_n\|x_n-x_0\|^2=\min_{z\in K}\mu_n\|x_n-z\|^2$$

となる $x_0\in K$ が一意に存在する．

証明　まず K 上の関数

$$r(z)=\mu_n\|x_n-z\|^2 \quad (\forall z\in K)$$

が連続で凸となることを示す．$z_m\to z$ とする．このとき，$M=\sup\{\|x_n-z_m\|+\|x_n-z\| : n=1,2,3,\cdots,\ m=1,2,3,\cdots\}$ に対し，

$$\begin{aligned}\|x_n-z_m\|^2-\|x_n-z\|^2 &= (\|x_n-z_m\|+\|x_n-z\|)(\|x_n-z_m\|-\|x_n-z\|)\\ &\le M\,\big|\|x_n-z_m\|-\|x_n-z\|\big|\\ &\le M\|z_m-z\| \quad (m=1,2,3,\cdots)\end{aligned}$$

であるので

$$\mu_n\|x_n-z_m\|^2 \le \mu_n\|x_n-z\|^2+M\|z_m-z\|$$

を得る．同様に

$$\mu_n\|x_n-z\|^2 \le \mu_n\|x_n-z_m\|^2+M\|z_m-z\|$$

である．そこで，$|r(z_m)-r(z)|\le M\|z_m-z\|$ を得る．これは，$r(\cdot)$ が K 上で連続であることを意味する．α, β を $\alpha+\beta=1$ を満たす非負な数とする．このとき，$x, y\in K$ に対して

$$\|x_n-(\alpha x+\beta y)\|^2 \le \alpha\|x_n-x\|^2+\beta\|x_n-y\|^2$$

であるので $r(\alpha x+\beta y)\le \alpha r(x)+\beta r(y)$ である．これは $r(\cdot)$ が凸であることを意味する．つぎに $\|z_m\|\to\infty$ ならば $r(z_m)\to\infty$ となることを示す．実際，

$$\|z_m\|^2 \le 2\|z_m-x_n\|^2+2\|x_n\|^2$$

なので，$\|z_m\|^2\le 2r(z_m)+2M'$ （ただし，$M'=\sup\{\|x_n\|^2\}$）となり，$\|z_m\|\to\infty$ なら $r(z_m)\to\infty$ を得る．ここで [1, p.79] を使うと，$r(x_0)=\min_{z\in K} r(z)$ となる $x_0\in K$ の存在がわかる．

$$X=\{x_0\in K : r(x_0)=\min_{z\in K} r(z)\}$$

とする．このとき，X は空でない閉凸集合となる．また X は有界でもある．いま $\{x_n : n=1,2,\cdots\}\cup X\subset B_a$ となるように $a>0$ をとり，$b=2a$ とする．このとき，$x_n-z_1, x_n-z_2\in B_b$ $(n=1,2,3,\cdots, z_1, z_2\in X)$ なので，補助定理を使うと

$$\|x_n-\tfrac{1}{2}(z_1+z_2)\|^2\le \tfrac{1}{2}\|x_n-z_1\|^2+\tfrac{1}{2}\|x_n-z_2\|^2-\tfrac{1}{4}g(\|z_1-z_2\|)$$

を得る．いま $z_1\ne z_2$ とすると

$$r\left(\tfrac{1}{2}(z_1+z_2)\right)\le \tfrac{1}{2}r(z_1)+\tfrac{1}{2}r(z_2)-\tfrac{1}{4}g(\|z_1-z_2\|)<r$$

を得，これは矛盾である．よって証明は完了した．

References

[1] V. Barbu and Th. Precupanu, Convexity and Optimization in Banach spaces, Editura Academiei R.S.R., Bucuresti, 1978.

[2] J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amer. Math. Soc., 215 (1976), 241–251.

[3] N. Dunford and J.T. Schwartz, Linear operators, Part I, Interscience, New York, 1958.

[4] I. Ekeland, Nonconvex minimization problems, Bull. Amer. Math. Soc., 1 (1979), 443–474.

[5] A.T. Lau and W. Takahashi, Invariant means and semigroups of nonexpansive mappings on uniformly convex Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 153 (1990), 497–505.

[6] N. Mizoguchi and W. Takahashi, On the existence of fixed points and ergodic retractions for Lipschitzian semigroups in Hilbert spaces, Nonlinear Analysis, TMA, 14 (1990), 69–80.

[7] N. Shioji and W. Takahashi, Fan's theorem concerning systems of convex inequalities and its applications, J. Math. Anal. Appl., (1988), 383–398.

[8] W. Takahashi, Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded set, J. Math. Soc. Japan, 36 (1984), 543–553.

[9] 高橋 渉，非線形関数解析学 ―不動点定理とその周辺―，近代科学社，1988.

[10] W. Takahashi, Existence theorems generalizing fixed point theorems for multivalued mappings, in "Fixed Point Theory and Applications", J. B. Baillon and M. Théra eds., Pitman Research Notes in Mathematics Series 252, 1992, pp. 397–406.

[11] H. K. Xu, Inequalities in Banach spaces with applications, Nonlinear Analysis, TMA, 16 (1991), 1127–1138.

[12] C. Zalinescu, On uniformly convex functions, J. Math. Anal. Appl., 95 (1983), 344–374.