数理解析研究所講究録
835 巻 1993 年 125-132

Mathematical Programming Approach to Best Approximation

川崎英文（九大・理・数学）
Hidefumi Kawasaki

序

チェビシェフ近似問題を関数空間における条件付極値問題としてとらえることにより、非線形計画法の様々な手法が適用できる。ここでは最初に、非線形計画法における1次の最適性条件から様々な交代定理が導かれることを示す。次に、2次の最適性条件を利用して、非線形最良近似問題の一つである動節点をもつスプライン関数による近似問題の2次の特殊な構造について述べる。

1次の最適性条件

この節では、次の一般的な非線形チェビシェフ近似問題を考える。

$$\text{minimize} \quad S(x) := \max\{|f(t) - F(x,t)|;\ t \in T\}, \tag{1}$$

ここで、T はコンパクト, $f : T \to R$, $F : R^N \times T \to R$ は連続関数で、F_x, F_{xx} は $R^N \times T$ 上連続と仮定する。

例えば、n次多項式による近似を考えるときは

$$\begin{cases} F(x,t) = x_0 + x_1 t + \cdots + x_n t^n, \\ x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in R^{n+1}, \quad t \in T = [0,1]. \end{cases}$$

と置けばよい。

定義 x^*のある近傍上で$S(x^*) \le S(x)$が成立するとき、$F(x^*,t)$を<u>局所最良近似</u>と呼ぶ。

チェビシェフ近似問題 (1) は明らかに次の半無限計画問題と同値であり

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && r \\ &\text{subject to} && \sigma\{f(t) - F(x,t)\} \le r \quad \forall t \in T, \quad \sigma \in \{1,-1\}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{T} := T \times \{1,-1\}, \quad e(t) \equiv 1,$$

$$F(x)(t,\sigma) := \sigma\{f(t) - F(x,t)\},$$
$$K := \{u \in C(\mathcal{T});\ u(t,\sigma) \geq 0\ \forall (t,\sigma) \in \mathcal{T}\}$$

とおくことにより

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & r \\ \text{subject to} & re - F(x) \in K, \end{array} \tag{2}$$

と一般化された不等式制約を持つ関数空間における最適化問題として定式化される。問題 (2) に対する 1 次の最適性条件より次の定理が得られる see Kawasaki (1988, 1991)。この定理は、数理計画法の Kuhn-Tucker 条件に相当するものであり、条件 (4) は active constraints に対応する。

Theorem(Dem'yanov and Malozemov 1974)　$F(x,t)$ が局所最良近似ならば、$\exists t_1,\dots,t_{N+1} \in T$, $\exists \lambda_1,\dots,\lambda_{N+1} \geq 0$ not all zero such that

$$\sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i \sigma(t_i) F_x(x,t_i) = 0, \tag{3}$$

$$|f(t_i) - F(x,t_i)| = S(x), \tag{4}$$

where

$$\sigma(t) := \mathrm{sgn}\{f(t) - F(x,t)\},$$

以下において次の記号を用いる。

$$r(t) := f(t) - F(x,t) \quad \underline{\text{誤差関数}}.$$

$$T(x) := \{t \in T;\ |r(t)| = S(x)\} \quad \underline{\textit{extreme points}}$$

n 次多項式による近似

n 次多項式による近似の場合

$$F(x,t) = x_0 + x_1 t + \cdots + x_n t^n, \quad t \in [0,1].$$

であった。$F(x,t)$ は x に関し線形であるから、$S(x)$ は凸関数である。従って、最適性条件 (3)(4) は最良近似の必要十分条件である。この時、条件 (3) は次のように書き下される。: $0 \leq \exists t_1 < \dots < t_{n+2} \leq 1$, $\exists \lambda_1,\dots,\lambda_{n+2} \geq 0$ not all zero such that

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & \cdots & t_{n+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^n & \cdots & t_{n+2}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \sigma(t_1) \\ \lambda_2 \sigma(t_2) \\ \vdots \\ \lambda_{n+2} \sigma(t_{n+2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

これに Cramer の公式を適用すると、Vandermonde の行列式の定符号性より、次の有名な定理が得られる。see Cheney 1966.

Tchebycheff の交代定理 n 次多項式が最良近似であるための必要十分条件は、誤差関数の符号が少なくとも $n+1$ 回交代することである。即ち $\exists t_1 < \cdots < t_{n+2}$ such that

$$\sigma(t_1) = -\sigma(t_2) = \sigma(t_3) = \cdots = (-1)^{n+1}\sigma(t_{n+2})$$

Polynomial spline with one fixed knot

1 個の固定節点 ξ を持つ多項式スプライン関数による近似の場合

$$F(x,t) = x_0 + x_1 t + \cdots + x_n t^n + x_{n+1}(t-\xi)_+^n, \quad t \in [0,1].$$

である。この問題も線形近似問題であるから、最適性条件 (3)(4) は最良近似の必要十分条件となる。さらに、最良近似は誤差関数の符号の交代性で特徴付けられる。

Theorem(Rice 1967, Schumaker 1968) $F(x,t)$ が最良近似であるための必要十分条件は次のいずれかの条件が満たされる事である。

(i) 誤差関数が $[0,\xi]$ または $[\xi,1]$ 上、少なくとも $n+1$ 回交代する。

(ii) 誤差関数が $[0,1]$ 上、少なくとも $n+2$ 回交代する。

Vandermonde の行列式の定符号性に相当する命題は次の Shoenberg-Whitney の定理である。(注：彼らはより一般的な命題を証明している。)

Theorem(Shoenberg and Whitney 1953): 任意の $0 \le t_1 < \cdots < t_{n+2} \le 1$, に対して

$$\Phi := \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & \cdots & t_{n+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^n & \cdots & t_{n+2}^n \\ (t_1-\xi)_+^n & \cdots & (t_{n+2}-\xi)_+^n \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$\Phi \ge 0 \quad \forall \xi \in [0,1].$$

$$\Phi > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 < \xi < t_{n+2}$$

Polynomial spline with one free knot

1 個の動節点 $\xi = x_{n+2}$ を持つ n 次の多項式スプライン関数の場合

$$F(x,t) = x_0 + x_1 t + \cdots + x_n t^n + x_{n+1}(t - x_{n+2})_+^n.$$

である。関数 $F(x,t)$ は非線形であるから、必要条件 (1)(2) は最良近似の十分条件になるとは限らない。ここでは $n \geq 2$ と仮定する。

Theorem(Braess 1971)　$F(x,t)$ を局所最良近似とする。もし $x_{n+1} \neq 0$ ならば (i) または (ii) が成立する。

(i) 誤差関数が $[0,\xi]$ または $[\xi,1]$ 上、少なくとも $n+1$ 回交代する。

(ii) 誤差関数が $[0,1]$ 上、少なくとも $n+3$ 回交代する。

また、$x_{n+1} = 0$ ならば (i) または (iii) が成立する。

(iii) 誤差関数が $[0,1]$ 上、少なくとも $n+2$ 回交代する。

ここで、Vandermonde の行列式の定符号性に相当する命題は次の Karlin-Ziegler の定理である。(注：彼らはより一般的な命題を証明している。)

Theorem(Karlin and Ziegler's theorem 1966) : $0 \leq t_1 < \cdots < t_{n+3} \leq 1$ に対し

$$\Phi := det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & \cdots & t_{n+3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^n & \cdots & t_{n+3}^n \\ (t_1 - \xi)_+^n & \cdots & (t_{n+3} - \xi)_+^n \\ (t_1 - \xi)_+^{n-1} & \cdots & (t_{n+3} - \xi)_+^{n-1} \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$\Phi \geq 0 \quad \forall \xi \in [0,1].$$

$$\Phi > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_2 < \xi < t_{n+2}$$

Braess の交代定理は最適性条件 (3) に Cramer の公式を適用することにより得られるが、逆もいえる。即ち

Theorem　Braess の交代条件と最適性条件 (3)(4) は同値である。

Second-order directional derivative

この節では、非線形最良近似問題の２次の構造を考察する。

Definition $x,\ y \in R^N$.

$$S''(x;y) := \lim_{\theta\to+0} \frac{S(x+\theta y) - S(x) - \theta S'(x;y)}{\theta}.$$

極限が存在しないとき、上極限を $\overline{S}''(x;y)$ で表す。

先ず $S(x)$ の方向微分について述べる。関数 $S(x)$ は

$$S(x) = \max\{\sigma\{f(t) - F(x,t)\};\ (t,\sigma) \in \mathcal{T}\}$$

と表されるから、よく知られた方向微分の公式より (see Girsanov 1972, Dem'yanov and Malozemov 1974)

$$S'(x;y) = \max\{-\sigma(t)F_x(x,t)y\ ;\ t \in T(x)\}.$$

が得られる。また

$$u(t,\sigma) := S(x) - \sigma\{f(t) - F(x,t)\},$$
$$v(t,\sigma) := S'(x;y) + \sigma F_x(x,t)y.$$

とおき、関数 $E(t,\sigma)$ を次のように定義する。

Definition(Kawasaki 1988) (5) を満たす点列 $(t_n,\sigma_n) \to (t,\sigma)$ が存在する点 $(t,\sigma) \in \mathcal{T}$ 全体を $\mathcal{T}_0$ で表す。

$$u(t_n,\sigma_n) > 0\ \ \forall n,\quad \lim_{n\to+\infty} -\frac{v(t_n,\sigma_n)}{u(t_n,\sigma_n)} = +\infty. \tag{5}$$

更に $E : \mathcal{T} \to [-\infty,+\infty]$ を次式で定義する。

$$\begin{cases} \sup\left\{\limsup \frac{v(t_n,\sigma_n)^2}{4u(t_n,\sigma_n)};\ \{(t_n,\sigma_n)\}\ \text{satisfies}\,(5)\right\} & \text{if}\,(t,\sigma) \in \mathcal{T}_0, \\ 0 \qquad\qquad \text{if}\ u(t,\sigma) = v(t,\sigma) = 0\ \text{and}\ (t,\sigma) \notin \mathcal{T}_0, \\ -\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定義より直ちに

$$E(t) \geq 0\ \ \text{if}\ \ u(t) = v(t) = 0$$

が得られる。

Definition $S'(x;y) = 0$ を満たす方向 $y \in R^N$ を<u>critical direction</u>と呼ぶ。

Kawasaki (1991,1992) の 2 次の最適性条件より、チェビシェフ近似問題 (1) に対する 2 次の最適性条件が得られる。

Theorem $F(x,t)$ が局所最良近似ならば、

$$E(t,\sigma) < +\infty \quad \forall (t,\sigma) \in \mathcal{T},$$

を満たす各 critical direction y に対し, $\exists t_1,\ldots,t_{N+1} \in T(x;y)$, $\exists \lambda_1,\ldots,\lambda_{N+1} \geq 0$ not all zero such that

$$\sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i \sigma(t_i) F_x(x,t_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i \{-\sigma(t_i) y^T F_{xx}(x,t_i) y + 2E(t_i,\sigma(t_i))\} \geq 0,$$

where

$$T(x;y) := \{t \in T(x) \; ; \; S'(x;y) = -\sigma(t) F_x(x,t) y\}.$$

Theorem

$$\overline{S}''(x;y) = \max_{t \in T(x;y)} \{-\frac{1}{2}\sigma(t) y^T F_{xx}(x,t) y + E(t,\sigma(t))\},$$

更に、もし $u(t,\sigma)$, $v(t,\sigma)$ が $u(t,\sigma)$, $v(t,\sigma)$ の共通なゼロ点において次の様に展開されるなら $+\infty$ を許して $S''(x;y)$ は存在する。

$$u(t,\sigma) = \alpha(t-\tau)^k + o(|t-\tau|^k) \quad \text{for some} \quad \alpha \neq 0, \; k > 0,$$

$$v(t,\sigma) = \beta(t-\tau)^m + o(|t-\tau|^m) \quad \text{for some} \quad \beta \neq 0, \; m > 0,$$

Second-order properties of spline functions with one free knot

Theorem $F(x,t)$ が Braess の交代条件を満たすならば、全ての critical direction に対して次式が成立する。

$$y^T \left(\sum_{i=1}^{n+4} \lambda_i \sigma(t_i) F_{xx}(x,t_i) \right) y = 0.$$

Theorem $F(x,t)$ が Braess の交代条件を満たすならば、全ての critical direction y に対し

$$\overline{S}''(x;y) \geq 0$$

が成立する。更に、誤差関数 $r(t)$ がそのゼロ点において先の意味で展開されるなら

$$0 \leq S''(x;y) \leq +\infty$$

が成立する。

ところで、1 次の最適性条件は次の不等式と同値である。

$$S'(x;y) \geq 0 \quad \forall y \in R^N.$$

従って $F(x^*,t)$ が Braess の交代条件を満たすならば、任意の方向 y に対して

$$S(x+\theta y) - S(x) = \theta S'(x;y) + \frac{1}{2}\theta^2 S''(x;y) + o(\theta^2) \geq o(\theta^2).$$

が成立する。この意味で nearly optimal である。

References

[1] D.Braess, "Chebyshev approximation by spline functions with free knots" *Numer. Math.*, vol. 17, pp. 357–366, (1971).

[2] E.W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory.* McGraw-Hill, New York, (1966).

[3] V.F. Dem'yanov and V.N. Malozemov, *Introduction to Minimax.* John-Wiley and Sons, New York, (1974).

[4] I.V. Girzanov, *Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems.* Springer, New York, (1972).

[5] R.P. Hettich and H.Th. Jongen, "Semi-infinite programming: conditions of optimality and applications" *in: J. Stoer (ed.) Optimization Techniques II.* Springer, (1972).

[6] S. Karlin and Z. Ziegler, "Tchebycheffian spline functions" *SIAM J. Numer. Anal. Series B,* vol. 3, pp. 514–543, (1966).

[7] H. Kawasaki, "An envelope-like effect of infinitely many inequality constraints on second-order necessary conditions for minimization problems" *Mathematical Programming,* vol. 41, pp. 73–96, (1988).

[8] H. Kawasaki, "The upper and lower second order directional derivatives of a sup-type function" *Mathematical Programming,* vol. 41, pp. 327–339, (1988).

[9] H. Kawasaki, "Second order necessary optimality conditions for minimizing a sup-type function" *Mathematical Programming,* vol. 49, pp. 213–229, (1991).

[10] H. Kawasaki, "Second-order necessary and sufficient optimality conditions for minimizing a sup-type function" *Applied Mathematics and Optimization* vol. 26, pp. 195–220, (1992).

[11] J.R. Rice, "Characterization of Chebyshev approximations by splines" *SIAM J. Numer. Anal.,* vol. 4, pp. 557–565, (1967).

[12] L. Schumaker, "Uniform approximation by Tchebycheffian spline functions" *J. Math. Mech.,* vol. 18, pp.369–378, (1968).

[13] I.J. Shoenberg and A. Whitney, "On Pólya frequency functions. III. The positivity of translation determinants with an applicaiton to the interpolation problem by spline curves" *Trans. Amer. Math. Soc.,* vol. 74, pp.246–259, (1953).