数理解析研究所講究録
835巻 1993年 43-48



# Tree上の探索問題

富山大学経済学部経営学科　菊田健作(Kensaku Kikuta)

## 1．はじめに

探索状況の一つのモデルとしてn個の箱（あるいは領域）の一つに入っている静止目標物を見つけるにいたるまでの期待総費用を最小化する問題が考えられる．本稿では，さらに，(i)切り替え費用を考慮し，(ii)探索者の出発位置が特定されており，かつ(iii)見逃し確率を考慮しない，ような場合について，ミニマックス解を求めることである．本報告で扱うモデルは，リニア・グラフ上の同様なモデルを一般化したものである．

## 2．モデル

n+1個の点（vertex）があり，0からnまで番号（label）がついている．$V = \{0,1,2,\ldots,n\}$を点集合という．EはVの二つの点i, jの組(i, j)からなる集合である．Eの元を辺（edge）といい，Eを辺集合という．Eは$\{(i,j) : i,j \in V\}$の部分集合である．$G = (V,E)$を（無向）グラフという．点$i_0$と$i_s$とを結ぶ道（path）とは，順序のついた(s+1)個のVの点の組$\pi = (i_0, i_1, \ldots, i_s)$であって，$(i_{r-1}, i_r) \in E$がすべての$r = 1,\ldots,s$について成り立つものである．道$\pi$は点$i_0$と$i_s$を結ぶという．$i_0$を$\pi$の始点，$i_s$を終点という．始点と終点とが同じであるような道を閉路という．すべての点が異なる道を単純な道という．Vの任意の二元i, jに対し，iとjとを結ぶ道があるとき，Gは連結であるという．

本報告では，Gは根つき木，つまり，連結でかつ閉路を含まず，点0が根であるとする．Vの二元i, j $(i \neq j)$に対し，点0とjとを結ぶ道があってiがこの道の成分であるとき，iはjの先祖であるという．このとき，jはiの子孫であるという．さらに，$(i,j) \in E$ならば，iはjの子であるという．$i \in V$に対し，$N_i$をiの子孫全体の集合，$V_i = \{i\} \cup N_i$，$N = N_0$とおく．Nの任意の元jに対し，$(i,j) \in E$なるiがただ一つある．これを$\alpha(j)$と表わす．$e(j) = (\alpha(j), j)$とおく．Nの部分集合V'に対し，$e(V') = \{e(j) : j \in V'\}$とおく．$G_i = (V_i, e(N_i))$はiを根とする木とみなすことができる．これをiを根とするGの部分木という．Vの部分集合V'に対し，V'が$V_i$に含まれると仮定する．(V'', E')をiを根とするGの部分木であって，V''は$V' \cup \{i\}$を含むようなものとする．(V'', E')をV'に関するiを根とするGの部分木という．V'に関するiを根とするGの部分木のうち，辺の数が最小のものを極小なV'に関するiを根とするGの部分木という．

各辺$(i, j) \in E$に対し，正数$d(i, j)$が対応する．$d(i, j)=d(j, i)$と仮定する．道$\pi$に対し，$\pi$のすべての辺に関する$d(i, j)$の和を$\pi$の長さという．$(i, j) \notin E$のとき$d(i, j)$は$i$と$j$とを結ぶ単純な道の長さを表わすものとする．

次に，グラフ$G = (V, E)$上の探索問題について述べる．点$1, \ldots, n$のどれか一つに静止目標物がある．探索者（以後，Sと略称）は点0から出発して，辺上を移動しつつ，点を一つずつ調べていく．見逃し確率はどの点についても0である．点$i$ $(i = 1, \ldots, n)$を調べる費用は$c(i)$ $(\geqq 0)$ $(i = 1, \ldots, n)$である．$(i, j) \in E$のとき，点$i$から$j$への移動費用は$d(i, j)$ $(>0)$であるとする．Sは目標物を発見するまでの費用が，ある意味で小さくなるように，調べる順序を決定せねばならない．

本稿では，Sが事前確率を計算できないとする．Sは最悪の場合を想定し，その場合の総費用が最小になるような戦略を選ぶかも知れない．目標物も意志を持つと想定して，Sと目標物の双方がゼロ和ゲームを行なう．このとき，目標物をhider（以後，Hと略称）ということにする．Sは，ゲームの均衡点に対応する戦略を求めるとする立場をとる．

Sの（純粋）戦略は$N = V \setminus \{0\} = \{1, \ldots, n\}$上の置換で表すことが出来る．N上の置換$\sigma$に対し，Sは$\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$の順に探索するとする．N上の置換全体の集合を$\Sigma$で表す．$\sigma$に対し，$\sigma$と逆の順の探索を行なわせる置換を$r\sigma$で表す．すなわち，

$$(2.1) \qquad (r\sigma)(i) = \sigma(n-i+1), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Hが点$i$にいて，Sが戦略$\sigma \in \Sigma$をとるならば，Hを発見するまでの費用は，$k = \sigma^{-1}(i)$とおいて，

$$(2.2) \qquad f(i, \sigma) = d(\sigma(0), \sigma(1)) + \ldots + d(\sigma(k-1), \sigma(k)) + c(\sigma(1)) + \ldots + c(\sigma(k))$$

となる．ここに，$\sigma(0) = 0$．　2人ゼロ和ゲーム$(f; N, \Sigma)$の混合拡大を$\Gamma = (f; P, Q)$と表わす．各点$i \in N$に対し，$w(i) = 2d(\alpha(i), i) + c(i)$とおく．Nの部分集合$V'$に対し，記号　$p(V') = \Sigma_{i \in N}\, p(i)$，$c(V') = \Sigma_{i \in N}\, c(i)$，$w(V') = \Sigma_{i \in N}\, w(i)$と定義する．

## 3．最適戦略とその性質

点0の子を$i1, \ldots, it$ $(t \geqq 1)$とする．$p^* \in P$を次のように定義する．

(3.1) $p^*(\alpha(i))/c(\alpha(i)) = p^*(Vi)/w(Vi), \quad \alpha(i) \neq 0.$

(3.2) $p^*(Vix)/w(Vix) = p^*(Viy)/w(Viy), \quad x,y = 1, \ldots, t.$

(3.1), (3.2)および$p^*(N) = 1$はただ一つのPの元を決定する.

$\Sigma$の元で，Eの各辺をたかだか2回しか通らないような順序を指定するもの全体の集合を$\Sigma_{DE}$とおく.
$\sigma \in \Sigma_{DE}$に対し，$\sigma$と$r\sigma$とを1/2ずつで混合するような戦略を$\sigma^*$と表わす.

定理1．ゲーム$\Gamma = (f;P,Q)$の値は，$v(\Gamma) = vw(N)/2 + \Sigma_{i \in N}\, p^*(i)c(i)/2$.　$p^*$はHの唯一の最適戦略，任意の$\sigma \in \Sigma_{DE}$に対し，$\sigma^*$はSの最適戦略である.

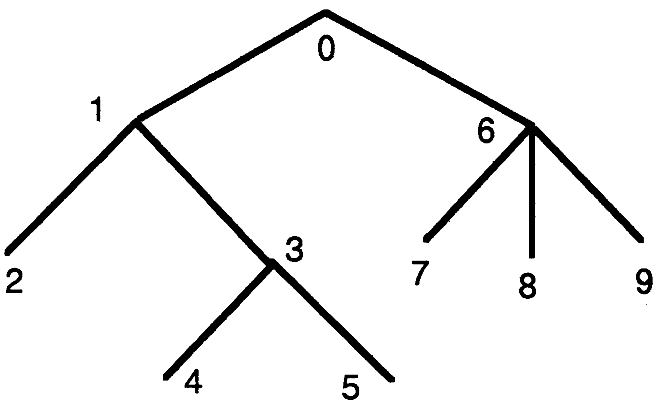
性質2．$p^*(\alpha(i))/c(\alpha(i)) < p^*(i)/c(i), \quad \alpha(i) \in N.$

性質3．V'が$V_i$の部分集合とする．(V'',E')を極小なV'に関するiを根とするGの部分木であるとする.

$p^*(V')/p^*(V_i) \leqq [w(V')+2d(e(V''-V'))]/w(V_i), \quad \text{if } i \in V',$

$p^*(V')/p^*(N_i) \leqq [w(V')+2d(e(V''-(V' \cup \{i\})))]/w(N_i), \quad \text{otherwise}.$

例4．




(3.1)と(3.2)により，

$p^*(1)/c(1) = p^*(2)/w(2) = p^*(3,4,5)/w(3,4,5),$

$p^*(6)/c(6) = p^*(7)/w(7) = p^*(8)/w(8) = p^*(9)/w(9),$

$p^*(1,2,3,4,5)/w(1,2,3,4,5) = p^*(6,7,8,9)/w(6,7,8,9),$

かつ $p^*(3)/c(3) = p^*(4)/w(4) = p^*(5)/w(5)$.

これと$p^*(N) = 1$より$p^*$を計算できる.

任意の$\sigma \in \Sigma$に対し, $V_{ix}$は$V_\sigma(i_x, 1), \ldots, V_\sigma(i_x, r_x)$に分割される. 即ち, Sはまず, $V_\sigma(i_x, 1)$の元を調べる, 次に点0を通過して別の枝に行く, 点0を通過して$V_{ix}$に戻ってきて$V_\sigma(i_x, 2)$の元を調べる, 次に点0を通過して別の枝に行く, . . . 次のような性質をもつ順序の全体を$\Sigma_{PDE}$で表わす: $x = 1, \ldots, t$と$y = 1, \ldots, rx$とに対し, Sは各$i \in V_\sigma(i_x, y)$をSが枝$G_{ix}$をy回目に訪れて最初に通るときに調べる. また次のような性質をもつ順序の全体を$\Sigma_{SDE}$で表わす: $x = 1, \ldots, t$と$y = 1, \ldots, rx$とに対し, $V_\sigma(i_x, y)$は$V_\sigma(i_x, 1) \cup \ldots \cup V_\sigma(i_x, y-1)$の先祖を含まない.

補題5. 任意の$\sigma \in \Sigma_{DE}$と任意の$p \in P$に対し, $f(p, \sigma^*) = v(\Gamma)$.

補題6. 任意の$\sigma \in \Sigma_{DE}$に対し, $f(p^*, \sigma) = v(\Gamma)$.

上の二つの補題より, 定理1においてp*が最適戦略であることを示すためには, " 任意の$\sigma \in \Sigma$に対し, $f(p^*, \sigma) \geqq v(\Gamma)$" をいえばよい. 後に続く補題はそのためのものである. 補題13は p*が唯一の最適戦略であることをしめす.

補題7. (i) $i \in V_{ix}(1 \leqq x \leqq t)$とする. $\sigma \in \Sigma$のもとで, Sは点iを通り, $N_{ix}$のいくつかの点を調べた後, 再び点iに戻ってきたとする. この間, Sが調べた点の集合を$Y(\subset N_{ix})$, 通過した辺の集合を$X(\subset E_{ix})$とする. Yはiの先祖を含まないと仮定する. このとき, $p^*(Y)/[w(Y)+2d(X \setminus e(Y))] \leqq p^*(i)/c(i)$.

(ii) $i_1$と$i_2$が0の子であるとする. V'は$V_{i1}$の部分集合, $y \in V_{i2}$とする. (V", E')を極小なV'に関する$i_1$を根とする部分木とする. このとき, $p^*(V')/[w(V')+2d(e(V'' \setminus V'))] \leqq p^*(y)/c(y)$.

補題8. $i \in N_{ix}$ $(1 \leqq x \leqq t)$とする. $\sigma \in \Sigma$のもとで, Sは点iを通り, $N_{ix}$のいくつかの点を調べた後, 再び点iに戻ってきたとする. この間, Sが調べた点の集合を$Y(\quad N_{ix})$, 通過した辺の集合を$X(\quad E_{ix})$とする. Yはiの先祖を含まないと仮定する. SがYを調べる直前にiを調べるように変えて得られる順序を$\sigma'$とする. このとき, $f(p^*, \sigma) \geqq f(p^*, \sigma')$が成立する.

補題9．$\sigma \in \Sigma_{PDE}$とする．$i, j \in V_{ix}$とする．$i \in V_\sigma(i_x, u)$ $(u \geqq 2)$，かつ$j \in V_\sigma(i_x, 1)$とする．jはiの子であるとする．$\sigma'^{-1}(i) = \sigma'^{-1}(j)-1$であるように$\sigma'$を定義する．このとき，$f(p*, \sigma) \geqq f(p*, \sigma')$が成立する．

補題8と9により，任意の$\sigma \in \Sigma_{PDE}$に対し，$\sigma\# \in \Sigma_{SDE} \cap \Sigma_{PDE}$が存在し，$f(p*, \sigma) \geqq f(p*, \sigma\#)$が成立することがわかる．すなわち，補題8と9を必要なだけ使いながら，順次調べる順序を変えていけばよい．

補題10．$\sigma \in \Sigma_{SDE} \cap \Sigma_{PDE}$とする．$i \in N$かつUは$N_i$の部分集合で，$U = \cup_{j \in K} V_j$，Kはiの子の集合とする．$\sigma \in \Sigma$のもとで，Sは・・・iZUWの順に調べるとする．Sは$\sigma \in \Sigma$のもとでUにおいてはたかだか2回しか各辺を通過しないと仮定する．$\sigma' \in \Sigma$をSが・・・iUZWの順に調べるような順序と定義する．このとき，$\sigma' \in \Sigma_{SDE} \cap \Sigma_{PDE}$であり，$f(p*, \sigma) \geqq f(p*, \sigma')$が成立する．

補題11．$\sigma \in \Sigma_{SDE} \cap \Sigma_{PDE}$とする．$x(1), \ldots, x(k)$は$V_{i1}$の元で，$V\sigma(i_1, r_1)$に属さないが，$V\sigma(i_1, r_1)$の点に隣接しているもの全体とする．$V_\sigma(i_1, r_1) = N'_{x(1)} \cup \cdots \cup N'_{x(k)}$とする．ここに，各$N'_{x(u)}$ $(1 \leqq u \leqq k)$は$N_{x(u)}$ $(1 \leqq u \leqq k)$の部分集合である．Sは$x(u)$ $(1 \leqq u \leqq k)$を調べた後すぐに$N'_{x(u)}$ $(1 \leqq u \leqq k)$を調べるように順序を変えてえられるものを$\sigma\#$とする．このとき，$\sigma\# \in \Sigma_{SDE} \cap \Sigma_{PDE}$であり，$f(p*, \sigma) \geqq f(p*, \sigma\#)$が成立する．

系12．$\sigma \in \Sigma_{SDE} \cap \Sigma_{PDE}$とする．$\sigma\# \in \Sigma_{SDE} \cap \Sigma_{PDE}$であり，$f(p*, \sigma) \geqq f(p*, \sigma\#)$であるような$\sigma\#$が存在する．

補題13．もしも，$p \in P$が最適であれば，$p = p*$である．

## 参考文献

[1]Ahlswede,R. and Wegener,I.: Search Problems. John Wiley & Sons, Chichester, 1987. esp. pp. 264-265.

[2] Bellman, R.: Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.

[3] Ferguson, T.: private communication, 1992.

[4] Gal, S.: Search Games. Math. in Sci. and Eng., 149, Academic Press. 1980. esp. pp. 17-33.

[5] Gluss, B.: Approximately Optimal One-Dimensional Search Policies in Which Search Costs Vary through Time. Nav. Res. Log. Quart. , 8 (1961), 277-283.

[6] Kikuta, K.: A One-Dimensional Search with Traveling Cost. Journal of the Operations Research Society of Japan 33 (1990). 262-276.

[7] ------.: A Search Game with Traveling Cost. Journal of the Operations Research Society of Japan 34 (1991). 365-382.

[8] ------ and Ruckle, W.: Initial Point Search on Weighted Trees. mimeo. 1992.

[9] Lossner, U. and Wegener, I.:Discrete Sequential Search with Positive Switch Cost. Mathematics of Operations Research 7(1982), 426-440.

[10] Nakai, T.: Tansaku Riron Tenbo (In Japanese) mimeo. 1986.

[11] Naval Research Logistics., 38, No.4, 1991.

[12] Ruckle, W.H.: Geometric Games and Their Applications. Pitman. Mass. 1983. esp. pp. 148-155.

[13] ------ : A Discrete Search Game. In Stochastic Games & Related Topics, Shapley Honor Volume 1989, 27-40.

[14] Townsend, M. : Discrete Mathematics: Applied Combinatorics And Graph Theory. The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Menlo Park, CA, 1987. esp. Ch.8.