

ガルバニック腐食逆問題の境界要素解析

東京工業大学 青木 繁 (Shigeru AOKI)

東京工大学生 浦井 芳洋 (Yoshihiro URAI)

1. 緒言

土中埋設物，海洋構造物 などの機械・構造物においては，異なった二種類以上の金属が電氣的に接触した状態で腐食性雰囲気（以下では，簡単のために溶液と呼ぶ）中に置かれることが多いので，一方の金属が選択的に腐食するガルバニック腐食の被害が重大である．この被害を最小限に食い止めるためには，機械・構造物各部の腐食速度を定量的に把握する必要がある．機械・構造物を構成する各金属の分極特性（電位と電流密度の関係）が既知の場合には，分極特性を境界条件として溶液中の電位を支配するラプラス方程式を境界要素法などを用いて解くことにより，金属表面から溶液中に流れ出る電流密度（これが腐食速度に比例する）分布を予測することが可能である（1-5）．

しかし，実際には金属の分極特性が未知であり，しかも土

中埋設管などのように，機械・構造物の金属表面における電位や電流密度を直接測定するのが困難な場合も少なくない．このような場合には，金属表面から離れた場所における何らかの情報から機械・構造物の金属表面における電流密度分布を推定するという逆問題を解かなければならない．本報では，溶液中または溶液表面の電位の測定値から金属表面の電流密度分布を推定する逆問題を境界要素法により解析することを試みる．

2. 基礎方程式

Fig.1 に示すように，溶液は電位 ϕ が指定された境界 Γ_1 ，境界を通して流れ出る電流 q が指定された境界 Γ_2 および金属との境界 Γ_m で囲まれているとする．溶液の占める領域 Ω 内の電位 ϕ はラプラスの方程式を満足する．すなわち，

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \Omega \text{ 内} \quad (1)$$

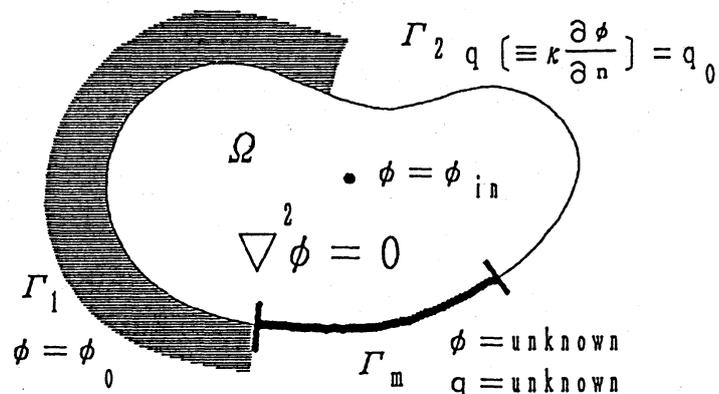


Fig.1 Governing equation and boundary conditions

κ を溶液の電気電導度， $\partial / \partial n$ を外向き法線方向の微分とし， $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_m$ とすると，電位 ϕ および境界を通して溶液中へ流入する電流密度 q の間には次の関係が成立する．

$$q = \kappa \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad \Gamma \text{ 上} \quad (2)$$

境界条件は次式で与えられる．

$$\phi = \phi_0 \quad \Gamma_1 \text{ 上} \quad (3)$$

$$q = q_0 \quad \Gamma_2 \text{ 上} \quad (4)$$

$$\phi, q : \text{未知} \quad \Gamma_m \text{ 上} \quad (5)$$

ここで， ϕ_0 ， q_0 はそれぞれ指定された電位 ϕ および電流密度 q の値である．順問題の場合には金属の分極特性が既知であるので， Γ_m 上で ϕ と q の既知の関数関係が与えられるのに対して，逆問題の場合には式 (5) のように， ϕ も q もともに未知となる．そのかわりに，溶液内の有限個の点（以後，簡単のため内点と呼ぶ）における電位の測定値 ϕ_{in} が与えられる．すなわち，

$$\phi = \phi_{in} \quad \text{内点上} \quad (6)$$

3. 境界要素法による定式化

境界要素法の通常の定式化に従い，式 (1) および (2) より境界積分方程式を導き，次に境界を i 個の要素に分割し， ϕ と q をそれぞれの節点における値と内挿関数によって近似

すると，次の i 個の代数方程式が得られる．

$$\frac{1}{\kappa} [G] q^n - [H] \phi^n = Q \quad (7)$$

ここで， ϕ^n および q^n はそれぞれ ϕ と q の節点における値 ϕ^n および q^n を成分とするベクトルであり，行列 $[G]$ および $[H]$ は境界の形状・寸法により決定される i 行 i 列の正方行列である．電位の測定点の数を j 個 ($j \geq i$) とすると，式 (6) から同様にして，次の j 個の式が得られる．

$$\frac{1}{\kappa} [G_{in}] q^n - [H_{in}] \phi^n = \phi_{in}^n \quad (8)$$

ここで，行列 $[G_{in}]$ および $[H_{in}]$ は境界の形状・寸法および測定点の位置に依存する j 行 i 列の非正方行列であり， ϕ_{in}^n は測定点における電位を成分とするベクトルである．

式 (7) は，金属表面上 Γ_m 上で ϕ も q も与えられていないため未知数の数が方程式の数を上回るので，単独では解くことができない．そこで，式 (8) と組み合わせると次式が得られる．

$$[A] x^n - b^n = Q \quad (9)$$

ただし，

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa} [G] & , & [H] \\ \frac{1}{\kappa} [G_{in}] & , & [H_{in}] \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^n = \begin{Bmatrix} q^n \\ \phi^n \end{Bmatrix} \quad \underline{b}^n = \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_{in} \end{Bmatrix}$$

[A] は (i+j) 行 2i 列の非正方行列である。式 (9) の \underline{x}^n の各成分に任意の値を代入したときの左辺を {r} とし、
 $\| \{r\} \|^2$ ($= \{r\}^T \{r\}$; T は転置を表す) を最小とするような、すなわち、

$$\| [A] \underline{x}^n - \underline{b}^n \|^2 \longrightarrow \text{最小} \quad (10)$$

とするような \underline{x}^n を求めることにより、解が得られる。

4. 解析例

Fig. 2 に示すようなガルバニック腐食場を考える。溶液は $x = 0, 2a$ 及び $y = a$ の面で絶縁されている。 $y = 0$ の面を金属 (アノードおよびカソード) 表面とし、 ϕ_{in} の値を与える内点の位置を金属表面から一定の高さ ($y = W_{in}$)

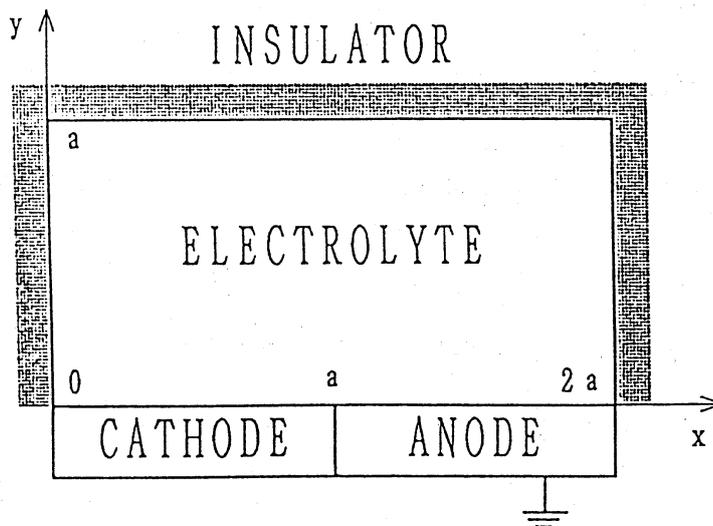


Fig. 2 A model of galvanic corrosion couple

とする。まず、分極特性が次式で与えられるとして順問題を前報(1),(4)の手法で解き、境界上の全ての電位と電流密度を求めた。得られた境界値から内点の電位を求め、測定誤差を模擬するため有効数字3桁に丸めて ϕ_{in} とした。次に、金属上の電位、電流密度分布を未知として、上で求めた ϕ_{in} からこれらを推定する逆問題解析を前章の方法により行った。

アノード

$$\frac{\phi}{\phi_a} = \begin{cases} \log_{10} \left(-\frac{q}{q_a} \right) + 1.1 & \left(\frac{q}{q_a} \leq -1 \right) \\ -0.1 \frac{q}{q_a} + 1 & \left(-1 \leq \frac{q}{q_a} \leq 1 \right) \\ -\log_{10} \left(\frac{q}{q_a} \right) + 0.9 & \left(\frac{q}{q_a} \geq 1 \right) \end{cases} \quad (11)$$

カソード

$$\frac{\phi}{\phi_a} = \begin{cases} \log_{10} \left(-\frac{q}{q_a} \right) + 0.1 & \left(\frac{q}{q_a} \leq -1 \right) \\ -0.1 \frac{q}{q_a} & \left(-1 \leq \frac{q}{q_a} \leq 1 \right) \\ -\log_{10} \left(\frac{q}{q_a} \right) - 0.1 & \left(\frac{q}{q_a} \geq 1 \right) \end{cases} \quad (12)$$

ここで、 ϕ_a および q_a は無次元化のための定数である。電気電導度を $\kappa / (a q_a / \phi_a) = 10$ とし、Fig. 3に示す60個の一定要素を用いた。内点の数を金属表面上の要素数と一致させて20とし、式(9)の未知数の数と方程式数を同一にして、[A]の逆行列を求めることにより式(9)を解いて式(10)の解とした。

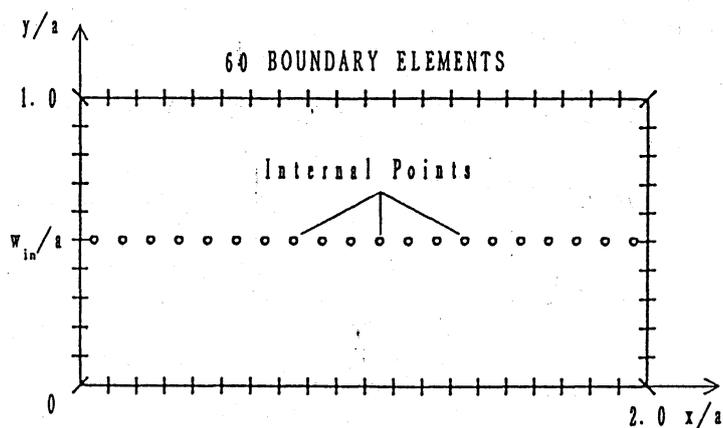


Fig. 3 Boundary discretization

Fig. 4 に金属表面上の電流密度分布の逆問題解析結果を示す。ただし、実線は順問題の解析結果であり、逆問題に対する正解を与えている。 W_{in}/a の増加とともに逆問題の解は激しく振動し、 $W_{in}/a = 0.2$ では推定不可能となることがわかる。そこで、種々の方法による適切化を試みる。

(a) Potential

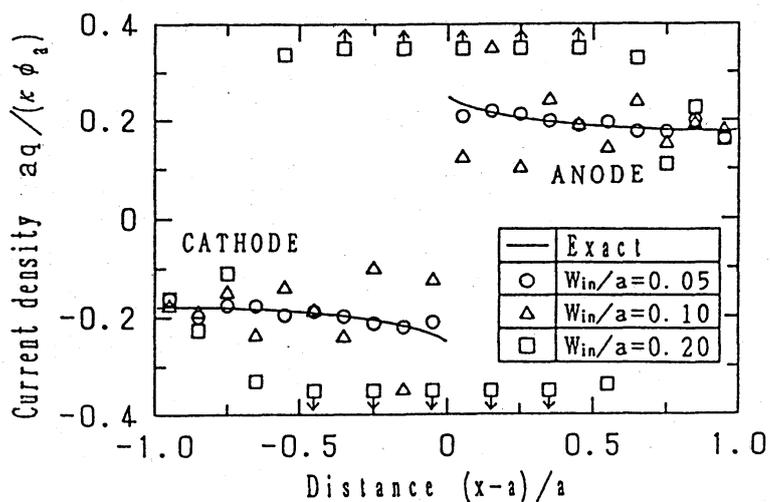


Fig. 4 Current density distribution estimated by eqn(7)

5. 特異値分解法の適用

式 (10) の $(i+j)$ 行 $2i$ 列 ($j \geq i$) の行列 $[A]$ を次式のように特異値分解する⁽⁶⁾.

$$[A] = [U] [D] [V]^T \quad (11)$$

ここで, $[U]$ は $(i+j)$ 行 $(i+j)$ 列の直交行列, $[V]$ は $2i$ 行 $2i$ 列の直交行列, $[D]$ は $[A]$ の特異値 σ_λ ($\lambda = 1, 2, \dots, 2i$) を含む $(i+j)$ 行 $2i$ 列の「対角」行列である. ここで,

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_R > \sigma_{R+1} = \dots = \sigma_{2i} = 0 \quad (12)$$

R は $[A]$ のランクである. 小さな特異値を 0 として $[A]$ のランクを落すことによって式 (10) の解を滑らかにすることができる⁽⁶⁾. ランクを減少したために解が不定となるので, $\| \{ x \} \| \rightarrow$ 最小という条件を付加し, Moore-Penrose の一般逆行列⁽⁶⁾により解を求める.

4 章の例題に対してこの方法を適用して, $W_{in} / a = 0$. 5 の内点における ϕ_{in} から金属表面上の電流密度分布を推定した結果を Fig. 5 に示す. ランクを 80 から 66 まで落している. 前報⁽⁷⁾で提案した方法 (逆問題解から計算される内点における ϕ の値と与えられた ϕ_{in} の値の残差二乗和および $[A]$ の条件数⁽⁶⁾のランクによる変化から最適ランクを決定する方法) により, 最適ランクを 66 とした. Fig. 4

の結果と比較すると、解の精度が向上していることがわかる。

しかし、 $W_{in}/a > 0.5$ では、この方法を適用してもなお妥当な解が得られなかった。

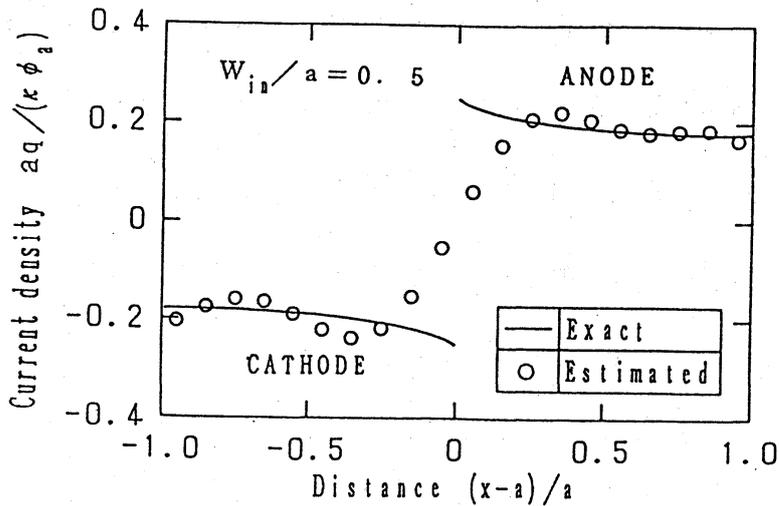


Fig.5 Current density distribution estimated by singular value decomposition

6. Tikhonovの方法の適用

Tikhonov⁽⁸⁾に従って式(10)に適当な項を付加することにより、解の異常な振動を抑制することを考える。

6.1. 平滑化法 付加項として金属表面上における

ϕ の接線方向の二階微分 ϕ'' (計算上は二階差分)を考える。

すなわち、式(10)を次式のように修正する。

$$\| [A] \underline{x}^n - \underline{b}^n \|^2 + \mu \| \phi_m''^n \|^2 \longrightarrow \text{最小} \quad (13)$$

ここで， $\phi_m''^n$ は金属表面上の電位の節点における接線方向二階差分を成分とするベクトルであり， μ は重み定数である．

この方法を4章の例題に適用して， $W_{in}/a = 0.5$ の内点における ϕ_{in} から金属表面上の電流密度分布を推定した結果をFig.6に示す．解の振動が抑えられており， $k = 10^{-4}$ とすると電流密度分布が推定可能であることがわかる．特異値分解法と比べると，解の精度は同じ程度であるが計算量はかなり少ないという利点がある．

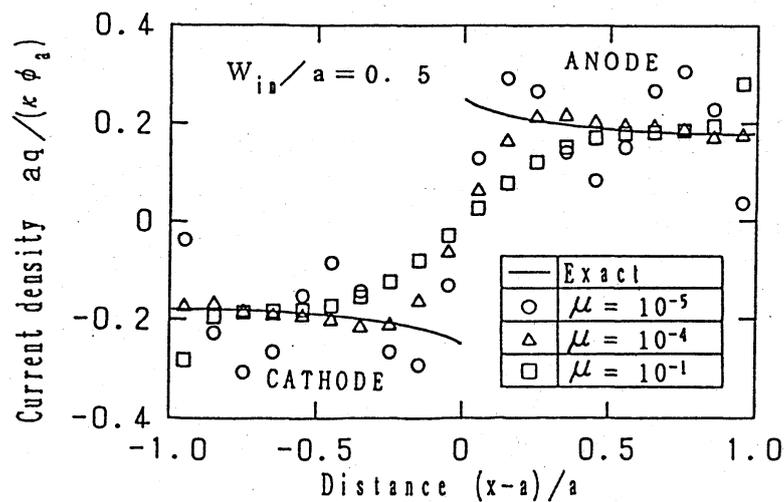


Fig.6 Current density distribution estimated by Tikhonov's method, eqn(12)

6.2. スプライン法 前節と同様な考え方に従って，式(10)に次式のような項を付加して問題の適切化を計る．

すなわち，溶液の境界 Γ に沿って座標 s をとり， $g(s)$ を 3 次の拡張スプラインとして，式 (10) を次のように修正する．

$$\| [A] \mathbf{x}^n - \mathbf{b}^n \|^2 + \nu \| \phi_m^n - \mathbf{g}^n \|^2 \longrightarrow \text{最小} \quad (14)$$

ここで， ν は重み定数， ϕ_m^n および \mathbf{g}^n はそれぞれ金属表面上の境界要素節点における ϕ および $g(s)$ 値を成分とするベクトルである．式 (14) の左辺を最小化するための変数は，電位と電流密度及びスプライン関数のパラメータとなる． k を十分大きくして左辺を最小にする解を求めれば， ϕ がスプライン関数を満たすような解が得られる．

この方法による 4 章の例題の $W_{in}/a = 0.5$ に対する解を Fig.7 に示す．金属表面を $N = 1 \sim 3$ 区間に等間隔に区切っ

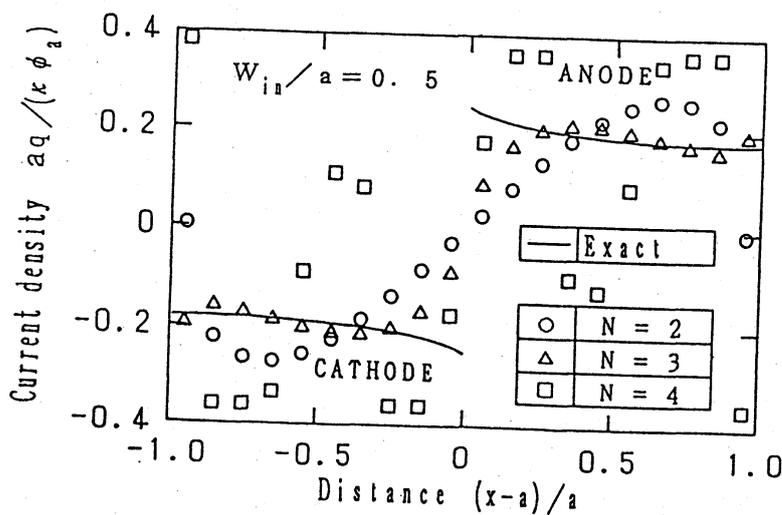


Fig.7 Current density distribution estimated by

Tikhonov's method, eqn(13)

てスプライン関数を用いた。N = 3 の時に精度の良い解が得られている。特異値分解法および平滑化法と比較すると、解の精度は三者ともほぼ同じである。計算量は平滑化法と同程度である。

7. クラスタリングの適用

ガルバニック腐食の逆問題において特に重要なのは、電流密度の最大値（すなわちアノードとカソードの接する位置における電流密度の値）である。しかし、5章および6章の三つの方法はいずれも、この位置における電流密度を正解よりも小さく見積る、すなわち危険側の予測を与えるという欠点がある。また、 $W_{in}/a > 0.5$ では解の精度が著しく低下した。そこで、さらに解の精度を改善する方法について考える。

7.1. 各要素の分極曲線の推定 溶液の表面上の1～数点（以下では、簡単のため1点とする）から電流を印加して、前章のいずれかの方法により金属表面上の電位と電流密度分布を求める。印加する電流をh段階に変化させるとする

と、金属上の要素 p の電位と電流密度に対する h 組の解 $(\phi_{p1}, q_{p1}), \dots, (\phi_{ph}, q_{ph})$ が求められる。これらの解から要素 p の分極曲線を求めることができる。ここでは要素 p の分極曲線を次のように近似して係数 α_p と β_p を最小二乗法で求める。

$$\frac{q}{q_a} = \alpha_p \frac{\phi}{\phi_a} + \beta_p \quad (p=1, \dots, k) \quad (15)$$

ここで、 k は金属表面上の要素数である。こうして得られた各要素の α_p および β_p の値は大きなバラツキを示す。

7.2. クラスタリング 前節で得られた α_p および β_p の値を用いてクラスタリングを行い、各要素をアノードとカソードに分類し、それぞれの金属（すなわち、それぞれのクラスター）の分極曲線を推定する。クラスタリングの手法としてはファジィ k -means 法⁽⁹⁾⁻⁽¹¹⁾を用いる。 α_p と β_p ($p=1, \dots, k$) をそれぞれの最大値と最小値の差 $\Delta\alpha$ と $\Delta\beta$ で除してスケーリングを行い、それぞれ α'_p と β'_p とする。

$\mathcal{X}_p = (\alpha'_p, \beta'_p)^T$ ($p=1, \dots, k$) を観測ベクトルとして、二種類の金属（アノード、カソード）に対応する二つのクラスター S_1, S_2 に各要素を分類することを考える。クラスター S_r ($r=1, 2$) の平均ベクトルを $\bar{\mathcal{X}}_r = (\bar{\alpha}'_r, \bar{\beta}'_r)^T$ とする。

また，要素 p がクラスター S_r に所属する度合，すなわち所属関数を u_{rp} ($r=1, 2; p=1, 2, \dots, k$) とする． u_{rp} は次式を満足する．

$$u_{rp} \in [0, 1], \quad \sum_{r=1}^2 u_{rp} = 1 \quad (16)$$

u_{rp} と v_r の値は次の目的関数を最小化するように定める．

$$\sum_{p=1}^k \sum_{r=1}^2 (u_{rp})^\theta \|x_p - v_r\|^2 \longrightarrow \text{最小} \quad (17)$$

ただし， $1 < \theta < \infty$ ．上式の解はラグランジェの未定係数法により求められる．

ϕ はアノードのほうがカソードよりも高く，また q はアノードでは正，カソードでは負になることから，観測ベクトルの成分として， α'_p と β'_p に加えて，適当なスケールリングを施した $(\phi_{p1}, q_{p1}), \dots, (\phi_{ph}, q_{ph})$ (h は印加電流値の段階数) を考えることもできる．観測ベクトルの次元が増すだけであるので，同様にして u_{rp} と v_r の値を求めることができる．

7. 3. 電流密度分布の推定 前節の方法により得られた
 た u_{rp} より，要素 p がどちらのクラスターに属するかを判別する．要素 p がクラスター S_r に属する時， S_r の平均ベクトル v_r の成分 $(\bar{\alpha}'_r, \bar{\beta}'_r)$ を用いて式 (14) の係数を記

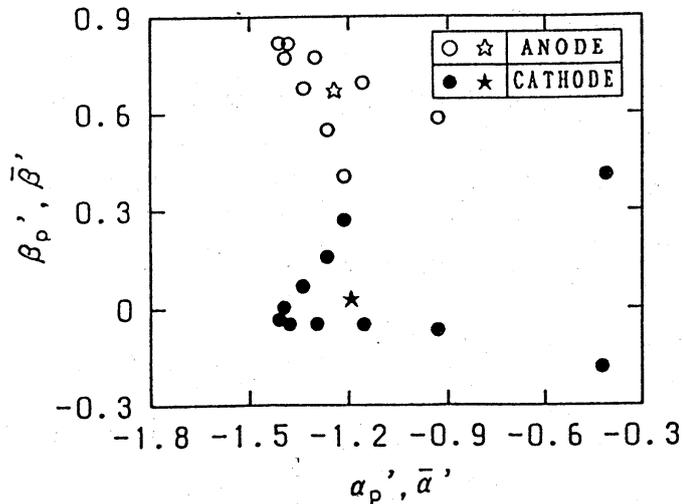
述し、これを要素 p の分極曲線とする。この分極曲線を用いて、順問題を解くことにより、金属表面上の電位分布および電流密度分布を求めることができる。

この方法を用いて、4章の例題の解析を行った。電流を印加するための電極は溶液表面の中央の一箇所とし、印加電流値を5段階に変化させた。まず、 $W_{in}/a = 1.0$ に対する逆問題を式(12)により解いた。重みは $\mu = 10^{-4}$ とした (μ の値を種々に変えて計算し、内点における電位の最終計算結果と最初に与えた ϕ_{in} の残差二乗和が最小となるような μ の値としてこの値を定めた)。

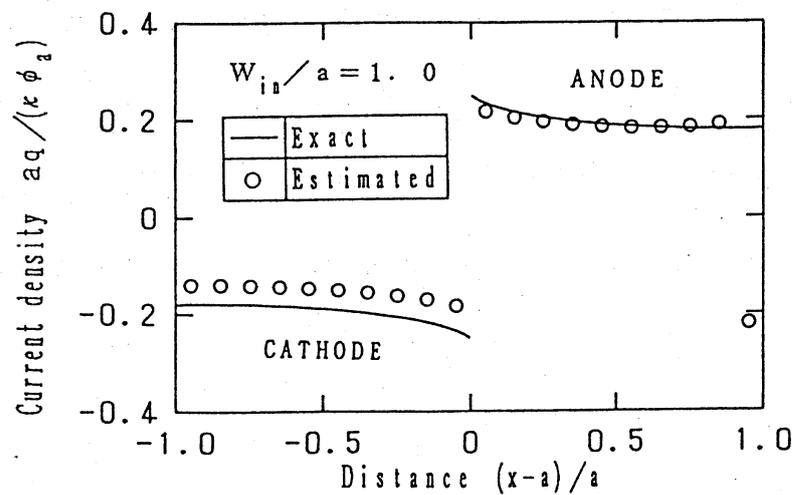
つぎに、観測ベクトルとして(1)各要素の分極曲線の係数を成分に持つ2次元ベクトルとする場合および(2)各要素の分極曲線の係数、電位および電流密度を成分に持つ12次元ベクトルとする場合の二つの場合について、 $\theta = 2$ としてファジー k -means 法によるクラスタリングを行った。

(1)の場合のクラスタリングの結果を、観測ベクトルの α'_p と β'_p 成分をそれぞれ横座標と縦座標として Fig. 8 (a) に示す。○はアノード、●はカソードと判断した要素である。☆および★はそれぞれアノードおよびカソードの平均ベクトルの $\bar{\alpha}'$ 、 $\bar{\beta}'$ 成分である。この $\bar{\alpha}'$ 、 $\bar{\beta}'$ の値を用いて計算した金属表面上の電流密度分布を

Fig.8 (b) に示す. アノード上の右端の要素を誤ってカソードと判断して分類していることがわかる.



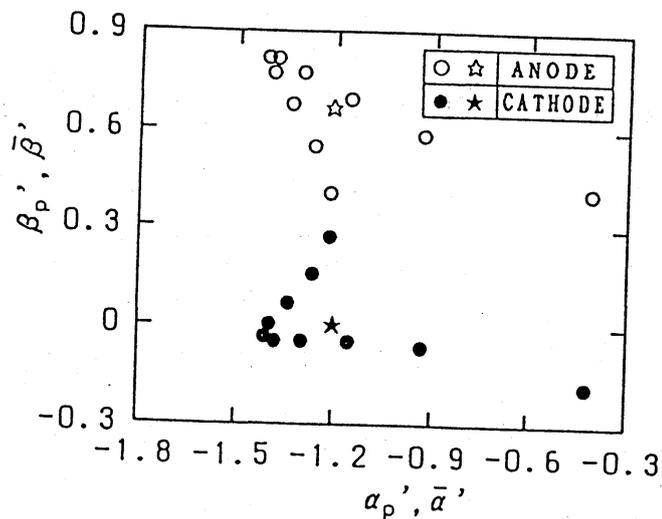
(a) Classification of elements into 2 groups, anode and cathode



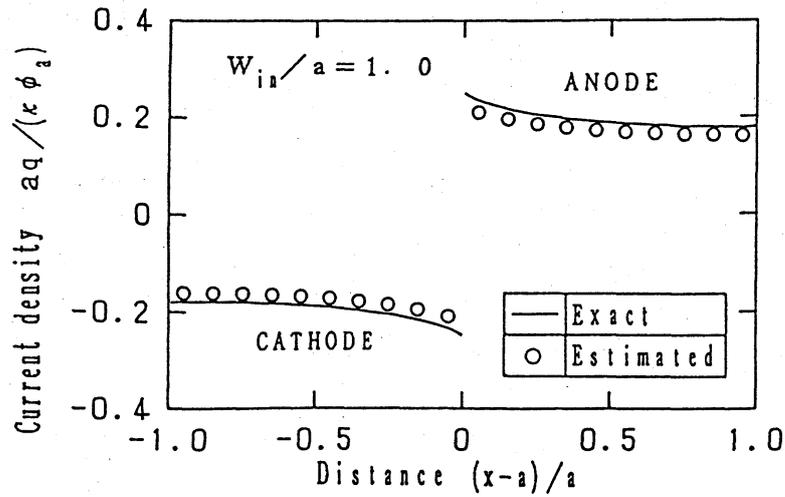
(b) Current density

Fig.8 Current density distribution estimated by clustering method using 2 dimensional observation vectors

(2) の場合の結果を Fig.9 に示す. Fig.9 (a) はクラスタリングの結果であり, 観測ベクトルは 12 次元であるが, そのうち α'_p と β'_p 成分をそれぞれ横座標と縦座標として示している. アノードおよびカソードの平均ベクトルの $\bar{\alpha}'$, $\bar{\beta}'$ 成分の値を用いて金属表面上の電流密度分布を推定した結果を Fig.9 (b) に示す. 溶液表面の電位の値から, 溶液の底に存在する二種類の金属を正確にアノードとカソードに分類し, それぞれの電流密度分布を精度良く推定していることがわかる.



(a) Classification of elements into
2 groups, anode and cathode



(b) Current density

Fig. 9 Current density distribution estimated by clustering method using 12 dimensional observation vectors

8. 結言

溶液内部または溶液表面の電位の測定値から，溶液底または溶液中に存在する金属表面のガルバニック腐食による電流密度分布および電位分布を推定するための逆問題解析を境界要素法により定式化した．得られた線形方程式の組に，特異値分解法および Tikhonov の方法（平滑化法およびスプライン法）の適切化法を施し，推定精度を比較した．さらに精度を向上するために，ファジークラスタリング理論を適用し，例題によりこの方法の有効性を示した．

参考文献

- (1) Aoki, S., et al.: Boundary Element VII, 1, p.269(1985), Springer-Verlag.
- (2) Adey, R.A., et al.: Boundary Element VII, 1, p.14(1985), Springer-Verlag.
- (3) Zamani, N.G., et al.: Int.J.Num. Meth. Engng., 23, p.1295(1986).
- (4) 青木繁ほか2名 : 材料, 37-418, p.757(1988).
- (5) Jin, Z.L., et al.: Boundary Element Method, p.339(1990), Pergamon Press.
- (6) 田辺国土 : 数理科学, 212, p.46(1981).
- (7) K.Kishimoto, K., et al.: JSME Int J., Series I, 32-2, p.256(1989).
- (8) Kress, R.: Linear Integral Equations, 82, p.241(1989), Springer-Verlag.
- (9) 青木繁, 浦井芳洋 : 材料, 40-452, p.619(1991).
- (10) 大隅昇 : 別冊『数理科学』 ファジィ理論への道, p.117(1988), サイエンス社.
- (11) Bezdek, J.C. and Kastelaz, P.S.: IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics, SMC-7-2, p.87(1977).