

Multiple Sine Functions

東大・数理 黒川信重 (Nobushige Kurokawa)

§0. 歴史

(1) サイン(正弦)関数 ... アルキメデス, ..., オイラー, ..., テイリクル, ...
 (加法公式) 1748 1840
 ↓

(2) "2重サイン関数"(名前なし) ... ヘルダー, 新谷
 1886 1977
 ↓

(3) 多重サイン関数 (黒川 1990)

ここでは, (1) における基本的性質として 次の2つを取り挙げる。簡単のため $S_1(x) = 2 \sin(\pi x)$ とおく。

(1-a) 分布性 (distribution property) = 乗法公式:

$$S_1(Nx) = \prod_{k=0}^{N-1} S_1\left(x + \frac{k}{N}\right),$$

$$\text{とくに} \quad \prod_{k=1}^{N-1} S_1\left(\frac{k}{N}\right) = N.$$

(1-b) テイリクルの定理 ("類数公式"の書き換え):

χ を mod N ($N \geq 2$) の原始偶指標とするとき

その テイリクル L 関数

$$L(s, \chi) = \prod_p (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$$

に対し, $s=0$ は 1 位の零点 z あり

$$L'(0, \chi) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \log S_1\left(\frac{k}{N}\right).$$

これは, 通常, 関数等式 $L(s, \chi) \leftrightarrow L(1-s, \bar{\chi})$ を通して

$$L(1, \chi) = -\frac{\tau(\chi)}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \bar{\chi}(k) \log S_1\left(\frac{k}{N}\right),$$

$$\tau(\chi) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) e^{2\pi i k/N} \text{ は ガウス和,}$$

と書かれるものと同値である。

- (2) において ヘルダ^[2] は “2重サイン関数” と呼ばれるべき関数を導入し, 新谷^[6] は (ヘルダ^[2]を引用していながら) 少し変形した “2重サイン関数” を扱ったが, 両者とも記号 $F(z)$ を用いており名前を付けておらず “サイン関数の “2重版” であることがわかりにくくなっている。新谷は (1-b) の実2次体の L 関数への拡張を示した。詳しくは 新谷[6] を参照されたいが, 実2次体 K とある型の指標 χ に対し $L'_K(0, \chi)$ が “2重サイン関数” ($S_2(x, \omega)$ と §3 で書くもの) の \log の

1次結合で表わせることを示した。これは、実2次元の
 類体を構成するというクローネッカーの青春の夢(の実2次
 体版)に連なる結果である。

(3) における応用としては次の2つがある:

(3-a) ヘルダー型多重サイン関数のガンマ因子の計算。

(3-b) セータ関数やL-関数の特殊値の表示。

詳しくは [3]-[5] (1990年8月発表) を参照されたい。

多重サイン関数の拡張の道は次のとおりであり、

この項に解説したい:

$\mathcal{J}_r(x)$: ヘルダー型多重サイン関数

↓

$S_r(x)$: 新谷型多重サイン関数
 (特殊パラメーター)
 ↓

$S_r(x; \omega_1, \dots, \omega_r)$: 新谷型多重サイン関数
 (一般パラメーター)
 ↓

§1. ヘルダー型多重サイン関数 $\mathcal{J}_r(x)$

$r \geq 2$ に対し

$$P_r(x) = (1-x) \exp\left(x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^r}{r}\right)$$

と置き、ヘルダー型多重サイン関数 $\mathcal{J}_r(x)$ を
 次のように定義する:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_r(x) &= \exp\left(\frac{x^{r-1}}{r-1}\right) \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{r-1} \\ &= \exp\left(\frac{x^{r-1}}{r-1}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{r-1} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{r-1} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(x) &= 2 \sin(\pi x) = 2\pi x \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right) \\ &= 2\pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \end{aligned}$$

とある。

たゞし

$$\mathcal{J}_2(x) = e^x \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{2x} \right\},$$

$$\mathcal{J}_3(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} e^{x^2} \right\}$$

である。ルンダ-〔2〕が研究したのは $\mathcal{J}_2(x)$ である。

基本性質 ($r \geq 2$):

① 微分方程式

$$(a) \begin{cases} \frac{J_r'}{J_r}(x) = \pi x^{r-1} \cot(\pi x), \\ J_r(0) = 1. \end{cases}$$

(b) (代数的微分方程式)

$$\begin{cases} J_r''(x) = (1-x^{1-r}) J_r'(x)^2 J_r^{-1}(x) + (r-1)x^{-1} J_r'(x) \\ \quad - \pi^2 x^{r-1} J_r(x), \\ J_r(0) = 1, \\ J_r'(0) = \begin{cases} 1 & \dots r=2 \\ 0 & \dots r \geq 3. \end{cases} \end{cases}$$

[$r=1$ のときは $J_1''(x) = -\pi^2 J_1(x)$ と線型型になるが, $r \geq 2$ のときは非線型.]

② 積分表示

$$J_r(x) = \exp\left(\int_0^x \pi t^{r-1} \cot(\pi t) dt\right),$$

$\Rightarrow \int_0^x \subset \mathbb{C} - \{\pm 1, \pm 2, \dots\}.$

③ ガンマ関数の多重版との関係:

“ r 重ガンマ関数” $G_r(x)$ を

$$g_r(x) = \exp\left((-1)^r \frac{x^{r-1}}{2(r-1)}\right) \prod_{n=1}^{\infty} P_r\left(-\frac{x}{n}\right)^{-n^{r-1}}$$

と定義すると

$$S_r(x) = g_r(x)^{(-1)^r} g_r(-x)^{-1}.$$

これは

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \Gamma(1+x)^{-1} \Gamma(1-x)^{-1}$$

というオイラーによる有名な関係式の類似である。

④

周期性: $S_r(x+1) = S_r(x) \times (\text{lower order})$.

分布性:

$$S_r(Nx) = \left\{ S_r(x) S_r\left(x+\frac{1}{N}\right) \cdots S_r\left(x+\frac{N-1}{N}\right) \right\}^{N^{r-1}} \\ \times (\text{lower order}).$$

⑤ 多重対数との関係: $\text{Im}(x) < 0$ のとき

$$S_r(x) = \exp\left(-\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(2\pi i)^k}{k!} x^k L_{r-k}^i(e^{-2\pi i x})\right) \\ + \frac{\pi i}{r} x^r + \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}} \zeta(r) \\ = \exp\left(-\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}} L_r^i(e^{-2\pi i x}) + (\text{lower order})\right).$$

$\text{Im}(x) \geq 0$ とも同様。こゝで、

$$Li_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}$$

は多重対数。

⑥ ゼータ関数や L 関数の特殊値の表示:

$$\zeta(3) = \frac{8\pi^2}{7} \log\left(\frac{2^{\frac{1}{4}}}{\mathcal{L}_3\left(\frac{1}{2}\right)}\right),$$

$$\zeta(5) = \frac{32\pi^4}{93} \log\left(\frac{\mathcal{L}_5\left(\frac{1}{2}\right) 2^{11/12}}{\mathcal{L}_3\left(\frac{1}{2}\right)^{9/14}}\right),$$

⋮

(注: $\mathcal{L}_1\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, $\mathcal{L}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$, ...)

一般には 帰納的関係式

$$\begin{aligned} \zeta(2m+1) &= (-1)^m \frac{(4\pi)^{2m}}{(2m)!(2^{2m+1}-1)} \log\left(\mathcal{L}_{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right) 2^{-\frac{1}{4^m}}\right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k (2\pi)^{2k} (4^{m-k}-1)}{(2k)!(2^{2m+1}-1)} \zeta(2m-2k+1) \end{aligned}$$

から

$$\zeta(2m+1) = (\text{有理数}) \times \pi^{2m} \times \log\left(\prod_{\substack{k \leq 2m+1 \\ \text{奇数}}} \mathcal{L}_k\left(\frac{1}{2}\right)^{(\text{有理数})}\right)$$

の形となる。この $\zeta(3)$ の式については多重サイン関数を用いてはいなかったが 才行 - (全集 I-15 巻, p.150, 1772 年) を参照されたい。

次に, χ を原始指標 $\text{mod } N$ ($N \geq 2$) で

$\chi(-1) = (-1)^{r+1}$ とすると, 次のように 多重サイン関数の特殊値 $L(r, \chi)$, $L'(1-r, \chi)$ が多重サイン関数の対数を用いて表示できる:

$$L(2, \chi) = -\frac{2\pi i}{N} \tau(\chi) \log \prod_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\mathcal{S}_2\left(\frac{k}{N}\right)}{\mathcal{S}_1\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{k}{N}}} \right)^{\overline{\chi(k)}},$$

$$L'(-1, \chi) = \frac{1}{2} \log \prod_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\mathcal{S}_2\left(\frac{k}{N}\right)}{\mathcal{S}_1\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{k}{N}}} \right)^{\chi(k)},$$

$$L(3, \chi) = \frac{2\pi^2}{N} \tau(\chi) \log \prod_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\mathcal{S}_3\left(\frac{k}{N}\right) \mathcal{S}_1\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{k^2}{N^2}}}{\mathcal{S}_2\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{2k}{N}}} \right)^{\overline{\chi(k)}},$$

$$L'(-2, \chi) = -\frac{1}{2} \log \prod_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\mathcal{S}_3\left(\frac{k}{N}\right) \mathcal{S}_1\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{k^2}{N^2}}}{\mathcal{S}_2\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{2k}{N}}} \right)^{\chi(k)},$$

§2. 新谷型多重サイン関数 $S_r(x)$ (特殊パラメータ)

バーンス型の多重ガンマ関数 $\Gamma_r(x)$ を多重フルビッツ

$$\begin{aligned} \zeta_r(s, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} r H_n (n+x)^{-s} \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 0} (n_1 + \dots + n_r + x)^{-s} \end{aligned}$$

を用いて $\Gamma_r(x) = \exp(\zeta'_r(0, x))$ と定義する。基本的性質については「バーンス」[1]を参照。

たとえば $\Gamma_1(x) = \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}$ となる。さらに

新谷型多重サイン関数 $S_r(x)$ (特殊パラメータ) を

$$S_r(x) = \Gamma_r(x)^{-1} \Gamma_r(r-x)^{(-1)^r}$$

と定義する。たとえば $S_1(x) = 2 \sin(\pi x)$ となる。

基本性質 ($r \geq 2$)

$$\textcircled{0} \quad S_r(x) = C_r \prod_{k=1}^r S_k(x)^{c(r,k)},$$

$$C_r = \begin{cases} 1 & \dots \quad r = \text{even} \\ e^{-2\zeta'(1-r)} & \dots \quad r = \text{odd} \end{cases},$$

$$c(r,k) = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} \binom{k}{l} l^r \in \mathbb{Z}$$

$$(c(r,r) = (-1)^{r-1} (r-1)!, \dots, c(r,1) = 1).$$

$$\textcircled{1} \quad \text{(a)} \quad \frac{S'_r}{S_r}(x) = {}_r H_{-x} \pi \cot(\pi x),$$

$$\text{ただし, } {}_r H_{-x} = (-1)^{r-1} \binom{x-1}{r-1}.$$

$$(b) S_r''(x) = (1 - P(x)^{-1}) S_r'(x)^2 S_r(x)^{-1} + P'(x) P(x)^{-1} S_r'(x) - \pi^2 P(x) S_r(x),$$

ただし, $P(x) = {}_r H_{-x}$.

(2) 周期性: $S_r(x+1) = S_r(x) S_{r-1}(x)^{-1}$

[分布性についてはより一般に §3 (2) 参照]

(3) 階数 1 の任意のセルベ-グ・セータ関数のガンマ因子 (単位因子) が多重サイン関数 $S_r(x)$ を通して計算でき, 結果は $M = \Gamma \backslash G / K$ のセルベ-グ・セータ関数 $Z_M(s)$ のガンマ因子 $\Gamma_M(s)$ と書くと次のとおり:

$$\Gamma_M(s) = \begin{cases} (\Gamma_{2n}(s) \Gamma_{2n}(s+1))^{vol(M)(-1)^{n-1}} & \dots G = SO(1, 2n) \\ \left(\prod_{k=0}^n \Gamma_{2n}(s+k) \binom{n}{k}^2 \right)^{vol(M)(-1)^{n-1}} & \dots G = SU(1, n) \\ \left(\prod_{k=0}^{2n-1} \Gamma_{4n}(s+k) \frac{1}{2n} \binom{2n}{k} \binom{2n}{k+1} \right)^{-vol(M)} & \dots G = Sp(1, n) \\ \left(\Gamma_{16}(s) \Gamma_{16}(s+1)^{10} \Gamma_{16}(s+2)^{28} \Gamma_{16}(s+3)^{28} \Gamma_{16}(s+4)^{10} \Gamma_{16}(s+5) \right)^{-vol(M)} & \dots G = F_4 \end{cases}$$

$$= \det \left(\sqrt{\Delta_{M'} + P_M^2} + S - P_M \right)^{vol(M)(-1)^{dim(M)/2}}$$

ここで $\Delta_{M'}$ は コンパクト双対対称空間 $M' = G'/K$ のラプラス作用素。

金建となるのは $Z_M(s)$ の関数等式

$$Z_M(2p_M - s) = Z_M(s) \exp\left(\text{vol}(M) \int_0^{s-p_M} \mu_M(it) dt\right)$$

($\mu_M(t)$ は フラッシュエレル 測度) において

$$\exp\left(\int_0^{s-p_0} \mu_M(it) dt\right) \stackrel{(\ast)}{=} \begin{cases} S_{2n}(s) S_{2n}(s+1) \dots & G = SO(1, 2n) \\ \prod_{k=0}^n S_{2n}(s+k) \binom{n}{k}^2 \dots & G = SU(1, n) \\ \prod_{k=0}^{2n-1} S_{4n}(s+k) \frac{1}{2^n} \binom{2n}{k} \binom{2n}{k+1} \dots & G = Sp(1, n) \\ S_{16}(s) S_{16}(s+1) S_{16}(s+2) S_{16}(s+3) S_{16}(s+4) S_{16}(s+5) \dots & G = F_4 \end{cases}$$

となることであり、したがって、完備化したゼータ関数

$\hat{Z}_M(s) = Z_M(s) \Gamma_M(s)$ は 対称的関数等式をみたす:

$$\hat{Z}_M(s) = \hat{Z}_M(2p_M - s).$$

同時に、フラッシュエレル 測度 $\mu_M(t)$ のバッチ数型の新公式も得る。
詳しくは [3]-[5] を参照されたい。

④ ゼータ関数 \ast L 関数の特殊値の表示は ③ を通して
§1 と同様である。

§3. 新谷型多重サイン関数 $S_r(x, \omega)$ (一般パラメータ)

パラメータ $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ を“周期”とする多重
サイン関数 $S_r(x, \underline{\omega}) = S_r(x; \omega_1, \dots, \omega_r)$ を次のように

定義する:

$$S_r(x, \underline{\omega}) = \Gamma_r(x, \underline{\omega})^{-1} \Gamma_r(|\underline{\omega}| - x, \underline{\omega})^{(r)},$$

$$\Gamma_r(x, \underline{\omega}) = \exp\left(\zeta_r'(0, x, \underline{\omega})\right),$$

$$\zeta_r(s, x, \underline{\omega}) = \sum_{\underline{n}=(n_1, \dots, n_r) \geq 0} (n \cdot \underline{\omega} + x)^{-s}.$$

ただし, $\zeta_r(s, x, \underline{\omega})$ は一般パラメータの多重ゼータ関数であり, 微分 ζ_r' は $s=1$ に関するものである,

$\Gamma_r(x, \underline{\omega})$ は一般パラメータの多重ガンマ関数。

たとえば, $\Gamma_1(x, \omega) = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\sqrt{2\pi}} \omega^{\frac{x}{\omega} - \frac{1}{2}}$ あり

$$S_1(x, \omega) = 2 \sin\left(\frac{\pi x}{\omega}\right)$$

となる。なお, $|\underline{\omega}| = \omega_1 + \dots + \omega_r$ 。また $S_r(x) = S_r(x(1, \dots, 1))$ 。

基本性質

① 周期性: $S_r(x + \omega_i, \underline{\omega}) = S_r(x, \underline{\omega}) S_{r-1}(x, \underline{\omega}^{(i)})^{-1}$,

$$\underline{\omega}^{(i)} = (\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \dots, \omega_r).$$

なお $S_0(x, \phi) = -1$, $\Gamma_0(x, \phi) = \frac{1}{x}$, $|\phi| = 0$,

$$\zeta_0(s, x, \phi) = x^{-s} \quad \text{と解釈する。}$$

② 分母性: $S_r(Nx, \underline{\omega}) = \prod_{\substack{\underline{k}=(k_1, \dots, k_r) \\ k_i=0, \dots, N-1}} S_r\left(x + \frac{\underline{k} \cdot \underline{\omega}}{N}, \underline{\omega}\right)$,
(乗法公式)

$$\prod_{\substack{r \\ k_i=0, \dots, N-1}} S_r \left(\frac{R \cdot \omega}{N}, \underline{\omega} \right) = N.$$

③ 同次性: ($c > 0$ に対して)

$$S_r(c\alpha, c\underline{\omega}) = S_r(\alpha, \underline{\omega}).$$

④ ゼータ関数や L 関数の特殊値の表示: §1, §2 の結果の拡張として n 次元実代数体 K の指標 χ に対して $L_K(s, \chi)$ が $s=0$ で 1 位の零点をもつとき (\Leftrightarrow ガンマ因子が $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)^{n-1}$) ある $\alpha_j \in K$ を用いて

$$L'_K(0, \chi) \doteq \sum_j c_j \log S_{r_j}(\alpha_j, \underline{\omega}_j)$$

の形の有限和表示が得られる。ただし, $r_j \leq n$.

これは $n=1$ のときは §0 で述べた ディリクレの結果 (1840), $n=2$ のときは 新谷 [6] (1977) の結果の拡張になる。とくに

$$\exp(L'_K(0, \chi)) \doteq \prod_j S_{r_j}(\alpha_j, \underline{\omega}_j)^{c_j}$$

が 新谷-Stark の仮想乗数の表示を与えている。

§1-§3 の記述から明らかのように多重サイン関数の特殊値の研究は重要な課題である。

文 献

- [1] E.W. Barnes: "On the theory of the multiple gamma function" Trans. Cambridge Philos. Soc. 19 (1904) 374-425.
- [2] O. Hölder: "Ueber eine transcendente Function" Göttingen Nachrichten 1886, Nr. 16, pp. 514-522.
- [3] N. Kurokawa: "Multiple sine functions and Selberg zeta functions" Proc. Japan Acad. 67A (1991) 61-64.
- [4] —: "Gamma factors and Plancherel measures" Proc. Japan Acad. 68A (1992) 256-260.
- [5] —: "Multiple zeta functions: an example" Advanced Studies in Pure Math. vol 21 (1992) pp. 219-226 = Proc. of "Zeta Functions in Geometry" (Tokyo, 1990 Aug.) edited by N. Kurokawa and T. Sunada; Kinokuniya, Tokyo.
- [6] T. Shintani: "On a Kronecker limit formula for real quadratic fields" J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 24 (1977) 167-199.