数理解析研究所講究録
第 838 巻 1993 年 68-77

射影群 PE_7 の K 群について

奈良教大　南　春男　(Haruo Minami)

1.　本稿ではコンパクト単連結例外リー群 E_7 の射影群 $PE_7 = E_7/Z(E_7)$ の K 群と KO 群の求め方について述べる．ここで，$Z(E_7)$ は E_7 の中心を表し，$Z(E_7) \cong \boldsymbol{Z}_2$ である．

一般のコンパクト単連結リー群 G についてはつぎのような結果が知られている．$K^*(G)$ の環構造が $Hodgkin$ [4] によって，また，$KO^*(G)$ の群構造が $Seymour$ [7] によって決定されている．射影群 PG については $Z(G) \cong \boldsymbol{Z}_p$,（$p$ 素数），のとき $K^*(PG)$ の環構造が $Hodgkin$ [4] と $Held-Suter$ [3] によって独立に決定されている．したがって，$K^*(PE_7)$ については既に分かっているわけであるが，ここでは [4] 及び [3] とは異なる方法でこれを決定し，同様の方針で $KO^*(PE_7)$ を求めようとする．その際 $K^*(PE_7)$ の結果と途中結果の一部が必要である．さらに，その積構造を調べるため $KO^{-i}(X)$,（i 奇数），の元 x についてのつぎの平方公式を用いる：

$$x^2 = \eta_1 \lambda^2 x \quad (i \equiv 1 \bmod 8), \quad 0 \quad (i \equiv 3 \bmod 4) \quad \text{または} \quad \eta_1^2 \lambda_C^2 x \quad (i \equiv 5 \bmod 8)$$

([2], [5]). ここで，η_1 は $KO^{-1}(+) \cong \boldsymbol{Z}_2$, $(+ = a\ point)$，の生成元を表し，$\lambda_C^2 x$ はつぎに述べる元を表す．$KO^{-5}(X) \cong KSp^{-1}(x)$ であるから x を $KSp^{-1}(x)$ の元とみなし，複素数体上で外積 $x \wedge_C x$ をとるとこれは $KR^{-1}(x)$ $(\cong KO^{-1}(x))$ の元を定義することが分かる．これを $\lambda_C^2 x$ とかく．上に述べたように KO 群については多少煩雑になるが K 群と同様の方法で求めることが出来るので，以下では $K^*(PE_7)$ の求め方について紹介し，

$KO^*(PE_7)$ については結果のみを述べる（詳細は [6] ）.

2. この節では KO と K 群の決定に必要な基本的な事柄を準備する. 先ず E_7 の基本表現について述べる. E_7 の各単純ルートに対応してつぎのような既約複素表現 ρ_1, $\rho_2,\ldots,\rho_7$ が存在することが知られている [8]. ρ_1, ρ_3, ρ_7 は四元数表現の制限で $Z(E_7)$ 上で自明でない. 他のものは実表現の複素化で $Z(E_7)$ 上で自明である. また, それらの複素数体上の次元はつぎの通りである：

$$\rho_1 \ \ 8\cdot 7,\ \rho_2 \ \ 8\cdot 3458,\ \rho_7 \ \ 8\cdot 114\,; \quad \rho_2 \ \ 1539,\ \rho_4 \ \ 365750,\ \rho_5 \ \ 8645,\ \rho_6 \ \ 133$$

$\boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^q$ 上に対合写像 $(u,v) \mapsto (-u,v)$ を与え, このような$\boldsymbol{Z}_2$ 作用 をもったこの空間を $R^{p,q}$ で表す. また原点を中心とする $R^{p,q}$ における単位球, 単位球面をそれぞれ $B^{p,q}, S^{p,q}$ で表し, $\sum^{p,q} = B^{p,q}/S^{p,q}$ とおく. このときこれらはいずれも $\boldsymbol{Z}_2$ 空間となる. とくに最後のものは, つぶれた $S^{p,q}$ を基点としてもつものとする. ここで $G = \boldsymbol{Z}_2$ とおくと, E_7 も部分群としての $Z(E_7)$ の作用で G 空間とみなすことが出来る.

補題 1. E_7 の部分群 S^3 で $Z(E_7)$ を含むものが存在する. つまり $S^{4,0} = S^3$ から E_7 への G 写像 $\iota : S^{4,0} \to E_7$ で準同型写像であるものが存在する.

証明. EVI 型の対称空間を考えると, E_7 は部分群 $K = (Spin(12) \times S^3)/C$ を含むことが分かる. ここで C の作用は対角作用で, $C = \{(g,-1) : 1 \neq g \in Z(Spin(12)),\ -1 \in Z(S^3)\}$. $Clliford$ 加群の生成元を e_1, $e_2,\ldots,e_{12}$ とすると $Z(Spin(12)) = \boldsymbol{Z}_2\cdot(-1) \oplus \boldsymbol{Z}_2\cdot(e_1e_2\cdots e_{12})$. また $Z(K) = Z(Spin(12))$ で $Z(E_7)$ $(\cong \boldsymbol{Z}_2)$ は $Z(K)$ に含まれるか

ら, $Z(E_7)$ の生成元は -1, $e_1e_2\cdots e_{12}$, $-e_1e_2\cdots e_{12}$ のいずれかであることが分かる．ところで E_7 は部分群として $Spin(12)$ を含み, $Spin(12)$ は $Spin(4)\cdot Spin(4)\cdot Spin(4)$ を含む．そこでこれの対角部分群としての $Spin(4)$ を考えると $Spin(4)\cong S^3\times S^3$ であるから， $Z(E_7)$ の生成元が上に述べたどれであるかに応じて求める部分群 S^3 として対角部分群 $\Delta(S^3\times S^3)$, $S^3\times 1$ あるいは $1\times S^3$ のどれかを選べばよいことが分かる．

註） この ι は $S^{5,0}$ 上の G 写像に拡張されない．

$S^{n+1,0}/G=P^n$ ，n 次元実射影空間，であるから，対応 $(x,g)\mapsto([x],\iota(x)g)$ は同相

(1) $$(S^{4,0}\times E_7)/G\approx P^3\times E_7$$

を導く．ここで $[x]$ は x の同値類を表す． $S^{4,0}$ の元を $(x_1,...,x_4,0,...,0)$ とかき，$S^{4,0}$ を $S^{8,0}$ の部分空間とみなす．このとき対応 $(x_1,...,x_8)\mapsto((x_1,...,x_4)\ ,(x_5/\lambda,...,x_8/\lambda))$ ，$(\lambda^2=x_5^2+...+x_8^2,\ \lambda>0)$, で G 同相

(2) $$S^{8,0}/S^{4,0}\approx_G\Sigma^{4,0}\wedge S^{4,0}_+$$

をえる．

3. 空間の対 $(S^{8,0}\times E_7,S^{4,0}\times E_7)$ に対して K_G を適用すると，(2) より $S^{8,0}\times E_7/S^{4,0}\times E_7\approx_G\Sigma^{4,0}\wedge(S^{4,0}\times E_7)_+$ であるから，完全系列

$$\to K_G^*(S^{4,0}\times E_7)\xrightarrow{\delta}\widetilde{K}_G^*(\Sigma^{4,0}\wedge(S^{4,0}\times E_7)_+)\xrightarrow{j^*}K_G^*(S^{8,0}\times E_7)\xrightarrow{i^*}K_G^*(S^{4,0}\times E_7)\to$$

をえる．ここで $i:S^{4,0}\times E_7\to S^{8,0}\times E_7$ は包含写像を，j は射影 $S^{8,0}\times E_7\to S^{8,0}\times E_7/S^{4,0}\times E_7$ と上の G 同相の合成を表す．ところで $K_G^*(S^{4,0}\times E_7)\cong K^*((S^{4,0}\times E_7)/G)$

であるから (1) を用いると $K_G^*(S^{4,0}\times E_7)\cong K^*(P^3\times E_7)$ をえる．また $Thom$ 同型定理から $\widetilde{K}_G^*(\Sigma^{4,0}\wedge(S^{4,0}\times E_7)_+)\cong K_G^*(S^{4,0}\times E_7)$ であるから，これも $K^*(P^3\times E_7)$ に同型であることが分かる．したがって完全系列

(3) $\quad \to K^*(P^3\times E_7)\xrightarrow{\delta}K^*(P^3\times E_7)\xrightarrow{J}K_G^*(S^{8,0}\times E_7)\xrightarrow{I}K^*(P^3\times E_7)\to$

をえる．さらに空間対に対する積に関して

$$\delta(xI(y))=\delta(x)y$$

が成り立つ．写像 $f:X\to GL(n,\boldsymbol{C}\ )$ が与えられたとき，f と $GL(n,\boldsymbol{C}\ )$ の $GL(\infty,\boldsymbol{C}\ )$ への包含写像との合成のホモトピー類 $\beta(f)$ は $K^{-1}(X)$ の元を定義する．このとき，つぎのことが知られている [4]：

$$K^*(E_7)=\bigwedge(\beta(\rho_1),\dots,\beta(\rho_7))$$

したがって $K^*(E_7)$ は自由加群であるから, $K^*(P^3\times E_7)\cong K^*(P^3)\otimes K^*(E_7)$ が成り立つ．以下でこれらを同一視する．また，

$$\widetilde{K}(P^3)=\boldsymbol{Z}_{\ 8}\cdot\gamma_3,\quad K^{-1}(P^3)=\boldsymbol{Z}\ \cdot\nu_3$$

で関係式 $\gamma_3^2+2\gamma_3=0,\ \gamma_3\nu_3=0,\ \nu_3^2=0$ が成り立つ [1]．ここで γ_3 は1次元複素ベクトル·バンドル $(S^{4,0}\times C^{1,0})/G\to P^3$ の簡約ベクトル·バンドルを表す．$C^{1,0}$ は $R^{1,0}$ の複素化である．一般的に $Spin(n)$ は，その元 (-1) が線形的かつ自由に作用する球面 S^{n-1} を含むことが知られている．つまり $S^{n,0}$ を含む．そこで $Spin(4)$ の半スピン表現 $\Delta_4^+:Spin(4)\to GL(2,\boldsymbol{C}\ )$ の $S^{4,0}$ 上への制限を考えると，これは $f([x])=\Delta_4^+(x)^2$ で写像 $f:P^3\to GL(2,\boldsymbol{C}\ )$ を定義する．このとき，$\nu_3=\beta(f)$ ．

これらの情報の下に (3) を用いて $K_G^*(S^{8,0}\times E_7)$ を決定する．そのため，先ずこの群の

生成元の候補を挙げる.

ρ_i, $(i=2,4,5,6)$, は $Z(E_7)$ 上で自明であるので PE_7 の表現とみなすことが出来る. そこで $\beta(\rho_i)$ を $K^{-1}(PE_7)=K_G^{-1}(E_7)$ の元と考える. また, $K^*(P^7)=K_G^*(S^{8,0})$ は P^3 と同様の構造

$$\widetilde{K}(P^7)=\boldsymbol{Z}_8\cdot\gamma_8,\ K^{-1}(P^7)=\boldsymbol{Z}\cdot\nu_8\ ;\ \gamma_7^2+2\gamma_7=0,\ \gamma_7\nu_7=0$$

をもつことが知られている [1]. 2つの射影 $S^{8,0}\times E_7\to S^{8,0}$, $S^{8,0}\times E_7\to E_7$ でこれらの元 γ_7, ν_7, $\beta(\rho_i)$ を引き戻してえられる $K_G^*(S^{8,0}\times E_7)$ の元をそれぞれ ξ, ν, $\beta(\rho_i)$ で表す. つぎに ρ_j, $(j=1,3,7)$, を用いて $K_G^{-1}(S^{8,0}\times E_7)$ の元 β_j を構成する. $S^{8,0}$ を上に述べた $Spin(8)$ の球面と考える. また ρ_j の次元を $8\ell_j$ とかくとき, $Spin(8)$ の半スピン表現 Δ_8^+ が 8 次元であることから写像 $f_j:S^{8,0}\times E_7\to GL(8\ell_j,C)$ を $f_j(x,g)=(\Delta_8^+(x)\otimes I_{\ell_j})\rho_j(g)$ で定義することが出来る. これは $f_j(-x,-g)=f_j(x,g)$ をみたすので $K_G^{-1}(S^{8,0}\times E_7)$ の元を与えることが分かる. これを β_j とかく. このときつぎの結果をえる.

補題 2.

$$K_G^*(S^{8,0}\times E_7)=\bigwedge(\nu,\ \beta(\rho_i),\ \beta_j\mid i=2,4,5,6\ ;\ j=1,3,7)\otimes(Z\cdot 1\oplus Z_8\cdot\xi)/I$$

ここで, $I=(\xi^2+2\xi,\xi\nu)$.

略証. 系列 (3) の写像 δ, I, J を対応する群の生成元および生成元の候補の上で決定すれば (3) の完全性から結論が導かれる. 定義を考察することから先ずつぎの基本的な等式をえる:

$$\delta(\nu_3\times 1)=(\gamma_3+2)\times 1,$$

$$I(\xi) = \gamma_3 \times 1,\ したがって\quad \delta(\gamma_3 \times 1) = 0,$$

$$I(\beta(\rho_i)) = 1 \times \beta(\rho_i),\ したがって\quad \delta(1 \times \beta(\rho_i)) = 0,\ (i = 2, 4, 5, 6).$$

さらに，ρ_j，$(j = 1, 3, 7)$，の次元を $8\ell_j$ とおくと，

$$\beta(\rho_j \iota) = (2k_j + 4\ell_j)\mu^2$$

とかくことが出来る．ここで，$K^{-1}(S^3) = \boldsymbol{Z} \cdot \mu^2$，（$\mu$ は $Bott$ 類）．この k_j を用いて

$$I(\beta_j) = 1 \times \beta(\rho_j) - (k_j + 2\ell_j)\nu_3 \times 1,\ (j = 1, 3, 7),\ したがって$$

$$\delta(1 \times \beta(\rho_j)) = (k_j\gamma_3 + 2k_j + 4\ell_j) \times 1.$$

これらの式から (3) の下に述べた等式 $\delta(xI(y)) = \delta(x)y$ を用いることによって δ が完全に決定され，それから $Ker\delta$ と $Coker\delta$ を求めることが出来る．つぎに J について同様の議論を行う．定義の考察から

$$J(\nu_3 \times 1) = \nu$$

をえる．また定義と上の等式より J を $Coker\delta$ 上で決定することが出来，これらの結果から補題が導かれる．

4. つぎに空間対 $(B^{8,0} \times E_7, S^{8,0} \times E_7)$ に対する同変 K 群の完全系列

$$\to K_G^*(S^{8,0} \times E_7) \to \widetilde{K}_G^*(\Sigma^{8,0} \wedge E_{7+}) \to K_G^*(B^{8,0} \times E_7) \to K_G^*(S^{8,0} \times E_7) \to$$

を考える．このとき，$K_G^*(B^{8,0} \times E_7) \cong K^*(PE_7)$，また $Thom$ 同型定理を用いると $\widetilde{K}_G^*(\Sigma^{8,0} \wedge E_{7+}) \cong K^*(PE_7)$ であるから，上の完全系列は

$$\to K_G^*(S^{8,0} \times E_7) \xrightarrow{\delta} K^*(PE_7) \xrightarrow{J} K^*(PE_7) \xrightarrow{I} K_G^*(S^{8,0} \times E_7) \to$$

とかき直すことが出来る．ところで $\widetilde{K}_G^0(\Sigma^{8,0})$ の $Thom$ 類は射影 $B^{8,0} \to \Sigma^{8,0}$ で $K_G^*(B^{8,0}) = R(G)$ の元 $8(1 - C^{1,0})$ に引き戻されるので，ξ を一次元複素ベクトル・バンドル $(E_7 \times C^{1,0})/G \to PE_7$ の簡約ベクトル・バンドルとすると，

$$J(1) = -8\xi$$

が成り立つ．ここで表現 ρ_1, ρ_7 の次元をみると $8\xi = 0$ であることが分かる．これは J が零写像であることを示す．そこで上の完全系列は短くなり，

$$(4) \qquad 0 \to K^*(PE_7) \xrightarrow{I} K_G^*(S^{8,0} \times E_7) \xrightarrow{\delta} K^*(PE_7) \to 0$$

となる．また前と同様の意味で $\delta(xI(y)) = \delta(x)y$ が成り立つ．表現 ρ_j, $(j = 1,3,7)$, が定義する $K^{-1}(PE_7)$ の元を考える．対応 $[g] \mapsto \rho_j(g)^2$, $(j = 1,3,7)$, の β 構成を $\beta(\rho_j^2)$ とかく．ここで，$[g]$ は E_7 の元 g が与える PE_7 の元を表す．ρ_j の次元をみると対応 $[g] \mapsto (114\rho_1(g))(7\rho_7(g))^{-1}$, $[g] \mapsto (494\rho_1(g))\rho_3(g)^{-1}$, $[g] \mapsto (57\rho_3)(g)(1729\rho_7(g)^{-1}$ が定義されることが分かる．これらの β 構成を $\beta(114\rho_1 - 7\rho_7)$, $\beta(494\rho_1 - \rho_3)$, $\beta(57\rho_3 - 1729\rho_7)$ とかく．このとき，明らかに

$$\beta(57\rho_3 - 1729\rho_7) = 247\beta(114\rho_1 - 7\rho_7) - 57\beta(494\rho_1 - \rho_3)$$

が成り立つ．これらの元について，定義からつぎの等式が成り立つことが分かる．

$$I(\xi) = \xi,\ I(\beta(\rho_i)) = \beta(\rho_i),\ (i = 2,4,5,6),$$

$$I(\beta(114\rho_1 - 7\rho_7)) = (\xi + 1)(114\beta_1 - 7\beta_7),$$

$$I(\beta(494\rho_1 - \rho_3)) = (\xi + 1)(494\beta_1 - \beta_3),$$

$$I(\beta(\rho_j^2)) = (\xi + 1)\beta_j - \ell_j\nu,\ (j = 1,3,7).$$

さらに、

$$\delta(\beta_j) = \ell_j(\xi+1),\ (j=1,3,7),\ \delta(\nu) = \xi+2.$$

この 2 式から

$$\delta((\xi+1)(49\beta_1 - 3\beta_7) - \nu) = 0$$

をえる．そこで (4) の完全性から

$$I(\tau) = (\xi+2)(49\beta_1 - 3\beta_7) - \nu$$

をみたす $K^{-1}(PE_7)$ の元 τ が存在することが分かる．これは $I(\xi\tau)=0$ をみたす．また，I は単射であるから

$$\xi\tau = 0$$

が成り立つ．

定理　3.

$$K^*(PE_7) = \bigwedge(\beta(\rho_i), \beta(114\rho_1 - 7\rho_7), \beta(494\rho_1 - \rho_3), \tau \mid i = 2,4,5,6) \otimes (\boldsymbol{Z} \cdot 1 \oplus \boldsymbol{Z}_8 \cdot \xi)/I$$

ここで，$I = (\xi^2 + 2\xi, \xi\tau)$.

証明．補題 2 と上に述べたことから等式の右辺が $K^*(PE_7)$ の部分環であることが分かる．つぎの等式と上に述べた情報および関係式 $\delta(xI(y)) = \delta(x)y$ を用いて，δ の像を求めると，δ が全射であることから両辺の環が等しいことが分かる：

$$\beta(\rho_1^2) \;=\; 7\tau - 3(\xi+2)\beta(114\rho_1 - 7\rho_7),$$

$$
\begin{aligned}
\beta(\rho_7^2) &= 114\tau - 49(\xi+2)\beta(114\rho_1 - 7\rho_7), \\
\beta(\rho_3^2) &= 3458\tau - 1482(\xi+2)\beta(114\rho_1 - 7\rho_7) - (\xi+2)\beta(494\rho_1 - \rho_3), \\
\delta(\beta_1\beta_3) &= -7(\xi+1)\beta(494\rho_1 - \rho_3), \\
\delta(\beta_1\beta_7) &= -(\xi+1)\beta(114\rho_1 - 7\rho_7), \\
\delta(\beta_3\beta_7) &= -2(\xi+1)\beta(57\rho_3 - 1729\rho_7), \ldots, \\
\delta(\nu\beta_j) &= \beta(\rho_j^2),\ (j = 1,3,7), \ldots.
\end{aligned}
$$

5. 最後に $KO^*(PE_7)$ について結果を述べておく.

定理 4. $KO^*(PE_7) = \Lambda_{KO^*(+)}(\beta(\rho_i), \bar\beta(114\rho_1 - 7\rho_7), \bar\beta(494\rho_1 - \rho_3), \bar\beta(\rho_1^2))$

$$\otimes(\boldsymbol{Z}\cdot 1 \oplus \boldsymbol{Z}_{16}\cdot\xi \oplus \boldsymbol{Z}_2\cdot\alpha \oplus \boldsymbol{Z}_2\cdot\beta)/I$$

ここで, $\bar\beta(\ )$ は (-5) 次元, α, β は (-6) 次元の元である. また, I はつぎの元で生成されるイデアルを表す:

$$\xi^2 + 2\xi,\ 4\eta_4\xi,\ \beta - \xi\alpha,\ \alpha^2,\ \eta_4\alpha,\ \eta_1^2\alpha,\ \alpha\bar\beta(\rho_1^2) - \eta_1^2\xi\beta(\rho_2),\ \bar\beta(\rho_1^2)^2 - \xi\bar\beta(\rho_1^2),$$

$$\beta(\rho_i)^2 - \eta_1(\beta(\lambda^2\rho_i) + d_i\beta(\rho_i)),\ (d_i = dim\rho_i,\ i = 2,4,5,6),\ \bar\beta(114\rho_1 - 7\rho_7)^2 - \eta_1\beta(\lambda_C^2\rho_3),$$

(η_4 は $KO^{-4}(+)$ の生成元).

註) 定理において $\beta(\lambda^2\rho_i)$, $\beta(\lambda_C^2\rho_3)$, $\beta(\lambda_C^2\rho_7)$ の具体的な表現は与えられていないが, $\lambda^2\rho_i$, $\lambda_C^2\rho_3$, $\lambda_C^2\rho_7$ は PE_7 の実表現として $\rho_j \otimes_C \rho_k$, $(j,k = 1,3,7)$, と ρ_i, $(i =$

2, 4, 5, 6), の多項式として記述出来るので，この具体的な形が分かれば，

$$\beta(\rho_j \otimes_{\boldsymbol{C}} \rho_k) = \eta_4(a_j \bar{\beta}(\rho_j^2) + \bar{\beta}(a_j \rho_k - a_k \rho_j)),$$

$(a_j = dim_{\boldsymbol{H}}\ \rho_j)$, であることを用いてこれらを求めることが出来る．

参考文献

[1] *M. F. Atiyah : K − theory, Benjamin Inc.*, 1967.

[2] *M. C. Crabb : $\boldsymbol{Z}_2$ − homotopy theory, London Math. Soc. Lecture Note Series* **44** (1980).

[3] *R. P. Held und U. Suter : On the unitary K − theory of compact Lie groups with finite fundamental group, Quart. J. Math. Oxford* **24** (1973), 343 − 356.

[4] *L. Hodgkin : On the K − theory of Lie groups, Topology* **6** (1967), 1 − 36.

[5] *H. Minami : The real K − groups of $SO(n)$ for $n \equiv 3$, 4 and 5 mod 8, Osaka J. Math.* **25**(1988), 185 − 211.

[6] *H. Minami : On the K − theory of PE_7, to appear in Osaka J. Math.*.

[7] *R. M. Seymour : The Real K − theory of Lie groups and homogeneous spaces, Quart. J. Math. Oxford* **24** (1973), 7 − 30.

[8] *J. Tits : Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen, Springer Lecture Notes in Math.* **40** (1967).