数理解析研究所講究録
第 840 巻 1993 年 121-123

A local characterization of the graph of alternating forms

Akihiro Munemasa （宗政昭弘）

1 グラフの被覆定理

向きのない単純グラフ$\Gamma=(V(\Gamma),E(\Gamma))$を考える。$V(\Gamma)$は頂点の集合、$E(\Gamma)$は辺の集合、つまり$E(\Gamma)$の元は$V(\Gamma)$の2点から成る部分集合である。$\Gamma$は一次元単体的複体と見なすことができ、$\Gamma$のすべての三角形を二次元単体と見なすことによってできる二次元単体的複体を$K(\Gamma)$と書く。

定義. $K(\Gamma)$の$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$係数の一次元ホモロジー群$H_1(K(\Gamma),\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$が0であるとき、グラフ$\Gamma$は triangulable であるという。

辺の集合$E(\Gamma)$を基底とする二元体$GF(2)=\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$上のベクトル空間を$C_1(K(\Gamma),\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$と書き、$\Gamma$の cycle で生成された$C_1(K(\Gamma),\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$の部分空間を$Z_1(K(\Gamma),\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$と書く。すると、$\Gamma$が triangulable とは、$Z_1(K(\Gamma),\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$が$\Gamma$の三角形全体で生成されるということと同値である [4]。平たく言えば、Γの任意の cycle が三角形だけを通って一点につぶすことができるという条件が triangulable ということにほかならない。xをグラフΓの頂点とする時、$\Gamma_i(x)$をxから距離i離れた頂点の集合、$\Gamma(x)=\Gamma_1(x)$、$x^\perp=\{x\}\cup\Gamma(x)$とする。次の補題はグラフ$\Gamma$が triangulable であるための十分条件を与える。

補題. Γをグラフとする。任意の頂点γと、隣接した二つの頂点$\delta_0,\delta_1\in\Gamma_j(\gamma)$, $j\geq 2$, に対して、

(i) $\Gamma(\delta_0)\cap\Gamma_{j-1}(\gamma)$は連結、

(ii) $\Gamma(\delta_0)\cap\Gamma_{j-1}(\gamma)$と$\Gamma(\delta_1)\cap\Gamma_{j-1}(\gamma)$の距離は高々1であるとする。

このときΓは triangulable である。

これから述べる被覆定理によって、triangulable という性質は普遍被覆に対応するものであると言うことができる。被覆定理を述べるため、いくつかの定義をする。Γ,Δをグラフとする。Γが locally Δとは、Γの任意の頂点xに対して、xの近傍$\Gamma(x)$とΔとが同型であるときをいう。特に任意の二つの頂点x,yに対して$\Gamma(x)\cong\Gamma(y)$なので、実はこれはかなりきつい条件である。もしΓの自己同型群が頂点上可移ならば、この条件を満たす。$\Gamma,\tilde{\Gamma}$を共に locally Δである グラフとし、$v,\tilde{v}$をそれぞれ$\Gamma,\tilde{\Gamma}$の頂点とする。同型$\varphi:\tilde{v}^\perp\to v^\perp$は、全射$\varphi':\tilde{v}^\perp\cup\tilde{\Gamma}_2(\tilde{v})\to v^\perp\cup\Gamma_2(v)$であって$\varphi'|_{\tilde{v}^\perp}=\varphi$でかつ辺を辺に移すものが一意的に存在するとき extendable という。このときφ'はφの拡張であるという。φ'は単射でなくてもよい。また、辺でない2点がφ'によって辺に移ってもよい。

被覆$\varphi:\tilde{\Gamma}\to\Gamma$とは、$\tilde{\Gamma}$の頂点集合から$\Gamma$の頂点集合への全射で辺を辺に移し、$\varphi(\tilde{v})=v$となる任意の頂点$\tilde{v},v$に対し$\varphi|_{\tilde{\Gamma}(\tilde{v})}$が$\tilde{\Gamma}(\tilde{v})$ から $\Gamma(v)$ への全単射になるものをいう。

定理. $\Gamma,\tilde{\Gamma},\Delta$をグラフとし、$\Gamma,\tilde{\Gamma}$は共に locally Δである連結グラフとする。
(i) $\tilde{\Gamma}$の頂点$\tilde{v}_0$とΓの頂点 v_0、及び extendable な同型$\varphi_0:\tilde{v}_0^{\perp}\to v_0^{\perp}$が存在する。
(ii) $\tilde{v},v$がそれぞれ$\tilde{\Gamma},\Gamma$の頂点であり、$\varphi:\tilde{v}^{\perp}\to v^{\perp}$が extendable な同型、$\varphi'$をその拡張とする。$\tilde{w}\in\tilde{\Gamma}(\tilde{v})$ ならば、$\varphi'|_{\tilde{w}^{\perp}}:\tilde{w}^{\perp}\to\varphi(\tilde{w})^{\perp}$は extendable である。
(iii) $\tilde{\Gamma}$は triangulable。
このとき被覆$\tilde{\Gamma}\to\Gamma$が存在する。

2 交代形式のグラフ

交代形式のグラフ Alt(n,q) とは $GF(q)$ 上の n 次元ベクトル空間 V 上の交代形式全体の集合を頂点の集合とし、二つの頂点γ,δの差の階数が 2 のとき辺で結ぶことによって得られるグラフである。交代形式全体の集合は $n(n-1)/2$ 次元の $GF(q)$ 上のベクトル空間と見なすことができ、これより明らかに、Alt(n,q) の自己同型群は頂点上可移である。頂点 0 の近傍は階数 2 の交代形式全体の集合である。写像$\gamma\mapsto\mathrm{Rad}\gamma\in\left[{V\atop n-2}\right]$を考えることにより、0 の近傍はグラスマングラフ$\left[{V\atop n-2}\right]\cong\left[{V\atop 2}\right]$の $(q-1)$-クリーク拡大と同型であることがわかる。ここで、グラスマングラフとは、Vの 2 次元部分空間の集合$\left[{V\atop 2}\right]$を頂点集合とし、二つの 2 次元部分空間が 1 次元部分空間で交わるとき辺で結ぶことによって得られるグラフである。またグラフの m-クリーク拡大とは、すべての頂点を m-クリーク（m 点の完全グラフ）で置き換えて得られるグラフである。グラフΓの、距離が 2 離れた任意の 2 点α,βに対して $|\Gamma(\alpha)\cap\Gamma(\beta)|$ が一定のとき、この値を$\mu(\Gamma)$ で表わす。特に、Alt(n,q) はこの性質を持ち、$\mu(\mathrm{Alt}(n,q))=q^2(q^2+1)$ である。これで主定理を述べることができる。

定理. (Munemasa–Shpectorov [6]) Vを $GF(q)$ 上の n 次元ベクトル空間 $(n\geq 4,\ q\geq 3)$、Δをグラスマングラフ$\left[{V\atop 2}\right]$の $(q-1)$-クリーク拡大とする。連結グラフΓが locally Δで $\mu(\Gamma)=q^2(q^2+1)$ ならば、Alt(n,q) からΓへの被覆が存在する。

上の定理で $n\leq 3$ とするとΔは完全グラフになってしまい、locally 完全グラフな連結グラフは完全グラフしかない。一方 $q=2$ の場合は nontrivial で、上の定理は成立しない。二次形式のグラフ Quad$(n-1,2)$ がその反例である。$q=2$ の場合についての結果の詳細は、[5] を参照していただきたい。上の定理でもし $|\Gamma|=|\mathrm{Alt}(n,q)|$ ならば、被覆写像は必然的に同型となる。定理の意味は、Alt(n,q) が上の定理の条件をみたすグラフΓのうち最大のものであるということである。ならば、実際に Alt(n,q) で被覆される Alt(n,q) 以外のグラフにはどんなものがあるだろうか。Alt(n,q) の頂点集合はベクトル空間、特にアーベル群の構造をもつことは前に述べたが、その部分群 Hで次の条件をみたすものを考える。

$$\alpha\in H,\ \alpha\neq 0\Rightarrow \mathrm{rank}\alpha\geq 10.$$

言い換えれば、コード Hの minimum weight が 5 以上であるということである。このと

き Hによる剰余群上に自然にグラフを定義することができる。つまり、ある$\gamma \in \alpha + H$と$\delta \in \beta + H$があってγとδが $\mathrm{Alt}(n, q)$ において結ばれているときに$\alpha + H$と$\beta + H$を結ぶわけである。このようにして得られた剰余グラフは、上の定理の仮定をみたし、$\mathrm{Alt}(n, q)$ からの自然な射影が被覆写像になっている（$\mathrm{Alt}(n, q)$ におけるコード理論については [3] 参照)。

さて被覆定理を使って主定理を導くわけだが、そのためには$\tilde{\Gamma} = \mathrm{Alt}(n, q)$ として被覆定理の仮定 (i)–(iii) を示す必要がある。条件 (iii)、つまり $\mathrm{Alt}(n, q)$ が triangulable であることは、補題の仮定を確かめればよいことになる。実はこれは簡単で、[1], p.288 に載っている。そこには $\mathrm{Alt}(n, q)$ が antipodal cover を持たないということの、van Bon による証明と書かれているが、実際は補題の仮定を確かめていることにほかならない。被覆定理の仮定 (i),(ii) を確かめるのはかなり面倒で、詳細は原論文 [6] にゆずる。なぜなら$\tilde{\Gamma}(\tilde{v}_0) \cong \Gamma(v_0)$ と$\mu(\tilde{\Gamma}) = \mu(\Gamma)$ から$\tilde{v}^\perp \cup \tilde{\Gamma}_2(\tilde{v}_0) \cong v_0^\perp \cup \Gamma_2(v_0)$ を導かなくてはならないからである。一般に任意の同型$\varphi : \tilde{v}_0^\perp \to v_0^\perp$ は必ずしも extendable ではない。これがいつ extendable かを記述するのがグラフにおける“線”の概念である。一般に、グラフの辺に対してその辺を含む maximal clique 全体の交わりを“線”と呼ぶことにより、incidence geometry を構成することができる。我々の場合、線は q個の頂点から成り、同型写像$\varphi : \tilde{v}_0^\perp \to v_0^\perp$のうち線を線に移すものだけが extendable になるのである。

References

[1] A. E. Brouwer, A. M. Cohen and A. Neumaier, Distance-Regular Graphs, Springer, Berlin-Heidelberg 1989.

[2] A. M. Cohen and E. E. Shult, Affine polar spaces, Geometriae Dedicata 35 (1990) 43–76.

[3] P. Delsarte and J.-M. Goethals, Alternating bilinear forms over GF(q), J. Combin. Th. (A) 19 (1975) 26–50.

[4] P. Duchet, M. Las Vergnas, and H. Meyniel, Connected cutsets of a graph and triangle bases of the cycle space, Discrete Math. 62 (1986) 145–154.

[5] A. Munemasa, D. V. Pasechnik and S. V. Shpectorov, Characterization of the graph of alternating forms and the graph of quadratic forms over GF(2), *in* A. Beutelspacher, F. Buekenhout, F. De Clerck, J. Doyen, J. W. P. Hirschfeld, and J. A. Thas, eds., *Finite Geometry and Combinatorics*, to appear, Cambridge University Press, 1993.

[6] A. Munemasa, S. V. Shpectorov, A local characterization of the graphs of alternating forms, *in* A. Beutelspacher, F. Buekenhout, F. De Clerck, J. Doyen, J. W. P. Hirschfeld, and J. A. Thas, eds., *Finite Geometry and Combinatorics*, to appear, Cambridge University Press, 1993.