数理解析研究所講究録
第840巻 1993年 88-97



# The little q-Jacobi polynomial associated with a q-Selberg integral

九大・理　三町 勝久 (Katsuhisa Mimachi)

考えたいのは次のような積分表示された z に関する函数である。

$$\int \Pi_{i=3}^{N}(x_i-z)\Phi d\tau \ /\int\Phi d\tau .$$

ここで $\int Fd\tau=\int F(x_3,\ldots,x_N)d_qx_3\ldots d_qx_N$ は領域 $[0,1]^{N-2}$ 上の Jackson 積分で

$$\int Fd\tau = (1-q)^{N-2}\Sigma_{\nu_3,\ldots,\nu_N\geq 0} F(q^{\nu_3},\ldots,q^{\nu_N})\, q^{\nu_3+\cdots+\nu_N} .$$

と定義し Φ は $\lambda\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$ 及び $\lambda', \lambda''>-1$ に対して

$$\Phi=\Phi(x_3,\ldots,x_N)=\prod_{3\leq k\leq N} x_k^{\lambda'}(x_k;q)_{\lambda''} \prod_{3\leq k_1<k_2\leq N} x_{k_2}^{2\lambda}(q^{-\lambda}x_{k_1}/x_{k_2};q)_{2\lambda}$$

なる有理型函数とする。以下 q-解析の記号 $(a;q)_\infty=\Pi_{k\geq 0}(1-aq^k)$, $(a;q)_\beta=(a;q)_\infty/(aq^\beta;q)_\infty$ 及び $[\alpha]=(1-q^\alpha)/(1-q)$ をふんだんに用いる。すると次が得られる。

**Theorem.** $\alpha=((\lambda'+1)/\lambda)-1$, $\beta=((\lambda''+1)/\lambda)-1$ として

$$\int \Pi_{i=3}^{N}(x_i-z)\Phi d\tau \ /\int\Phi d\tau$$

$$= q^{\frac{\lambda}{2}(N-2)(N-3)+(N-2)} \frac{(q^{\lambda'+1};q^\lambda)_{N-2}}{(q^{\lambda'+\lambda''+2+\lambda(N-3)};q^\lambda)_{N-2}}\, p_{N-2}^{(\alpha,\beta)}(z/q:q^\lambda).$$

ここで右辺に現れている $p_n^{(\alpha,\beta)}(z:q)$ は Little q-Jacobi 多項式 ([ 1 ])

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(x:q)= {}_2\varphi_1\left[\begin{matrix} q^{-n},\ q^{\alpha+\beta+n+1} \\ q^{\alpha+1} \end{matrix} ;\ q,\ qz\right]$$

$$= \Sigma_{k\geq 0} \frac{(q^{-n};q)_k(q^{\alpha+\beta+n+1};q)_k}{(q;q)_k(q^{\alpha+1}q;q)_k} (qz)^k$$

であり、 量子群の球函数などとしても自然にこの世に現れる直交多項式である。

今回はこの定理の証明法について簡単な解説を行う。実は定理の主張自信は既に金子譲一氏によりなされている([ 4 ])が、その証明法は強く組み合わせ論に因っている。より具体的には MacMahon の定理を使って q-差分作用素の modulo 計算を行うというものである(といっても、まだ証明はどこにも書いてないようで private communication による。[ 3 ]も参照)。それはそれでなかなか興味深いのであるが、いろいろ勘定するのがやっかいで、それをなんとか避けたい。また、この定理の古典極限にあたる物は青本和彦氏により得られている([ 2 ])が、そこで用いられたアイディアは積分の被積分函数の対称性を考察することであった。 がしかし q-case の場合そのような対称性は壊れてしまう。 この辺をなんとか旨く処理出来ないものか? これが今回の話の動機の一つで、 結論は ある one-cocycle の導入である。

我々の基本的な道具は上の Φ に付随した次の有理函数 $C_\sigma$ である。具体的には対称群 $S_{N-2}$ の元 $\sigma$ に対し

$$C_\sigma=\mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{3\leq k_1<k_2\leq N} \frac{(\sigma(k_2),\sigma(k_1))'}{(k_2,k_1)'}$$

と置く、すると $C_{\sigma_1\sigma_2}=C_{\sigma_2}(\sigma_2 C_{\sigma_1})$ (対称群の作用の定義は下に書いてあ

る通り）が成り立ち 対称群の one cocycle であることが判る。 ただしここで $3\le k_1, k_2\le N$ に対して

$$(k_2,k_1)'=x_{k_2}-q^{-\lambda}x_{k_1} \quad \text{and} \quad (k_2,k_1)=x_{k_2}-q^{\lambda}x_{k_1}$$

なる省略記号を用いた。以下では更に形式的に $x_1=0$, $x_2=1$ と置き $3\le k\le N$ にたいして省略記号 $(k,1)=x_k$, $(k,2)'=x_k-x_2$ を定める事にする。この one cocycle は ある Holonomic q-difference system の考察の過程で既に［5］で用いられた。実際の順序としてはこの［5］の議論ができてはじめて上の疑問に答えられたというのが本当の所。

早速 我々の基本補題を延べよう。

**Lemma 1.** 対称群の作用を $\sigma(F)(x_3,\ldots,x_N)=F(x_{\sigma(3)},\ldots,x_{\sigma(N)})$ で定めると $\sigma\in S_{N-2}$ に対して

$$\int \Phi F d\tau = \int \Phi C_\sigma \sigma(F) d\tau .$$

証明は互換 $\sigma_j=(j,j+1)$ with $3\le j\le N-1$ に対して行えば十分であるがそれも

$$x_{k_2}^{2\lambda}(q^{-\lambda}x_{k_1}/x_{k_2};q)_{2\lambda}=\frac{x_{k_1}-q^{\lambda}x_{k_2}}{q^{\lambda}x_{k_1}-x_{k_2}}\; x_{k_1}^{2\lambda}(q^{-\lambda}x_{k_2}/x_{k_1};q)_{2\lambda},$$

なる計算に注意すれば簡単である。 この単純な命題が非常に大きな威力を発揮する。 もっといえば q の場合に壊れた対称性を回復させている。 実際以下の証明は我々の定理の古典極限である［2］の証明をそのままなぞっている。

つぎの補題をみよう。

**Lemma 2.** (1) For $4\le k\le j\le N$;

$$\int \Phi \frac{(4,3)\ldots(k-1,3)}{(4,3)'\ldots(k-1,3)'} \frac{(3,1)\ldots(j,1)}{(k,3)'} d\tau = 0.$$

(2) For $j+1 \leq k \leq N$;

$$\int \Phi \frac{(4,3)\ldots(k-1,3)}{(4,3)'\ldots(k-1,3)'} \frac{(3,1)\ldots(j,1)}{(k,3)'} d\tau$$

$$= -\frac{q^{\lambda(k-4)}}{1+q^{-\lambda}} \int \Phi\ (3,1)\ldots(j-1,1) d\tau.$$

(3) For $4 \leq j \leq N$;

$$\int \Phi \frac{(4,3)\ldots(N,3)}{(4,3)'\ldots(N,3)'} (4,1)\ldots(j,1) d\tau$$

$$= q^{\lambda(N-3)} \int \Phi\ (3,1)\ldots(j-1,1) d\tau.$$

(4) For $4 \leq j \leq N$;

$$\int \Phi \frac{(4,3)\ldots(N,3)}{(4,3)'\ldots(N,3)'} \frac{(3,1)\ldots(j,1)}{(3,2)'} d\tau$$

$$= q^{\lambda(N-3)} \{ \int \Phi (3,1)\ldots(j-1,1) d\tau + \int \Phi \frac{(3,1)\ldots(j-1,1)}{(N,2)'} d\tau \}.$$

（証明）(1) 対称群の元 $\sigma = \sigma_{k-2} \cdots \sigma_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & \cdots & k-1 & k & \cdots & N \\ k-1 & 3 & \cdots & k-2 & k & \cdots & N \end{bmatrix}$ にたいして $C_\sigma = q^{\lambda(k-4)} \frac{(3,k-1)'\ldots(k-2,k-1)'}{(3,k-1)\ldots(k-2,k-1)}$ が得られることは $C_\sigma$ の定義と簡単な関係 $(k_2,k_1)' = -q^{-\lambda}(k_1,k_3)$ を考え併せると直ぐに判るので lemma 1 を適用すると

$$\int \Phi \frac{(4,3)\ldots(k-1,3)}{(4,3)'\ldots(k-1,3)'} \frac{(3,1)\ldots(j,1)}{(k,3)'} d\tau$$

$$= q^{\lambda(k-4)} \int \Phi \frac{(3,1)\ldots(j,1)}{(k,k-1)'} d\tau.$$

ここで lemma 1 で $\sigma_{k-1}$ としたものを最後の積分に適用すると符号だけが

変わる。ということは積分の値は 零でなくてはならない。

(2) 全く同じく

$$\int \Phi \frac{(4,3)\ldots(k-1,3)}{(4,3)'\ldots(k-1,3)'} \frac{(3,1)\ldots(j,1)}{(k,3)'} d\tau$$

$$=q^{\lambda(k-4)}\int \Phi \frac{(3,1)\ldots(j-1,1)(k-1,1)}{(k,k-1)'} d\tau.$$

他方 lemma 1 で $\sigma=\sigma_{k-1}$ としたものより

$$\int \Phi \frac{(3,1)\ldots(j-1,1)(k-1,1)}{(k,k-1)'} d\tau$$

$$= - \int \Phi \frac{(3,1)\ldots(j-1,1)(k,1)}{(k,k-1)'} d\tau$$

$$= - \int \Phi \frac{(3,1)\ldots(j-1,1)\{(k,k-1)'+q^{-\lambda}(k-1,1)\}}{(k,k-1)'} d\tau$$

$$= - \int \Phi(3,1)\ldots(j-1,1)d\tau - q^{-\lambda}\int \Phi \frac{(3,1)\ldots(j-1,1)(k-1,1)}{(k,k-1)'} d\tau$$

なので

$$\int \Phi \frac{(3,1)\ldots(j-1,1)(k-1,1)}{(k,k-1)'} d\tau = - \frac{1}{1+q^{-\lambda}} \int\Phi(3,1)\ldots(j-1,1)d\tau.$$

を得る。これらを合わせれば目的の式が得られた。

以下 (3),(4) もだいたい同じように導かれる。

**Lemma 3.**

$$\int \Phi \frac{(3,1)\ldots(j-1,1)}{(N,2)'} d\tau$$

$$= q^{\lambda(j-N)-\lambda'-1} \frac{[\lambda'+\lambda''+1+\lambda(N-j)]}{[\lambda'']} \int \Phi(3,1)\ldots(j-1,1)d\tau.$$

証明. q-差分作用素を

$$\partial_3 f(x_3,\ldots,x_N)=\{f(x_3,\ldots,x_N)-f(qx_3,\ldots,x_N)\}/\{x_3(1-q)\},$$

と定義して

$$\partial_3\{\Phi(3,1)\ldots(j,1)\}$$

$$=\Biggl[\ q^{\lambda}[-2\lambda]\Bigl\{\frac{1}{(4,3)'}+\frac{(4,3)}{(4,3)'}\frac{1}{(5,3)'}+\cdots+\frac{(4,3)\ \cdots(N-1,3)}{(4,3)'\cdots(N-1,3)'}\frac{1}{(N,3)'}\Bigr\}$$

$$\times(3,1)\ldots(j,1)$$

$$+\frac{(4,3)\ \cdots(N,3)}{(4,3)'\cdots(N,3)'}\Bigl\{[\lambda'+1](4,1)\ldots(j,1)$$

$$+q^{\lambda'+1}[\lambda'']\frac{(3,1)\ \cdots(j,1)}{(3,2)'}\Bigr\}\Biggr]\Phi.$$

ここで Jackson 積分をとって lemma 2 を用いれば OK. ■

**Lemma 4.** For $j\le s\le N$,

$$\int\Phi(3,1)\ldots(j-1,1)(s,1)d\tau=q^{\lambda(s-j)}\int\Phi(3,1)\ldots(j-1,1)(j,1)d\tau.$$

**証明.** 簡単な関係

$$\frac{(s,1)(s,s-1)}{(s,s-1)'}=(s,1)+(q^{-\lambda}-q^{\lambda})\frac{(s,1)(s-1,1)}{(s,s-1)'},$$

に注意して

$$\int\Phi(3,1)\ldots(j-1,1)(s,1)d\tau=\int\Phi(3,1)\ldots(j-1,1)\frac{(s,1)(s,s-1)}{(s,s-1)'}d\tau$$

$$+(q^{\lambda}-q^{-\lambda})\int\Phi(3,1)\ldots(j-1,1)\frac{(s,1)(s-1,1)}{(s,s-1)'}d\tau$$

を得るが 第1項は 結局 $q^{\lambda}\int\Phi(3,1)\ldots(j-1,1)(s-1,1)d\tau$ になり第2項は零になるので OK. ■

**Lemma 5.** (1) For $4 \leq k \leq j \leq N$;

$$\int \Phi \frac{(4,3)\ldots(k-1,3)}{(4,3)'\ldots(k-1,3)'} \frac{(3,1)^2(4,1)\ldots(j,1)}{(k,3)'} d\tau$$

$$= -\frac{q^{\lambda(k-4)}}{1+q^{-\lambda}} \int \Phi(3,1)\ldots(j,1)d\tau.$$

(2) For $j+1 \leq k \leq N$;

$$\int \Phi \frac{(4,3)\ldots(k-1,3)}{(4,3)'\ldots(k-1,3)'} \frac{(3,1)^2(4,1)\ldots(j,1)}{(k,3)'} d\tau$$

$$= -q^{\lambda(2k-4-j)}\int\Phi(3,1)\ldots(j,1)d\tau.$$

(3) For $3 \leq j \leq N$;

$$\int \Phi \frac{(4,3)\ldots(N,3)}{(4,3)'\ldots(N,3)'} (3,1)\ldots(j,1)d\tau$$

$$= q^{\lambda(2N-j-3)}\int \Phi (3,1)\ldots(j,1)d\tau.$$

(4) For $4 \leq j \leq N$;

$$\int \Phi \frac{(4,3)\ldots(N,3)}{(4,3)'\ldots(N,3)'} \frac{(3,1)^2(4,1)\ldots(j,1)}{(3,2)'} d\tau$$

$$= q^{\lambda(2N-j-3)}\int \Phi(3,1)\ldots(j,1)d\tau$$

$$- q^{\lambda(j-3)-\lambda'-1} \frac{[\lambda'+1+\lambda(N-j)]}{[\lambda'']} \int\Phi(3,1)\ldots(j-1,1)d\tau.$$

証明のアイディアは今までと同じなので証明は略す。そして定理。

**Theorem 1.** For $3 \leq j \leq N$,

$$\int\Phi(3,1)\ldots(j,1)d\tau$$

$$= q^{\lambda(j-3)(j-2)/2+(j-2)}\,\Pi_{i=3}^{j}\ \frac{[\lambda'+1+\lambda(N-i)]}{[\lambda'+\lambda''+2+\lambda(2N-i-3)]}\int\Phi d\tau.$$

証明は j を $3\le j\le N$ と固定して

$$\partial_3\{\Phi(3,1)^2(4,1)\ldots(j,1)\}$$

$$=\Bigg[\ q^{\lambda}[-2\lambda]\Big\{\frac{1}{(4,3)'}+\frac{(4,3)}{(4,3)'}\frac{1}{(5,3)'}+\cdots+\frac{(4,3)\cdots(N-1,3)}{(4,3)'\cdots(N-1,3)'}\frac{1}{(N,3)'}\Big\}$$

$$\times(3,1)^2(4,1)\ldots(j,1)$$

$$+\frac{(4,3)\cdots(N,3)}{(4,3)'\cdots(N,3)'}\Big\{[\lambda'+2](3,1)\ldots(j,1)$$

$$+q^{\lambda'+2}[\lambda'']\,\frac{(3,1)^2(4,1)\cdots(j,1)}{(3,2)'}\Big\}\Bigg]\Phi.$$

ここに lemma 5 を逐次用いれば終わり。■

この定理は Kadell が q-Selberg 積分の公式を証明する際に必要とする式([ 3 ] の (5.7))に等しいことを注意しておく。

**Theorem 2.** $\alpha=((\lambda'+1)/\lambda)-1$, $\beta=((\lambda''+1)/\lambda)-1$ として

$$\int\Pi_{i=3}^{N}(x_i-z)\Phi d\tau\ /\int\Phi d\tau$$

$$= q^{\frac{\lambda}{2}(N-2)(N-3)+(N-2)}\ \frac{(q^{\lambda'+1};q^{\lambda})_{N-2}}{(q^{\lambda'+\lambda''+2+\lambda(N-3)};q^{\lambda})_{N-2}}\ p_{N-2}^{(\alpha,\beta)}(z/q:q^{\lambda}).$$

証明. 直接計算により

$$\int\Pi_{i=3}^{N}(x_i-z)\Phi d\tau$$

$$=\int \{ \Sigma_{\ell=0}^{N-2} \{ \sum_{3\le i_1<\cdots<i_{N-2-\ell}\le N} x_{i_1}\cdots x_{i_{N-2-\ell}} (-z)^{\ell} \}\} \Phi d\tau$$

$$= \Sigma_{\ell=0}^{N-2}(-z)^{\ell} \sum_{3\le i_1<\cdots<i_{N-2-\ell}\le N} \int x_{i_1}\cdots x_{i_{N-2-\ell}} \Phi d\tau .$$

Lemma 4 より

$$\int x_{i_1}\cdots x_{i_{N-2-\ell}} \Phi d\tau$$

$$= q^{\lambda\{(i_1-3)+(i_2-4)+\cdots+(i_{N-2-\ell}-N-\ell)\}} \int x_3 \cdots x_{N-\ell} \Phi d\tau .$$

一方で有名な関係式

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_{N-2-\ell}\le N-2} q^{\lambda\{(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_{N-2-\ell}-N-\ell-2)\}}$$

$$= \frac{(q^{\lambda};q^{\lambda})_{N-2}}{(q^{\lambda};q^{\lambda})_{\ell}(q^{\lambda};q^{\lambda})_{N-2-\ell}}$$

を思い出せば、あとはすこし厄介な計算の後に我々の定理が現れる。■

以上 詳しくは [ 6 ] を参照のこと。

References.

[ 1 ] G.Andrews and R.Askey, Classical orthogonal polynomials, Lecture note in Math. 1171, Springer 1985, pp36-62.

[ 2 ] K.Aomoto, Jacobi polynomials associated with Selberg integrals, SIAM J. Math. Anal., **18**(1987), pp.545-549.

[ 3 ] K.W.J.Kadell, A proof of Askey's conjectured q-analogue of Selberg's integral and a conjecture of Morris, SIAM J. Math. Anal., **19**(1988), pp.969-986.

[ 4 ] J.Kaneko, Selberg integrals and hypergeometric functions. In: M.Yoshida (ed.), Special Differential Equations. Proceedings of the Taniguchi workshop 1991, pp.62-68. Kyushu Univ.

[ 5 ] K.Mimachi, Holonomic q-difference system of the first order associated with the Jackson integral of Selberg type, preprint 1992.

[ 6 ] ————, The little q-Jacobi polynomial associated with a q-Selberg integral, preprint 1993.