

一般化されたスピンモデル

九大理 坂内悦子 (Etsuko Bannai)

スピンモデルは Jones [6] によって定義された。

定義 1. (Symmetric spin model) 有限集合 X と $X \times X$ 上に定義された複素数値関数 w_+, w_- が与えられたとき次の条件 (0), (1), (2), (3) が任意の $\alpha, \beta, \gamma \in X$ に対して成立つ時 (X, w_+, w_-) をスピンモデルと呼ぶ。

(0) (Symmetric condition)

$$w_+(\alpha, \beta) = w_+(\beta, \alpha), \quad w_-(\alpha, \beta) = w_-(\beta, \alpha),$$

(1) $w_+(\alpha, \beta) w_-(\alpha, \beta) = 1,$

(2) $\sum_{x \in X} w_+(\alpha, x) w_-(x, \beta) = n \delta_{\alpha, \beta},$

(3) (Star triangle relation)

$$\sum_{x \in X} w_+(\alpha, x) w_+(x, \beta) w_-(\gamma, x) = D w_+(\alpha, \beta) w_-(\gamma, \alpha) w_-(\gamma, \beta)$$

ここで $|X| = n = D^2$ である。

スピンモデルから向きづけられたリンクの不変量がつかれ

る事は知られている [6]. Jones による定義は関数 w_+ , w_- が対称であるという条件 (0) を与えている。この条件 (0) を落して対称でないものを含めた型の定義が宗政-綿谷によ、与えられた [7].

定義 2. (Generalized spin model) 有限集合 X と $X \times X$ 上で定義された複素数値関数 w_+ , w_- が与えられたとき次の条件 (1), (2), (3) が任意の $\alpha, \beta, \gamma \in X$ に対して成立つならば (X, w_+, w_-) をスピモデルと呼ぶ。

$$(1) \quad w_+(\alpha, \beta) w_-(\beta, \alpha) = 1,$$

$$(2) \quad \sum_{x \in X} w_+(\alpha, x) w_-(x, \beta) = n \delta_{\alpha, \beta},$$

(3) (Star triangle relation)

$$\sum_{x \in X} w_+(\alpha, x) w_+(x, \beta) w_-(x, \gamma) = D w_+(\alpha, \beta) w_-(\alpha, \gamma) w_-(\beta, \gamma)$$

ここで $|X| = n = D^2$ である。

この対称性を仮定しないスピモデルからもリンクの不変量がつくれることが知られている。

数研研での講演では、スピモデルの定義をさらに一般化したものを与えた。

定義 3. (Generalized generalized spin model) 有限集合 X と $X \times X$ 上に定義された複素数値関数 w_1, w_2, w_3, w_4

が次の条件 (1), (2), (3a), (3b) を任意の $\alpha, \beta, \gamma \in X$ に対してみたす時 (X, w_1, w_2, w_3, w_4) をストーンモデルと呼ぶ。

$$(1) w_1(\alpha, \beta) w_3(\beta, \alpha) = 1, \quad w_2(\alpha, \beta) w_4(\beta, \alpha) = 1,$$

$$(2) \sum_{x \in X} w_1(\alpha, x) w_3(x, \beta) = n \delta_{\alpha, \beta},$$

$$\sum_{x \in X} w_2(\alpha, x) w_4(x, \beta) = n \delta_{\alpha, \beta},$$

$$(3a) \sum_{x \in X} w_1(\alpha, x) w_1(x, \beta) w_4(\gamma, x) = D w_1(\alpha, \beta) w_4(\gamma, \alpha) w_4(\gamma, \beta),$$

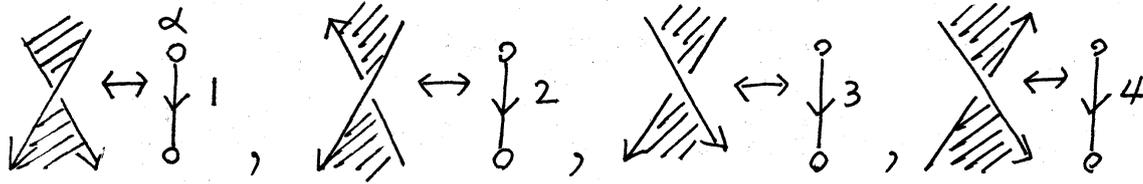
$$(3b) \sum_{x \in X} w_1(x, \alpha) w_1(\beta, x) w_4(x, \gamma) = D w_1(\beta, \alpha) w_4(\alpha, \gamma) w_4(\beta, \gamma),$$

ここで $|X| = n = D^2$ である。

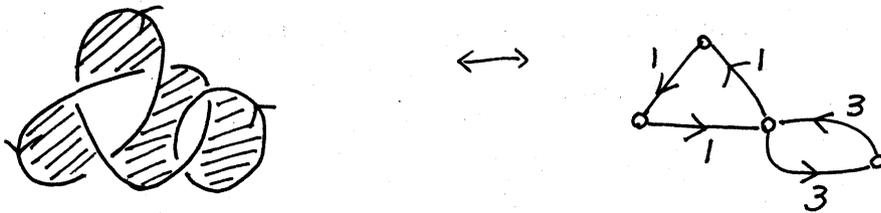
この時、向きづけられたリンクの不変量を決めるようにして定義される。(実際には以下の考察を経て一般化されたストーンモデルの定義にいたったのである。)

向きづけられたリンクのダイアグラム L が与えられた時は平面をいくつかの領域に分けているが、それ等を黒と白にぬりわけます。この時有界でない領域を白に、となりあった領域は異なる色になるようにする。この色づけられたダイアグラムから番号づけられた有向グラフを決めるようにしてつくる。黒くぬられた領域には頂点を各交点には辺を対応させる。向きづけられたリンクのダイアグラムの各交点はその向きづけ

と黒白の色づけにより4つの種類に分かれる。それぞれに対応するグラフの辺 $\alpha \rightarrow \beta$ とその番号 $n(\alpha \rightarrow \beta)$ は



で与える。下の図は色づけられたリニックのタイプグラフとそれから得られた番号づけられた有向グラフの例である。



次に $\nu(L)$ で頂点の個数 (すなわち黒くぬられた領域の個数) を表す。この時一般化されたストンモテル (X, w_1, w_2, w_3, w_4) を使って partition function Z_L を次の様に定義する。

$$Z_L = D^{-\nu(L)} \sum_{\substack{\sim \\ \text{states}}} \prod_{\substack{\alpha \rightarrow \beta \\ \text{edges}}} w_{n(\alpha \rightarrow \beta)}(\sigma(\alpha), \sigma(\beta))$$

ただし states σ とは上で定義した有向グラフの頂点集合から X への写像である。このとき定義する条件 (1), (2) は Z_L が type II の Reidemeister move (方向と色づけを考えると8種類ある) によつて不変であることを保証し条件 (3a) と

(3b) Z_L が type III の Reidemeister move (同じく16種類あり) による不変性を保証する。

さて、定義3 から次の命題が容易に証明される。

命題 4. 複素数 $a \neq 0$ が存在して、任意の $\alpha \in X$ に対して次式が成立つ。

$$\sum_{x \in X} w_2(\alpha, x) = \sum_{x \in X} w_2(x, \alpha) = D w_3(\alpha, \alpha) = D a^{-1}$$

$$\sum_{x \in X} w_4(\alpha, x) = \sum_{x \in X} w_4(x, \alpha) = D w_1(\alpha, \alpha) = D a$$

命題4 で与えられた等式は Z_L を normalize した type I の Reidemeister move についても不変なものにすることができるという事を保証している。([5], [6] 参照)

一般化されたスピンモデルは Jones 及び 宗政-綿谷によるスピンモデルを含んでいる。すなわち $X \times X$ 上に2つの関数 w_+, w_- が与えられ、一般化されたスピンモデル (X, w_+, w_-, w_3, w_4) の2つの関数 w_+, w_- が $\{w_\varepsilon, {}^t w_\varepsilon\}$ に含まれ w_3, w_4 が $\{w_{\varepsilon'}, {}^t w_{\varepsilon'}\}$ に含まれる時 (X, w_+, w_-) は 宗政-綿谷によるスピンモデル (定義2) が又はその転置した形のものになることを示される。ここで $\{\varepsilon, \varepsilon'\} = \{+, -\}$ ${}^t w_\varepsilon(\alpha, \beta) = w_{\varepsilon'}(\beta, \alpha)$ である。このような場合を Jones type

のスピンモデルと呼ぶことにする。この様に w_1, w_2, w_3, w_4 のうちの2つが $\{w_\varepsilon, {}^t w_\varepsilon\}$ に含まれ 残り2つが $\{w_{\varepsilon'}, {}^t w_{\varepsilon'}\}$ に含まれる場合を特にとりあげる。

$w_1, w_4 \in \{w_\varepsilon, {}^t w_\varepsilon\}$ かつ $w_2, w_3 \in \{w_{\varepsilon'}, {}^t w_{\varepsilon'}\}$ となる場合 w_+, w_- はともに対称条件をみたす。この場合を pseudo-Jones type のスピンモデルと呼ぶことにする。

$w_1, w_3 \in \{w_\varepsilon, {}^t w_\varepsilon\}$ かつ $w_2, w_4 \in \{w_{\varepsilon'}, {}^t w_{\varepsilon'}\}$ をみたすとき, w_+ 又は w_- はアダマール行列となる。この場合をアダマール type のスピンモデルと呼ぶことにする。Hadamard type のスピンモデルは Jones type のものとはかなり異なる形をしている。

以上アブストラクティックに述べたがより詳しく知りたい方のために投稿中の論議の preprint (with Eiichi Banai) をつけ加えておく。以上の文中の参考文献の番号はこの preprint の references の番号を示している。