

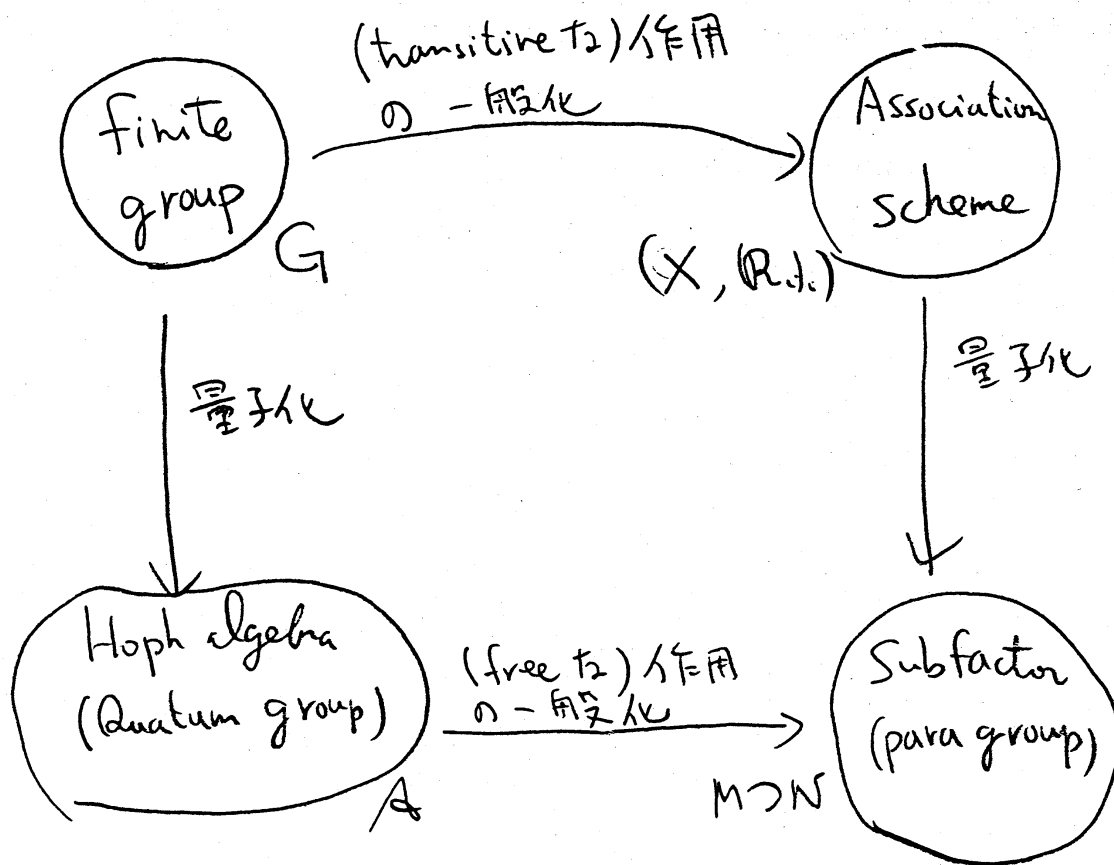
Association scheme, Terwilliger algebras and Takesaki duality

北海道大学・理 綿谷 安男

(Yasuo Watatani)

□ はじめに

次の図式を考えてみよう。



有限群 G の有限集合 X への transitive な作用を組み合わせ論的に一般化したのが Association scheme $(X, (R_i)_{0 \leq i \leq d})$ だと考えよう。

さてこのフル- G 全体を量子化してみると何か出てくるかを考えたい。(有限)群 G が量子化されたのが (有限次元) 量子群 A だとしても、(有限)集合 X の量子化は何になるか？ その「作用」の量子化とは何かあるか？ これらの問いに答えると自然に作用素環論の subfactor の理論になるのである。

□作用素環

ヒルベルト空間 H 上の有界線型作用素全体を $B(H)$ とする。 $B(H)$ の $*$ -subalgebra が適当な位相について閉じたものを作用素環という。たまたま作用素環とはほぼ「無限次元の行列環」と思っていた方がいい。特に weak operator topology について閉じたものを von Neumann 環と (1), operator norm topology で閉じたものを C^* -環と (2) いう。 (わしいこと知りたい方は竹下 (6) や Kadison-Ringrose (3) をみてもいい

ばよい。代数幾何学のレベルではよく知られている
 ように、可換環 A と幾何学的空間 X は、
 双対の関係にあつてお互いに他を規定してい
 る。幾何学的空間 X 上の座標関数のつくる可換
 環が A であるし、逆に可換環 A のスペクトル
 として X が再現できる。もっとも関数に要
 求する互めりかたの程度によつて色々なカテゴリー
 がありえるが。

今 X を compact T_2 空間とし、 $A = C(X)$ を
 X 上の連続関数全体とする。すると $A = C(X)$ は
 自然に可換な C^* 環になる。逆に C^* も可換
 な C^* 環 A になつてある compact T_2 空間 X が存
 在して A は $C(X)$ と同型になる。この意味で

非可換な C^* 環は局所 Hilbert 空間の量子化だ。

これはず、と昔に Gelfand-Naimark によつて示された
 定理で別段新しいものではない。作用素環論
 は元々量子力学を荷う数学として生まれてき
 たところがあり、不思議でも何でもない。作用素
 環の創始者 von Neumann 以来のことだから。

次に (X, \mathcal{B}, μ) を測度空間とし, $A = \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ を X 上の本質的有界可測関数全体とする。すると $A = \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ は自然に可換 von Neumann 環になる。逆に可換 von Neumann 環 A に対しては測度空間 (X, \mathcal{B}, μ) が存在し, $A \cong \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ と同型になる。この意味で

非可換 von Neumann 環は測度空間の量子化だ

② Subfactors

有限群 G の有限集合 X への transitive な作用の組み合わせ論的一般化が Association scheme があった。この場合有限集合 X が幾何学的空間なのでそれを量子化して von Neumann 環 M とする。(しかしこれだけでは G の「作用」を量子化することにはあてはまらない。それを定式化するのは Jones [2] により始められた subfactor の理論が必要になる。

Def von Neumann 環 M が Factor であるとはその中心 $Z(M)$ がスカラーのみからなることである。この時 M の σ -weak closed ideal は 0 または M になるという意味で

M が「単純」であることと同値である。

Def von Neumann 環 M が II₁ 型 factor とは

\iff ① M は factor である
def

② \exists $\tau: M \rightarrow \mathbb{C}$ trace とよばれる正の汎関数

$$\text{s.t.} \begin{cases} \tau(xy) = \tau(yx) & \forall x, y \in M \\ \tau(1) = 1 \end{cases}$$

例 $M = \left(\bigotimes_{i=1}^{\infty} A_i \right)''$, $A_i \cong M_2(\mathbb{C})$

と 2×2 行列環 $M_2(\mathbb{C})$ の無限つのテンソル積を trace による GNS 表現 (正空間 τ -weakly closure としたものは hyperfinite とよばれる II₁ 型 factor) になる。

Def 上の II₁ 型 factor M だけでなく、その中の subfactor N の M への包含関係 $N \subset M$ を考える。この時 Jones の index

$$[M:N] \stackrel{\text{def}}{=} \dim_N L^2(M) \quad (\text{coupling constant})$$

は大体 M を N -module とみた時の module 次元であるか、値を $[0, \infty)$ にとることに注意する。

Theorem (Jones) II_1 -factor M の subfactor $N \subset M$ の Jones index $[M:N]$ のとりうる値は $\{4\cos^2 \frac{\pi}{n} \mid n=3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,54,55,56,57,58,59,60,61,62,63,64,65,66,67,68,69,70,71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,81,82,83,84,85,86,87,88,89,90,91,92,93,94,95,96,97,98,99,100\}$ である。

③ Association scheme と subfactor

上の有名な定理以降 subfactor の理論は驚くほど発展した。 $[M:N] \leq 4$ の分類, paragroup, 自己同型の分類など色々な話があるが, 幸山有氏や河東氏がどこかで色々入っているのですね。それをまとめてみることにする。ここでは Association scheme との関連する所のみを考える。

有限群 G の有限集合 X への transitive な作用の組み合わせ論的一般化が Association scheme であった。それを量子化すると subfactor $N \subset M$ になるのである。それを例でもって検証しよう。

例 G : 有限群

N : II_1 -factor

$\alpha: G \rightarrow \text{Aut } N$: outer action

$M = N \rtimes_{\alpha} G$ (積) i.e. N を係数にも

G 上の群環に α で g をねらった積を入れたもの

M は II_1 -factor になり, N は M の subfactor である

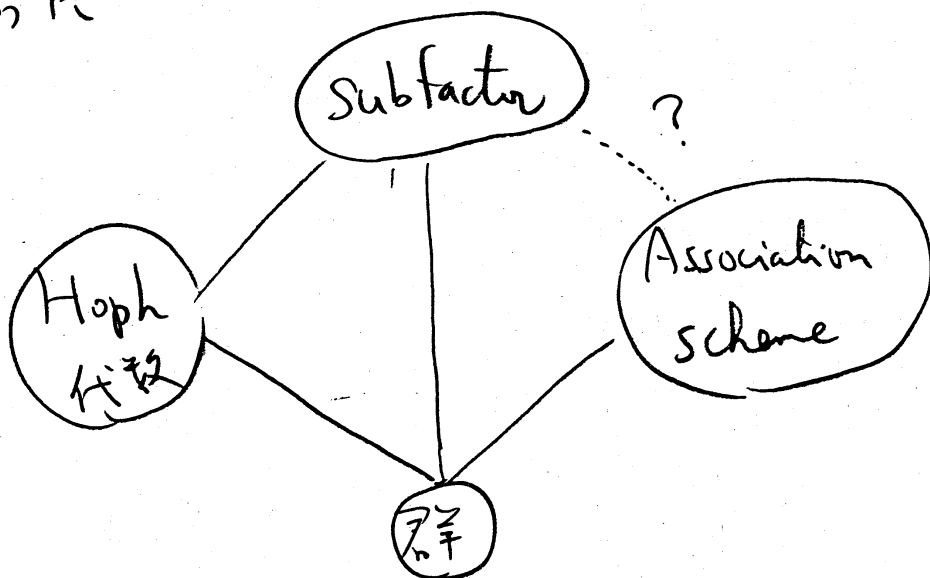
Jones index $[M:N] = |G|$

例 有限群 G が有限集合 X に transitive に作用しているとする。この時 G は von Neumann 環 $\mathcal{L}^{\infty}(X)$ に自然に作用する。これを用いて 適当な outer 作用により

$$\begin{cases} M = (R \otimes \mathcal{L}^{\infty}(X)) \rtimes G \\ \cup \\ N = R \rtimes G \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ここで } R \text{ は} \\ \text{(hyperfinite II}_1\text{-factor)} \end{array}$$

と積合環をつくる。すると M は II₁-factor になり NCM はその subfactor になる。この時 後述するが、対応する Association scheme の Bose-Mesner algebra の構造が NCM から読みとれることができるのである。

以上述べたように有限群 G を積環方向の色々とあた



下記に現われた共通の代数構造を表に
(一眺めよう)。

	群 G	Hopf代数 A	Association scheme とそのBase-Mesher代数 A
積	$m: G \times G \rightarrow G$ $(a, b) \mapsto ab$	$m: A \otimes A \rightarrow A$ product $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ co-product	$m: A \otimes A \rightarrow A$ matrix product $A \cdot B$ $\mu: A \otimes A \rightarrow A$ Hadamard product $A \circ B$
単位元	単位元 $1 \in G$	$\eta: \mathbb{C} \rightarrow A$ unit $\varepsilon: A \rightarrow \mathbb{C}$ co-unit	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は行列積のunit $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ はアダマール積のunit $\text{Tr}: A \rightarrow \mathbb{C}$ は \bullet のunit $\varepsilon: A \rightarrow \mathbb{C}$ は \circ のunit \therefore $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{i,i}$ $\varepsilon(A) = \sum_{i,j} A_{i,j}$
逆元	$S: G \rightarrow G$ $g \mapsto g^{-1}$	$S: A \rightarrow A$ antipode は 逆元 $A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{\text{Soid}} A \otimes A \xrightarrow{m} A$ $\varepsilon \searrow \quad \nearrow \eta$ \mathbb{C}	$S: A \rightarrow A$ 転置 $S(A) = A^t$ は 逆元 $A \xleftarrow{\mu} A \otimes A \xrightarrow{\text{Soid}} A \otimes A \xrightarrow{m} A$ $\varepsilon \searrow \quad \swarrow \text{Tr}$ \mathbb{C} 23) $\varepsilon(\bar{B} \circ A) = \text{Tr}(B^* A)$ $\Leftrightarrow \varepsilon(B \circ A) = \text{Tr}(B^t A)$

実は subfactor $N \subset M$ の場合にも同様なものがある。

Def (Ocneanu [4])

$M: \mathbb{R}$ -factor

$N \subset M$: subfactor

$[M:N] < \infty$ かつ $N' \cap M = \mathbb{C}$ と仮定す

$e_N: L^2(M, \tau) \rightarrow L^2(N, \tau)$: Jones projection

$\langle M, e_N \rangle \in M \subset e_N \tau$ かつ $\langle M, e_N \rangle$ は \mathbb{R} -factor (basic 積成)

$A = N' \cap \langle M, e_N \rangle = \{ x \in \langle M, e_N \rangle \mid \forall n \in \mathbb{N} \ x n = n x \}$

この A には Association scheme の Bose-Mesner alg の
よりに 2つの積 \cdot と \circ が与えらる

$$\begin{cases} (\sum_i a_i e_N b_i) \cdot (\sum_j c_j e_N d_j) = \sum_i \sum_j a_i c_j E_N(b_i d_j) e_N \\ (\sum_i a_i e_N b_i) \circ (\sum_j c_j e_N d_j) = \sum_i \sum_j \frac{1}{[M:N]} a_i c_j e_N d_j b_i \end{cases}$$

この時 I は (A, \cdot) の単位元になる

$J = [M:N] e_N$ は (A, \circ) の単位元になる。

例 群 G が有限集合 X に transitive に作用しているとき
それから与えられる Association scheme $(X, (R_i)_{i \in G})$ の Bose-
Mesner algebra A の 2つの積 \cdot と \circ は、対応する \mathbb{R} -
型 factor $M = (\mathbb{R} \otimes \ell^{\infty}(X)) \rtimes G$ とその subfactor $N = \mathbb{R} \rtimes G$
から与えられる $A = N' \cap \langle M, e_N \rangle$ での上の 2つの積 \cdot と \circ と対応する

また Jaeger が講演で述べた spin model と Association scheme の π に γ (色んな内積式,

例として $\boxed{AJ = JA = \varepsilon(A)J} \quad (A \in A)$

は subfactor $N \subset M$ の設定 π も意味があり,

この例では, それは Jones projection e_N の

内積式 $\boxed{\pi e_N = e_N \pi = \varepsilon(x) e_N} \quad (x \in A)$

となり π も成り立つ。これは \equiv である。

Jones projection e_N の relative commutant algebra

$A = N' \cap M, e_N$ の中 π minimal から central なる

projection γ があるという事実に対応している。

(ただし $N' \cap M = \mathbb{C}$ の場合が)。

④ 物付きの双対定理と Terwilliger algebra

局所コンパクト T -ゲル群 G に対して T の dual group \hat{G} が存在しまた局所コンパクト T -ゲル群になり, T に対して Pontryagin の双対定理 $\hat{\hat{G}} \cong G$ が成り立ち, 2回 dual をとると元に戻す。また Hopf 代数や Association scheme の Bose-Mesner algebra による duality は存在している。これは作用環の場合にはどうかというのが次の物付きの双対定理である。

Theorem (444奇 (57))

M を von Neuman 環, G を局所的コンパクト \mathcal{A} -ヘルミット群,
 $\alpha: G \rightarrow \text{Aut } M$ を action とする. その接合積
 $M \rtimes_{\alpha} G$ 上には \hat{G} の action $\hat{\alpha}: \hat{G} \rightarrow \text{Aut}(M \rtimes_{\alpha} G)$
 が存在し

$$(M \rtimes_{\alpha} G) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \cong M \otimes B(L^2(G))$$

このように2回接合積をとると $B(L^2(G))$ を除いて
 M を復元する. ここで余りの $B(L^2(G))$ は実は
 G と \hat{G} の交換関係からつくられた algebra になっ
 ている. これは subfactor の場合にも対応するもの
 が存在し, 2回 basic 構成とすると

$$\langle \langle N, e_N \rangle, e_M \rangle \cong N^{(C(M, N))}$$

ここで (M, N) が 型 (M, N) の $N^{(M)}$ $\cong N \otimes M_n(\mathbb{C})$ である.
 この時 $B(L^2(G))$ に対応するのは

$$N' \cap \langle \langle M, e_M \rangle, e_N \rangle \text{ と } M' \cap \langle \langle M, e_M \rangle, e_M \rangle$$

がつくられた algebra である. 群 G が transitive に
 有限集合 X に作用する場合につくられた特別な subfactor
 $N \subset M$ の場合には, ちょうどこれが対応する Association
 scheme の Terwilliger algebra (M) と一致する. それ
 以上のことはまだよくわかっていないが何か面白いであろう.

Reference

- (1) F. Bannai and T. ITO, Algebraic Combinatorics I, Association scheme, Benjamin, 1984
- (2) V. Jones, Index for subfactors, Invent. Math. 72 (1983), 1-25
- (3) R. Kadison and J. Ringrose, Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Academic Press 1986
- (4) A. Ocneanu, Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors, University of Tokyo Seminary Note 45, (1991)
- (5) M. Takesaki, Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type II, Acta Math. 131, (1973) 249-310
- (6) M. Takesaki, Theory of Operator algebras I, Springer-Verlag, (1979)
- (7) P. Terwilliger, The constituent algebra of an association scheme, preprint