数理解析研究所講究録
841巻 1993年 98-100

On singly diagonally implicit one-step methods

広大学教 新谷尚義 (Hisayoshi Shintani)

1. SDIRK methods of order 5

初期値問題

(1.1) $y' = f(y)$, $y(t_0) = y_0$

を考える。この問題の解を $y(t)$ とし、

(1.2) $t_s = t_0 + sh$ $(s \geqq 0,\ h > 0)$

とする。$y(t_1)$ の近似値 y_1 を次のようなn段p次の singly diagonally implicit one-step method (SDIRK method) で求めよう。

(1.3) $y_1 = y_0 + h\sum_{i=1}^{n} b_i k_i$

ただし、

(1.4) $k_i = f(Y_i)$, $Y_i = y_0 + h\sum_{j=1}^{i} a_{ij}k_j$ $(i=1, 2,.., n)$

(1.5) $a_{ii} = x > 0$ $(i=1,2,..,n)$

Nørsett (1974) は、$n = 1$ のとき $p = 2$, $n = 2$ のとき $p = 3$, $n = 3$ のとき $p = 4$ の公式が存在することを示した。$n = 4, 5$ のとき、パラメータの数はそれぞれ 11, 16 であり order 5 の公式をうるためには 17 個の方程式がみたされねばならない。筆者は REDUCE 3.3

を使って次のことを示した。

定理 1　4段5次の SDIRK method は存在しない

定理 2　5段5次のA安定な SDIRK method が存在する。

2. Embedded SDIRK methods with interpolants

次の2つの形の補間式を考えよう。

(2.1) $$y_s = y_0 + \sum_{i=1}^{n} b_{is} k_i$$

(2.2) $$\tilde{y}_s = y_0 + h\{\tilde{b}_{0s} f(y_0) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_{is} k_i + b_{n+1s} f(y_1)\}$$

また刻み幅hを制御するために

(2.3) $$e = h\sum_{i=1}^{n} q_i k_i = 0(h^p)$$

(2.4) $$\tilde{e} = h\{\tilde{q}_0\ f(y_0) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i k_i = 0(h^p)$$

を考える。

定理 3　n = 1,2,4 のとき それぞれ次数 p = 1,2,3 のA安定な (1.3) と補間式 (2.1) 及び (2.3) が存在する。 n = 3 のとき，次数 3 の補間式 (2.1) は存在しない。 n = 1,2,3, のとき それぞれ次数 p = 2,3,3,4 のA安定な (1.3) と補間式 (2.2) 及び (2.4) が存在する。

刻み幅が一様でない場合でも，y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, $f(y_{n-1})$, $f(y_n)$, $f(y_{n+1})$ を使えば次数4までの補間式と刻み幅制御用の e を求

めることができる。

参考文献

〔1〕 K. Dekker and J.G. Verwer, Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations, 1984, North-Holland

〔2〕 H. Shintani, Existence of 5-stage singly diagonally implicit one-step methods of order 5, Bull. Fac. School Educ. Hiroshima Univ., Part II, 13 (1991), 29-34

〔3〕 H. Shintani, Embedded singly diagonally implicit one-step methods with interpolants, Bull. Fac. School Educ. Hiroshima Univ., Part II, 14 (1992) (to appear)