数理解析研究所講究録
843巻 1993年 199-209

On the zeta functions of Shimura varieties and periods of Hilbert modular forms

吉田敬之（京大理）

0. 以下に記すのは、1992年3月に行った筆者の数理研研究集会での講演（数理研講究録810）の続篇である。その後の考察で幾つかの本質的な改良ができた。新しい結果は Theorems 3，7である。重複を避ける意味でなるべく簡略に結果を説明する。詳しくは［Y2］（又は［Y1］）を見られたい。

1. F を n 次の代数体（$n<\infty$）、$G=\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, $H=\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$, Ω を G/H の non-empty subset とする。G を G/H に左から作用させたときの Ω の stabilizer を H' とする。有限次代数体 F' があり、$H'=\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')$ となる。Shimura variety の zeta 函数についての簡単な思考実験により、H の表現から H' の表現を構成しうる筈である、という見通しが得られる（cf.［Y2］の序）。これは実際可能であって、H の表現 σ から H' の表現 $\tau=\bigotimes_{\Omega}\mathrm{Ind}_H^{H'}\sigma$ を得る（cf.［Y2］, §1）。この操作 $\sigma\longrightarrow\bigotimes_{\Omega}\mathrm{Ind}_H^{H'}\sigma$ は誘導表現の一般化になっていて、<u>tensor induction</u> と呼ぶ。

Theorem 1. Eを有限次代数体，λはEのfinite placeを表わすとし，$\{\sigma_\lambda\}$を$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$のE-rationalなλ-adic表現のcompatible systemとする。このとき，$\{\bigotimes_{\Omega} \mathrm{Ind}_H^{H'} \sigma_\lambda\}$は$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')$のE-rationalなλ-adic表現のcompatible systemである。

2. MをF上の，Eを係数体とするmotiveとする。このとき，Mのλ-adic realization $\{H_\lambda(M)\}$から，$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$のE-rationalなλ-adic表現のcompatible systemが得られる。Theorem 1により$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')$のE-rationalなλ-adic表現のcompatible systemが得られるが，このsystemがやはりmotiveによって得られているであろう，と予想される。

Conjecture 2. F′上のEを係数体とするmotive $M' = \bigotimes_{\Omega} \mathrm{Res}_{F/F'}(M)$が存在し，任意のλについて$H_\lambda(M')$における$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')$の表現は，$\bigotimes_{\Omega} \mathrm{Ind}_H^{H'} H_\lambda(M)$と同値である。

$M \longrightarrow \bigotimes_{\Omega} \mathrm{Res}_{F/F'}(M)$は，F上のmotivesのcategoryからF′上のmotivesのcategoryへのfunctorになっており，restriction of scalars functorの一般化になっている。これをtensor restrictionと呼ぶ。Conjecture 2の別の根拠として，F上のprojective varietyからF′上のprojective varietyを

作る操作を，Weil の restriction of scalars を一般化して定義できる（cf.［Y1］，§1.9）．

3．以下 F は総実と仮定する．J_F は F から $\mathbb{C}$ の中への同型全ての集合とし，J_F を F の archimedean places の集合と同一視する．B を F 上の quaternion algebra で

$$B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R})^r \times \mathbb{H}^{n-r}, \quad r > 0$$

をみたすものとする．B の split する archimedean places の集合を $\delta \subset J_F$，ramify する所を $\delta' \subset J_F$ とする．$|\delta| = r$，$|\delta'| = n-r$．このとき B は signature (δ, δ') であると呼ぶ．

$G = Res_{F/\mathbb{Q}}(B^\times)$ を $B^\times$ から得られる $\mathbb{Q}$ 上の代数群とする．π を G_A の irreducible automorphic representation とする．π には $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ の λ-adic 表現 σ_λ が attach していると仮定する．これは π が arithmetic type のときには成立つ（cf.［C］，［T］）．

Theorem 3: $L(s, \pi, r_1) = L(s, \bigotimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{Ind}_H^{H'} \sigma_\lambda)$ が Euler p-factor，$\lambda | p$ を除いて成立つ．

ここに r_1 は G の L-group ${}^L G = GL(2, \mathbb{C})^n \rtimes Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の $2^r[F' : \mathbb{Q}]$ 次元の表現である（cf.［Y2］）．$L(s, \pi, r_1)$ は，G から得られる Shimura variety の zeta 函数の

essential factor として現れるものである。Theorem 3 により，Shimura variety の zeta 函数を表わす Langlands の公式 [L 1] が bad factor についても成立つことが証明できる。

4. Z を G の center とし，Z_A を $F_A^\times$ と同一視する。I_F により J_F で生成される free abelian group を表わす。

$$k=\sum_{\tau\in\delta} k(\tau)\cdot\tau\ ,\quad \kappa=\sum_{\tau\in\delta'}\kappa(\tau)\cdot\tau\in I_F\ ,$$
$$k(\tau)\geqq 0\ ,\ \kappa(\tau)\geqq 0$$

とおく。$\mathcal{S}_{k,\kappa}(B)$ により，G_A 上の weight が (k,κ) の automorphic forms の成す space を表わす (cf. [Y 2], §6)。$\mathcal{S}_{k,\kappa}(B)\ni f$ は，左 $G_{\mathbf{Q}}$ 不変で $\mathbf{C}^d$, $d=\prod_{\tau\in\delta'}(\kappa(\tau)+1)$ に値をもつ G_A 上の函数である。$f, g\in\mathcal{S}_{k,\kappa}(B)$ に対して

$$\langle f, g\rangle=\int_{Z_{\infty+}G_{\mathbf{Q}}\backslash G_A}{}^t\overline{f(x)}\,g(x)\,dx\ ,$$
$$\mathrm{vol}(Z_{\infty+}G_{\mathbf{Q}}\backslash G_A)=1$$

とおく。($Z_{\infty+}$ は Z_A の archimedean part Z_∞ の単位元の連結成分を表わす。) $\mathcal{S}_{k,\kappa}(B,\overline{\mathbf{Q}})$ により，$\overline{\mathbf{Q}}$-rational forms の成す subset を表わす。

α を $\mathcal{S}_{k,\kappa}(B)$ に現れる Hecke 作用素の固有値の system とする。これは次のことを意味すると解する。$F_A^\times$ の位数有限の Hecke 指標 $\psi=\psi(\alpha)$ があり，ある $0\neq f\in\mathcal{S}_{k,\kappa}(B)$ に対して

(1) $\mathfrak{f} \mid T(\mathfrak{p}) = \chi(\mathfrak{p})\mathfrak{f}$ for almost all $\mathfrak{p}$,

(2) $\mathfrak{f}(zx) = \psi(z)\mathfrak{f}(x)$, $\forall z \in Z_A$, $\forall x \in G_A$.

上の (1), (2) をみたす $\mathfrak{f} \in \mathcal{S}_{k,\kappa}(B)$ の成す subspace を $W(\chi, B)$ とかく。(χ は常に一定った ψ を伴っているとする。)

$$W(\chi, B, \overline{\mathbb{Q}}) = W(\chi, B) \cap \mathcal{S}_{k,\kappa}(B, \overline{\mathbb{Q}})$$

とおく。Jacquet – Langlands ([JL]) により、$W(\chi, B) \neq \{0\}$ ならば、$W(\chi, M_2(F)) \neq \{0\}$ であり、χ は $\mathcal{S}_{m,0}(M_2(F))$

$$m(\tau) = \begin{cases} k(\tau), & \tau \in \delta, \\ \kappa(\tau)+2, & \tau \in \delta', \end{cases}$$

に現れる。

<u>Theorem 4</u>. $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h} \in W(\chi, B, \overline{\mathbb{Q}})$, $\mathfrak{f} \neq 0$ ならば

$$\langle \mathfrak{g}, \mathfrak{h} \rangle / \langle \mathfrak{f}, \mathfrak{f} \rangle \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

<u>Theorem 5</u>. B_1, B_2 はともに signature が (δ, δ') の F 上の quaternion algebras, $\mathfrak{f} \in W(\chi, B_1, \overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{S}_{k,\kappa}(B_1)$, $\mathfrak{g} \in W(\chi, B_2, \overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{S}_{k,\kappa}(B_2)$ とする。$k(\tau) \geqq 2$, $\forall \tau \in \delta$, $\mathfrak{f} \neq 0$ ならば

$$\langle \mathfrak{g}, \mathfrak{g} \rangle / \langle \mathfrak{f}, f \rangle \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

totally real field F_1 は F の l 次 cyclic extension とする。χ は $\mathcal{S}_{m,0}(M_2(F))$ に現れる Hecke 作用素の固有値の

system とする。$m(\tau)=1$, $^\forall\tau\in J_F$ の場合を除外する。[L2] により、$0\neq f\in W(\chi, M_2(F))$ の base change lift $\tilde{f}$ が $S_{\tilde{m},0}(M_2(F_1))$, $\tilde{m}(\tau)=m(\tau|F)$, $\tau\in J_{F_1}$ に存在する。$\tilde{f}$ の定める Hecke 作用素の固有値の system を $\tilde{\chi}$ とかき、χ の base change lift と呼ぶ。

<u>Theorem 6</u>. χ は $S_{k,k}(B)$ に現れるとし、$0\neq g\in W(\chi, B, \overline{\mathbf{Q}})$ をとる。$B_1=B\otimes_F F_1$ とおく。このとき $0\neq\tilde{g}\in W(\tilde{\chi}, B_1, \overline{\mathbf{Q}})$ が存在する。さらに $k(\tau)\geqq 3$, $^\forall\tau\in\delta$ ならば、

$$<\tilde{g},\tilde{g}>/<g,g>^l\in\overline{\mathbf{Q}}.$$

χ は $S_{m,0}(M_2(F))$ に現れるとし、任意に $\delta\subset J_F$, $\delta\neq\phi$ をとる。χ は $S_{k,k}(B)$, B は signature (δ,δ'), に現れるとは限らない。そこで F_1 を上記の様にとり、B_1 を F_1 上の signature が $(\tilde{\delta},\tilde{\delta}')$ の quaternion algebra とする。ここに $\delta'=J_F\backslash\delta$, $\tilde{\delta}$, $\tilde{\delta}'$ は制限写像 $J_{F_1}\to J_F$ による δ,δ' の full inverse images を表わす。F_1, B_1 をうまくとると ($l=2$ でよい)、$\tilde{\chi}$ は $S_{\tilde{k},\tilde{k}}(B_1)$ に現れる。そこで $0\neq\tilde{g}\in W(\tilde{\chi}, B_1, \overline{\mathbf{Q}})$ をとり、

$$Q(\chi,\delta)=<\tilde{g},\tilde{g}>^{1/l}\quad(\text{任意の } l \text{ 乗根})$$

とおく。Theorems 4〜6 により、$m(\tau)\geqq 3$, $^\forall\tau\in\delta$, $m(\tau)\geqq 2$, $^\forall\tau\in J_F$ のときは、$Q(\chi,\delta) \bmod \overline{\mathbf{Q}}^\times$ が well defined になることが容易にわかる。(即ち $F_1, B_1, \mathfrak{Y}$ のとり方に依存しない。) これが Shimura [Sh5], [Sh6] で定義された χ の Q-invariant で、上の結果はその拡張になっている。

χ, χ' はそれぞれ $\mathcal{S}_{k,0}(M_2(F))$, $\mathcal{S}_{\ell,0}(M_2(F))$ に現れるとする。

$$D(s, \chi, \chi') = \sum_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a})\chi'(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s}$$

とおく。これは本質的に χ と χ' の Rankin-Selberg convolution で全平面有理型の函数を定める。

<u>Theorem 7</u>. $\delta, \delta' \neq \phi$, $J_F = \delta \cup \delta'$ (disjoint union) とする。$k(\tau) > \ell(\tau)$, $k(\tau) \geqq 3$, ${}^\forall\tau \in \delta$, $k(\tau) < \ell(\tau)$, $\ell(\tau) \geqq 3$, ${}^\forall\tau \in \delta'$ と仮定する。$A = \sum_{\tau\in\delta} k(\tau) + \sum_{\tau\in\delta'} \ell(\tau)$ とおく。$k(\tau) + \ell(\tau) \bmod 2$ が τ に依存せず、$t \in \mathbb{Z}$ が

$$t \equiv k(\tau) + \ell(\tau) \mod 2,$$

$$2 \leqq \frac{t}{2} \leqq 1 + \frac{|k(\tau) - \ell(\tau)|}{2}, \quad {}^\forall\tau \in J_F$$

をみたすならば

$$D\left(\frac{t}{2}, \chi, \chi'\right) / \pi^A Q(\chi, \delta) Q(\chi', \delta') \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

証明の point は、F の総実2次拡大体 F_1 をとり、[Sh5], Theorem 5.3 と上に与えた $Q(\chi, \delta)$, $Q(\chi', \delta')$ の定義を用いることである。(実際には、3個の2次拡大体を用いて、

$D(\frac{\Xi}{2}, \tilde{\chi}, \tilde{\chi}')$の関係を分析する。)

5. Conjecture 2 とDeligneの予想〔D3〕により，F上のquaternion algebra Bから得られるShimura varietyのzeta函数のcritical valuesの超越部分が，πの巾とQ-invariantsの積で書けることがわかる。この事実の大要は〔Y2〕に書いたので省略するが，〔Y2〕のConjecture 4.1（Hilbert modular form $f \in S_{k,0}(M_2(F))$にattachしたmotiveについての予想）のcorrectionを書く。

(2) は不正確で

$$
\begin{aligned}
&H_B(R_{F/\mathbb{Q}}(M_f)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \\
&= \bigoplus_{\tau \in J_F} \Big(H^{(k_0+k(\tau))/2-1,\ (k_0-k(\tau))/2}(R_{F/\mathbb{Q}}(M_f)) \\
&\qquad \oplus H^{(k_0-k(\tau))/2,\ (k_0+k(\tau))/2-1}(R_{F/\mathbb{Q}}(M_f)) \Big)
\end{aligned}
$$

とすべきである。〔Y2〕での形に書くならば，weight k を $J_F = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})/\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ から $\mathbb{Z}$ の中への mapping とみて

$$
\begin{aligned}
&H_{\tau,B}(M_f) \otimes_{E,\sigma} \mathbb{C} \\
&= H^{(k_0+k(\sigma^{-1}\tau))/2-1,\ (k_0-k(\sigma^{-1}\tau))/2}(\tau, \sigma, M_f) \\
&\quad \oplus H^{(k_0-k(\sigma^{-1}\tau))/2,\ (k_0+k(\sigma^{-1}\tau))/2-1}(\tau, \sigma, M_f)
\end{aligned}
$$

となる。(〔Sh2〕, Prop. 2.6 により k は $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ で左不変である。$\sigma \in J_E$ の $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ への拡張を同じ文字 σ で表わした。$k(\sigma^{-1}\tau)$ はこの拡張のとり方に依存しない。)

さらに，$H_{DR}(M_f)$ 上の Hodge filtration（$E \otimes_{\mathbb{Q}} F$-modules に

よる）を定めなければ予想としても不完全であるが、これは完全に書き切れる。これと関係して、τ-period の定義と、それを用いた周期についての結果も、さらに精密化される。[Y1] に詳しく書いておいた。

References

[BL] J.-L.Brylinski et J.-P.Labesse, Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura, Ann. Éc. Norm. Sup. 17(1984), 361–412.

[Bl1] D.Blasius, On the critical values of Hecke L-series, Ann. of Math. 124(1986), 23–63.

[Bl2] D.Blasius, Appendix to Orloff: Critical values of certain tensor product L-functions, Inv. Math. 90(1987), 181–188.

[Bo] A.Borel, Automorphic L-functions, Proc. Symposia Pure Math. 33(1979), part 2, 27–61.

[BZ] I.N.Bernstein and A.V.Zelevinski, Representations of the group $GL(n,F)$, where F is a local non-archimedean field, Russian Math. Surveys 31:3(1976), 1–68.

[C] H.Carayol, Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert, Ann. Éc. Norm. Sup. 19(1986), 409–468.

[D1] P.Deligne, Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, Publ. Math. IHES 35(1968), 107–126.

[D2] P.Deligne, Les constantes des equations fonctionnelles des fonctions L, in Modular functions of one variable II, 501–597, Lecture notes in Math. 349, 1973, Springer Verlag.

[D3] P.Deligne, Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales, Proc. Symposia Pure Math. 33(1979), part 2, 313–346.

[JL] H.Jacquet and R.P.Langlands, Automorphic forms on $GL(2)$, Lecture notes in Math. 114, 1970, Springer Verlag.

[K] R.E.Kottwitz, Shimura varieties and λ-adic representations, Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions I, 161–209, Perspectives in Math. 10(1990), Academic Press.

[L1] R.P.Langlands, On the zeta-functions of some simple Shimura varieties, Can. J. Math. XXXI(1979), 1121–1216.

[L2] R.P.Langlands, Base change for $GL(2)$, Ann. of Math. Studies No. 96, Princeton University Press, 1980.

[R] D.E.Rohrlich, Nonvanishing of L-functions for $GL(2)$, Inv. Math. 97(1989), 381–403.

[O] M.Ohta, On the zeta function of an abelian scheme over the Shimura curve, Japan. J. Math. 9(1983), 1–26.

[Se1] J.-P.Serre, Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, Paris, 1967.

[Se2] J.-P.Serre, Abelian l-adic representations and elliptic curves, Benjamin, New York, 1968.

[Sh1] G.Shimura, On the Fourier coefficients of modular forms of several variables, Göttingen Nachrichten (1975), Nr. 17, 1–8.

[Sh2] G.Shimura, The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms, Duke Math. J. 45(1978), 637–679.

[Sh3] G.Shimura, The arithmetic of certain zeta functions and automorphic forms on orthogonal groups, Ann. of Math. 111(1980), 313–375.

[Sh4] G.Shimura, On certain zeta functions attached to two Hilbert modular forms I, II, Ann. of Math. 114(1981), 127–164, 569–607.

[Sh5] G.Shimura, Algebraic relations between critical values of zeta functions and inner products, Amer. J. Math. 104(1983), 253–285.

[Sh6] G.Shimura, On the critical values of certain Dirichlet series and the periods of automorphic forms, Inv. Math. 94(1988), 245–305.

[Sh7] G.Shimura, On the fundamental periods of automorphic forms of arithmetic type, Inv. Math. 102(1990), 399–428.

[Sh8] G.Shimura, The critical values of certain Dirichlet series attached to Hilbert modular forms, Duke Math. J. 63(1991), 557–613.

[T] R.Taylor, On Galois representations associated to Hilbert modular forms, Inv. Math. 98(1989), 265–280.

[VS] Variétés de Shimura et fonctions L, Publication mathématique de l'Université Paris-VII, 1979.

[W] A.Weil, The field of definition of a variety, Amer. J. of Math. 78(1956), 509–524.

[Y1] H.Yoshida, On the zeta functions of Shimura varieties and periods of Hilbert modular forms, preprint, 1992.

[Y2] 吉田敬之，保型形式の周期について，数理解析研究所講究録 810，218 − 263．