数理解析研究所講究録
843巻 1993年 171-183

Eisenstein series for Siegel modular groups

東工大・理 水本信一郎 (Shin-ichiro Mizumoto)

1. Results

$m \in \mathbb{Z}_{>0}$ を以下固定し、H_m を Siegel upper half space of degree m とする。

$k \in 2\mathbb{Z}_{\geqq 0}$, $Z \in H_m$, $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$E_k^{(m)}(Z,s) := \det(\mathrm{Im}(Z))^s \sum_{\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0^{(m)} & * \end{pmatrix}\right\} \backslash Sp(m,\mathbb{Z})} \det(cZ+d)^{-k} |\det(cZ+d)|^{-2s}$$

とおく。右辺の和は $\left\{ (Z,s) \,\middle|\, Z \in H_m,\ \mathrm{Re}(s) > \frac{m+1-k}{2} \right\}$ で absolutely and uniformly convergent. これを Eisenstein series (of weight k) for $Sp(m,\mathbb{Z}) = Sp_{2m}(\mathbb{Z})$ とよぶ。

次の性質はよく知られている:

<u>Fundamental Theorem</u> [La, Kal]

(1) 各 $Z \in H_m$ に対し、$E_k^{(m)}(Z,s)$ は s の fcn として

全平面に meromorphic に解析接続され、次の functional equation をみたす：

$$\Gamma_m(s) := \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma\left(s - \frac{j}{2}\right), \quad \xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$
$$(= \xi(1-s))$$

とし，

$$\mathbb{E}_k^{(m)}(Z, S) := \frac{\Gamma_m\left(s+\frac{k}{2}\right)}{\Gamma_m(s)} \cdot \xi(2s) \prod_{j=1}^{[\frac{m}{2}]} \xi(4s-2j)\, E_k^{(m)}\left(Z, s-\frac{k}{2}\right)$$

とおくと　（ [ ] は Gauss symbol ）

$$\mathbb{E}_k^{(m)}(Z, s) = \mathbb{E}_k^{(m)}\left(Z, \frac{m+1}{2} - s\right).$$

(2) Poles の location は Z に independent. i.e.

$Z = x + iy$ （ x, y : real matrices ）とおくとき、

$\forall s_0 \in \mathbb{C}$ で $\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}$, $\exists \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$E_k^{(m)}(Z, s) = \frac{(C^\infty\text{-fcn in } (x, y, s))}{(s-s_0)^\ell} \quad \text{for } |s-s_0| < \delta.$$

(3) $E_k^{(m)}(Z, s)$ は Z の fcn として slowly increasing. 」

(3) について： Rankin - Selberg method の automorphic L - fcn's への応用において

$$\mathcal{D} E_k^{(m)}(Z, s) \Big|_{H_{m_1} \times \cdots \times H_{m_r}} \qquad (\bigstar)$$

の type の fcn があらわれる（e.g. [Bö 2], [BSY], [Mi]）。

ここで $\mathfrak{D}$ は $Sp(m,\mathbb{Z})$ に関しては必ずしも invariant でない differential operator（であって，（☆）の形の fcn が $Sp(m_1,\mathbb{Z})\times\cdots\times Sp(m_r,\mathbb{Z})$ に関して保型性をもつようなもの）である。（このような differential operator の一般的構成法は [Ib] にある。）

このとき R-S integral の convergence を示すためには

（☆）も slowly increasing か？

という問題を解決しなければならない（Böcherer 氏がこの点を 1990 年 9 月頃，筆者に指摘した）。

今回得られたことを述べる：

Main result

(i) Fundamental Theorem に，Fourier expansion を用いた elementary proof がつく。

（$m=2$ のとき [Kau].）

(ii) $E_k^{(m)}(z,s)$ の $\forall$ partial derivative in the entries of (x,y) は slowly increasing（locally uniformly in s）．すなわち：

(i) により，$\forall s_0\in\mathbb{C}$ に対し $\exists\,\delta\in\mathbb{R}_{>0}$, $\exists\,\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$

s.t. $$(s-s_0)^\ell E_k^{(m)}(z,s) : \text{holom. in } s \text{ for } |s-s_0|<\delta,\quad C^\infty \text{ in } (x,y).$$

このとき $\forall\,\rho\in\mathbb{R}_{>0}$, $\forall N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$: given に対し

$\exists\, A, B \in \mathbb{R}_{>0}$: depending only on $m, k, s_0, \delta, \ell, \rho, N$

s.t.

$$\left| (s-s_0)^{\ell}\, \mathbb{D} E_k^{(m)}(Z,s) \right| \leq A \cdot \det(\mathrm{Im}(Z))^{B}$$

for $\mathrm{Im}(Z) \geqq \rho \cdot 1_m$, $|s-s_0| < \delta$. ここで $\mathbb{D}$ は

$\forall$ monomial of degree N in $\dfrac{\partial}{\partial z_{ij}}$'s and $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_{ij}}$'s （但し

$Z = (z_{ij})$）.

（特に、$\forall$ "slowly increasing" differential operator

が R-S integral に apply できる。）

<u>補足</u> $\mathbb{E}_k^{(m)}(Z,s)$ を Fundamental Theorem (1) で def

したものとする。

(1°) この pole については次が知られている：

(1) $\mathbb{E}_0^{(m)}(Z,s)$ の possible poles は

$$\left\{ \frac{j}{4} \;\middle|\; j \in \mathbb{Z},\ 0 \leq j \leq 2m+2 \right\}$$

にある [Kal]。

(2) $k > 0$ なら $\mathbb{E}_k^{(m)}(Z,s)$ は entire [Mi, p.599]。

(2°) 講演の際、「pole はすべて simple pole か？」との

質問に対し筆者は「高々 double pole だ」と答えたが、

それは思い違いであった。正確な解答は次の通りである：

(i) $\mathbb{E}_0^{(m)}(Z,s)$ の pole については $s = \frac{m+1}{2}$ (resp. $s=0$)

が simple pole, residue $= \prod_{j=1}^{[\frac{m}{2}]} \xi(2j+1)$ (resp.

$-\prod_{j=1}^{[\frac{m}{2}]} \xi(2j+1)$) であることがわかっている [Kal] が、

他の possible poles は、実際に pole なのか、order はいくつなのかわからない。

(ii) もとの $E_k^{(m)}(Z,s)$ の pole は $\zeta(s)$ の zeros にも関係してくるので複雑である。

(3°) 結局、Eisenstein series の pole の様子が筆者にはまだよくわかっていないので、もう少し調べてみたいと思っている。 ┘

2. Outline of Proof

$Z = x + iy \in H_m$ (x, y : real) とする。[Ma] により、$\mathrm{Re}(s) > \frac{m+1}{2}$ で、$E_k^{(m)}(Z,s)$ の Fourier exp. は次のようになる：

$$E_k^{(m)}(Z,s) = \det(y)^s + \det(y)^s \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{h \in \Lambda_\nu} \sum_{q \in \mathbb{Z}_{prim}^{(m,\nu)}/GL_\nu(\mathbb{Z})}$$

$$S_\nu(h, 2s+k)\, \xi_\nu(y[q], h; s+k, s)$$

$$\cdot\, \mathbf{e}(\sigma(h[{}^tq]x)). \qquad (*)$$

ここで

$\mathbf{e}(s) := e^{2\pi i s}$, $\sigma :=$ trace,

$\Lambda_\nu := \{$ half-integral matrix of size $\nu \}$,

$\mathbb{Z}_{prim}^{(m,\nu)} := \{ m \times \nu$ integral matrix, primitive $\}$,

$$S_\nu(h,s) := \sum_{r={}^t r \in \mathbb{Q}^{(\nu)} \bmod 1} n(r)^{-s}\, e(\sigma(hr)) \quad : \quad \text{singular series (Siegel series)}$$

with

$n(r)$:= product of denominators of elementary divisors of r.

また $g > 0$: size ν, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ に対し、

$$\xi_\nu(g, h; \alpha, \beta) := \int_{{}^t x = x^{(\nu)}} e(-\sigma(hx)) \det(x+ig)^{-\alpha} \det(x-ig)^{-\beta} dx.$$

($\mathrm{Re}(\alpha+\beta) > \nu$ で convergent) : confluent hyper-geometric fcn [Sh 1].

Remarks

(1) (*) で, $\nu \longleftrightarrow$ rank of c in $\det(cZ+d)^{-k}$.

(2) $m \geq 3$ のとき, (*) : divergent for $\mathrm{Re}(s) < \frac{m-k}{2}$. ┘

(*) で h は Λ_ν のすべての rank の element をうごく。そこで $\lambda = \mathrm{rank}(h)$ とおき, $\mathrm{Re}(s) > m$ のもとで (*) を rearrange すると次を得る：

$$E_k^{(m)}(Z, s) = \sum_{0 \leq \lambda \leq \nu \leq m} F_{k,\nu,\lambda}^{(m)}(Z, s),$$

$\lambda = 0$ (constant terms)

$$F_{k,\nu,0}^{(m)}(Z, s) = \gamma(s)\, \mathrm{Zeta}(s) \det(y)^s\, \zeta_\nu^{(m)}\left(2y,\ 2s+k-\frac{\nu+1}{2}\right).$$

ここで　$\gamma(s)$ = Gamma factor ,　Zeta(s) = Riemann zeta factor ,

$1 \leq \nu \leq m$,　$y^{(m)} > 0$ に対し

$$\zeta_\nu^{(m)}(y, s) := \sum_{a \in \mathbb{Z}_{\mathrm{prim}}^{(m,\nu)}/GL_\nu(\mathbb{Z})} \det(y[a])^{-s} .$$

$(y[a] := {}^t a y a)$

これは $\mathrm{Re}(s) > \frac{m}{2}$ で convergent , 全 s-平面 に merom. にのびる [Ma] (Epstein zeta fcn , or Eisenstein series for GL_m)。

$$\zeta_0^{(m)} := 1 \qquad (\text{以下では } \zeta_0^{(0)} := 1) .$$

$\underline{\lambda > 0}$　$\Delta_\lambda^{(m)} := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0^{(m-\lambda,\lambda)} & * \end{pmatrix} \in GL_m(\mathbb{Z}) \right\}$ とすると

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\mathrm{prim}}^{(m,\lambda)}/GL_\lambda(\mathbb{Z}) & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & GL_m(\mathbb{Z})/\Delta_\lambda^{(m)} \\ \Psi & & \Psi \\ r & \longrightarrow & u_r = (\overset{\lambda}{\widetilde{r}} \; *) . \end{array}$$

各 u_r に対し $g(y, u_r) > 0$: size $m-\lambda$ を

$$y[u_r] = \begin{pmatrix} y[r] & 0 \\ 0 & g(y,u_r) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1_\lambda & * \\ 0 & 1_{m-\lambda} \end{bmatrix}$$

(Jacobi decomposition)

で決める。すると

$$F^{(m)}_{k,\nu,\lambda}(Z,s) = \gamma(s)\,Zeta(s)\,\det(y)^s \sum_{\substack{h\in\Lambda_\lambda \\ \det(h)\neq 0}} \sum_{u_r \in GL_m(\mathbb{Z})/\Delta^{(m)}_\lambda}$$

$$S_\lambda(h, 2s+k-\nu+\lambda)\,\xi^*_\lambda\left(y[r], h; s+k-\frac{\nu-\lambda}{2}, s-\frac{\nu-\lambda}{2}\right)$$

$$\cdot\,\zeta^{(m-\lambda)}_{\nu-\lambda}\left(2g(y,u_r), 2s+k-\frac{\nu+1}{2}\right)\cdot e(\sigma(h[{}^t r]x)).$$

$$(**)$$

ここで ξ^*_λ は ξ_λ を少し modify したものである。

この形にしておくと Fourier series $(**)$ は（適当な $(s-s_0)^\ell$ をかけると）$\forall s_0\in\mathbb{C}$ の nbd. で一様に convergent で，項別に何度でも (x,y) について differentiable となる。（証明には [Sh 1] [Ki] [Bö 1] の結果をつかう。）このことから．① $E^{(m)}_k(Z,s)$ の meromorphy，② poles の location が Z に independent なこと，③ $\forall$ partial derivative が slowly increasing なることが出る。

<u>Remark</u>

$(**)$ で，$\zeta^{(m-\lambda)}_{\nu-\lambda}$ が infinite series としてあらわれるのは $m-\lambda > \nu-\lambda > 0$，すなわち $m\geq 3$ のときである。」

3. Proof of functional equation

上の $F^{(m)}_{k,\nu,\lambda}(Z,s)$ を次のように書いておく：

$\lambda > 0$ のとき

$$F^{(m)}_{k,\nu,\lambda}(Z,s) = \sum_{\substack{h \in \Lambda_\lambda \\ \det(h) \neq 0}} \sum_{r \in \mathbb{Z}^{(m,\lambda)}_{prim}/GL_\lambda(\mathbb{Z})} b^{(m)}_{k,\nu,\lambda}(h[{}^t r], y, s)\, e(\sigma(h[{}^t r]x)).$$

「<u>Remark</u>　上で $h[{}^t r]$ は $\{ h' \in \Lambda_m \mid \mathrm{rank}(h') = \lambda \}$

をちょうど一回うごく。」

また

$$b^{(m)}_{k,\nu,0}(*, y, s) = F^{(m)}_{k,\nu,0}(Z, s) \quad (m>0),$$

$$b^{(0)}_{k,0,0} := 1$$

とおく。

§2で得られた $b^{(m)}_{k,\nu,\lambda}$ の explicit form により

$$b^{(m)}_{k,\nu,\lambda}(h[{}^t r], y, s) = \gamma(s)\, \mathrm{Zeta}(s)$$

$$\cdot\, \zeta^{(m-\lambda)}_{\nu-\lambda}\left(2g(y, u_r),\ 2s+k-\frac{\nu+1}{2}\right)$$

$$\cdot\, b^{(\lambda)}_{k,\lambda,\lambda}\left(h,\ y[r],\ s-\frac{\nu-\lambda}{2}\right).$$

（$\lambda = 0$ のとき $g(y, *) = y$ とおく。）

Eisenstein series の fcul. eq. は次のことから出る：

<u>Proposition</u> C(m, λ).

$m, \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\lambda \leq \nu \leq m$, $k \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。

このとき

$$\frac{\Gamma_m\left(s+\frac{k}{2}\right)}{\Gamma_m(s)} \cdot \xi(2s) \prod_{j=1}^{[\frac{m}{2}]} \xi(4s-2j)\, b^{(m)}_{k,\nu,\lambda}\left(h[t_r],\, y,\, s-\frac{k}{2}\right)$$

は $(s,\nu) \longmapsto \left(\frac{m+1}{2}-s,\ m+\lambda-\nu\right)$ で invariant.

[ここで empty product $:=1$. とくに $\Gamma_0(s):=1$.]

<u>Proof.</u> (m,λ) に関する twofold induction.

<u>$C(0,0)$</u> : これは $\xi(2s)=\xi\left(2\left(\frac{1}{2}-s\right)\right)$ のことだから OK.

<u>$C(\lambda,\lambda)$ for $\lambda<m \Rightarrow C(m,\lambda)$</u> : これは relation ⊘ と $\zeta^{(m-\lambda)}_{\nu-\lambda}$ の fcnl eq から OK.

よって次を示せばよい:

<u>$C(m,\lambda),\ \forall\lambda<m \Longrightarrow C(m,m)$</u>.

$$G(z,s) := \mathbb{E}^{(m)}_k(z,s) - \mathbb{E}^{(m)}_k\left(z,\frac{m+1}{2}-s\right)$$

を考える。($\mathbb{E}^{(m)}_k$ は §1 の Fundamental Theorem (1) で def. した "completed Eisenstein series".)

Induction assumption により

$G(z,s)=$ sum over $\{h\in\Lambda_m \mid \det(h)\neq 0\}$.

従って (Fourier coeff. の estimate により)

$G(z,s)$: rapidly decreasing C^∞-modular form of weight k.

よって Rankin - Selberg method により

$$(G(z,s),\ E_k^{(m)}(z,\bar{s}')) = 0 \quad \left(\begin{array}{l}\forall s' \text{ with} \\ \mathrm{Re}(s') > \frac{m+1-k}{2}\end{array}\right).$$

このことから $(G,G)=0$, $G=0$. とくに $C(m,m)$ が正しい。 ▨

Remark $m=2$ のときに限って. 上の pf は [Kau] のそれと異なる（ここでは. singular series の fcnl eq と. confluent hypergeometric fcn の fcnl eq を使っていない）。」

References

[Bö 1] Böcherer, S.: Über die Fourierkoeffizienten der Siegelschen Eisensteinreihen. Manuscripta math., 45, 273 - 288 (1984).

[Bö 2] Böcherer, S.: Siegel modular forms and theta series. Proc. Symp. Pure Math., 49, Part 2, 3 - 17 (1989).

[BSY] Böcherer, S., Satoh, T., Yamazaki, T.: On the pullback of a differential operator and its application to vector valued Eisenstein series. Commentarii Math. Univ. St. Pauli, 42, 1 - 22 (1992).

[Ib] Ibukiyama, T.: On differential operators on automorphic forms and invariant pluri-harmonic polynomials. Preprint (1991).

[Kal] Kalinin, V. L.: Eisenstein series on the symplectic group. Math. USSR Sbornik, 32, 449 - 476 (1977).

[Kau] Kaufhold, G.: Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulfunktion 2. Grades. Math. Ann., 137, 454 - 476 (1959).

[Ki] Kitaoka, Y.: Dirichlet series in the theory of Siegel modular forms. Nagoya Math. J., 95, 73-84 (1984).

[La] Langlands, R. P.: On the Functional Equations Satisfied by Eisenstein Series. Lect. Notes in Math., vol. 544. Springer 1976.

[Ma] Maass, H.: Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series. Lect. Notes in Math., vol. 216. Springer 1971.

[Mi] Mizumoto, S.: Poles and residues of standard L-functions attached to Siegel modular forms. Math. Ann., 289, 589 - 612 (1991).

[Sh 1] Shimura, G.: Confluent hypergeometric functions on tube domains. Math. Ann., 260, 269 – 302 (1982).

[Sh 2] Shimura, G.: On Eisenstein series. Duke Math. J., 50, 417 – 476 (1983).