数理解析研究所講究録
843巻 1993年 130-135

Invariants of cusps and the dimension formula

東北大教養 尾形 庄悦

序. $C\subset\mathbb{R}^n$ を自己双対,等質,開凸錐とし,$G=\{g\in GL_n(\mathbb{R})\mid gC=C\}$ とする。このときチューブ領域 $\mathcal{D}=\mathbb{R}^n+\sqrt{-1}\,C$ は対称領域となる。$\mathcal{D}$ の正則自己同型群の単位元を含む連結成分を $\tilde{G}=(\mathrm{Hol}\,\mathcal{D})^0$ とおくと,$\tilde{G}$ はエルミート型の半単純リー群となる。$r=\mathbb{R}\text{-rk}\,\tilde{G}$ とする。$\mathbb{Q}\text{-rk}\,\tilde{G}=1$ となるように $\mathbb{Z}^n\subset\mathbb{R}^n$ をえらぶ。$\mathcal{D}$ の有理境界点 $\sqrt{-1}\infty$ に対応する $\tilde{G}$ の放物部分群 $\mathcal{P}$ は $G\ltimes\mathbb{R}^n$ と同型になる。$\tilde{G}$ の neat な算術部分群 $\tilde{\Gamma}$ を選ぶと局所対称領域 $\tilde{\Gamma}\backslash\mathcal{D}$ は有限個の点 $\{P_1,\cdots,P_h\}$ を付け加えてコンパクト化できる。

$Y^*=(\tilde{\Gamma}\backslash\mathcal{D})\cup\{P_1,\cdots,P_h\}$ (佐武-Baily-Borel コンパクト化).

$P_1=\sqrt{-1}\infty$ とする。$\pi: Y\longrightarrow Y^*$ を特異点解消とすると,例外因子 D は連結成分 $D^{(1)},\cdots D^{(h)}$ の和に分解する. $D^{(1)}=\pi^{-1}(P_1)$.

$\tilde{\Gamma}$ の重み k をもつカスプ型式全体を $S_k(\tilde{\Gamma})$ で表わすとき,その次元はリーマン-ロッホの定理を使って計算できる。

$$\dim S_k(\tilde{\Gamma})=\dim H^0(Y,\ L^{\otimes k}\otimes\mathcal{O}_Y(-D)).$$

更に，これは，$\tilde{\Gamma}\backslash\mathcal{D}$ の体積に比例する普遍係数をもつn次のkの多項式 $P(k)$ と各$D^{(i)}$から決まる不変量 $\chi_\infty(p_i)$の和として表わされる。i.e.,

$$\dim S_k(\tilde{\Gamma}) = P(k) + \sum_{i=1}^{h}(-1)^n \chi_\infty(p_i).$$

一方，ヒルベルト・モジュラー群の時（$r=n$，$C=(\mathbb{R}_{>0})^n$），セルバーグの跡公式により

$$\dim S_k(\tilde{\Gamma}) = P(k) + \sum_{i=1}^{h} 2^{-r} L_i(s)\Big|_{s=\frac{n}{r}}$$

と表わされる。$L_i(s)$は清水のL-関数の定数倍で，境界点p_iに対応する有理放物部分群P_iにより定義される。

この二つの公式より，

$$\sum_{i=1}^{h}(-1)^n\chi_\infty(p_i) = \sum_{i=1}^{h} 2^{-r} L_i(s)\Big|_{s=1}$$

が判る。このことから，Van der Geer は $(-1)^n\chi_\infty(p_i) = 2^{-r}L_i(s)|_{s=1}$ と予想した。Hirzebruch は $L_i(s)|_{s=1}$ が p_i の符号数不足指数 (signature defect) $\sigma(p_i)$ と一致すべきだと予想し，Atiyah, Donnelly-Singer により，また Müller により証明された。

この予想と定理はヒルベルト・モジュラー群の場合だけを扱っている。一般の場合を考えたい。

$\mathbb{R}^n$上のr次の多項式関数で，$g\in G$に対し，$N(gv)=(\det g)^{r/n}N(v)$ $v\in\mathbb{R}^n$を満たすように"ノルム"Nを定める。$S=\{N=0\}$を特異集合とすると，$\mathbb{R}^n\setminus S=\coprod_{i=0}^{m} C_i$ と分解する。$C_0=C$とする。佐藤－新谷の概均質ベクトル空間の理論によれば，

$$\xi_i(M, s) = \sum_{x \in \Gamma \backslash M \cap C_i} \frac{\mu(x)}{|N(x)|^s}$$

でゼータ関数を定めると，$\{\xi_i\}$は関数等式を満たす。佐武はξ_iの一次結合$L(M,S)$で単独で関数等式を満たすものを見つけた。

<u>定理</u>（佐武）　$L(M, 0) = 2^r \xi_0(M, 0)$.

結局，Van der Geer と Hirzebruch の予想を一般化して，二つの等式

$$\xi_0(M^*, 0) = (-1)^n \chi_\infty(p_1),$$
$$\xi_0(M^*, 0) = 2^{-r} \sigma(p_1) \quad (n\text{は奇数})$$

が成立するかどうかという，局所的問題に定式化される。

1. 凸錐のゼータ関数

$M \cong \mathbb{Z}^n$, $M_{\mathbb{R}} = M \otimes \mathbb{R}$とする。自己双対とも等質とも限らない開凸錐$C \subset M_{\mathbb{R}}$と部分群$\Gamma \subset GL(M)$の組で条件

(i)　$gC = C$　$\forall g \in \Gamma$,

(ii)　Γは$C/\mathbb{R}_{>0}$上固有不連続，固定点なしに作用する，

(iii)　商$\Gamma \backslash C/\mathbb{R}_{>0}$はコンパクト

を満たすものを考える。

$\langle\, ,\, \rangle : M^* \times M \longrightarrow \mathbb{Z}$を自然なpairingとし，$C$の双対錐を$C^* = \{y \in M^*_{\mathbb{R}} ;\ \langle y, x\rangle > 0 \quad \forall x \in \bar{C} \backslash \{0\}\}$で定める。$C$の特性関数を$\phi(x)$とする。このとき，凸錐$C$のゼータ関数を

$$Z(C, M; s) = \sum_{x \in \Gamma \backslash M \cap C} \phi_C(x)^s$$

で定める。

<u>定理</u> (i) $Z(C, M; s)$ は全平面へ有理型に解析接続される。

(ii) $s=0$ で正則，かつ，その値は $\Gamma \backslash C \cup \{0\}$ の錐分割の言葉を使って表わされる。

(iii) (石田) $Z(C, M; 0) \in \mathbb{Q}$.

<u>注意</u> C が等質，自己双対錐のとき，$\phi(x)$ は $N(x)^{-n/r}$ の定数倍であるから，$Z(C, M; 0) = \xi_0(M, 0)$.

2. 幾何的不変量

$\mathcal{D} = M_{\mathbb{R}} + \sqrt{-1}\, C \subset M_{\mathbb{C}}$ はチューブ領域で，$V = \Gamma \ltimes M \backslash \mathcal{D} \cup \sqrt{-1}\infty$ は孤立特異点 $p = \sqrt{-1}\infty$ を持つ正規解析空間である。この (V, p) を土橋カスプと呼ぶ。トロイダル埋込みを使って，特異点解消 $\pi: (\tilde{V}, X) \longrightarrow (V, p)$ を例外因子 X が単純正規交叉のみをもつようにとる。$X = \sum_{i \in I} X_i$. 各 X_i の定める類を $\delta_i \in H^2(\tilde{V}, \partial\tilde{V}; \mathbb{Z})$ とする。

定義(佐武) (i) $\chi_\infty(p) = \left[\prod_{i \in I} \dfrac{\delta_i}{1 - e^{-\delta_i}}\right]_n [\tilde{V}, \partial\tilde{V}] \in \mathbb{Q}$.

(ii) $\sigma(p) = \left[\prod_{i \in I} \delta_i \coth \delta_i\right]_n [\tilde{V}, \partial\tilde{V}] - \mathrm{sign}(\tilde{V}, \partial\tilde{V})$,

ここに，$\mathrm{sign}(\tilde{V}, \partial\tilde{V})$ はカップ積 $H^n(\tilde{V}, \partial\tilde{V}) \otimes H^n(\tilde{V}) \longrightarrow H^{2n}(\tilde{V}, \partial\tilde{V})$ により定まる $H^n(\tilde{V}, \partial\tilde{V}; \mathbb{R})$ 上の二次形式の符号数を表わす。

3. 結果

<u>定理</u>(石田) (V, p)が(C, Γ, M)により定まる偶数次元のカスプのとき,

$$\chi_\infty(p) = Z(C^*, {}^t\Gamma, M^*; 0).$$

<u>定理</u> nが偶数のとき,

$$\chi_\infty(p) = 2^{-n}\sigma(p).$$

この定理の証明には, $\mathrm{sign}(U, \partial U)$を$X_J := \bigcap_{j\in J} X_j$ $(J \subset I)$上のある二次形式の符号数の和で表わす公式が使われる。

4. 発展

$\mathcal{D}$がチューブ領域でない場合, 例えばm次元複素単位球$B^m = \{z \in \mathbb{C}^m \mid \|z\| < 1\}$の直積$\mathcal{D} = (B^m)^r$ $(r > 1)$の場合にも, $\Gamma\backslash\mathcal{D}$に有限個の点を付け加えてコンパクト化できることがある。このようなカスプ特異点pに対しても,

<u>定理</u> $n = mr$が偶数のとき,

$$\chi_\infty(p) = 2^{-n}\sigma(p).$$

<u>問題</u> §3での石田の定理に相当する等式を見つけたい。

参考文献

1. I. Satake and S. Ogata, Zeta functions associated to cones and their special values, Adv. Stud. Pure Math. vol. **15**, pp. 1-27(1989).
2. M.-N. Ishida, The duality of cusp singularities, Math. Ann. **298**, 81-97(1992).
3. S. Ogata, Hirzebruch's conjecture on cusp singularities, to appear in Math. Ann.
4. S. Ogata, Signature defects of Hilbert-Picard modular cusps, to appear in Math. Z.
5. H. Tsuchihashi, Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities, Tohoku Math. J. **35**, 607-639(1983).