数理解析研究所講究録
第 843 巻 1993 年 115-126

Local densities of quadratic forms

室蘭工大　桂田英典　(Hidenori Katsurada)

1　序

二次形式の局所密度は二次形式の整数論にとって非常に重要な不変量である（たとえば，Siegel[S] 参照）．しかし，これを精密に求めることは非常に難しい．そこで，これに付随する様々なべき級数を定義しその有理性，およびその分母，分子を調べるという試みが Kitaoka[Ki] を端緒としてなされている．この小文ではその一端を紹介する．

まず最初に局所密度および我々が問題とするべき級数の定義を述べよう．可換環 R に対して $M_{mn}(R)$ を Rに成分をもつ (m,n)-行列全体の集合とする．また Rを整域，S を Rの商体とし，

$$S_n(R)=\{(a_{ij})\in M_{nn}(S);a_{ji}=a_{ij},a_{ii},2a_{ij}\in R\}$$

とする．m,n を $m\geq n\geq 1$ を満たす整数，p を素数とする．$\mathbf{Z}_p,\mathbf{Q}_p$ をそれぞれ p 進整数環，p-進数体とする．$A\in S_m(\mathbf{Z}_p)\cap GL_m(\mathbf{Q}_p),B\in S_n(\mathbf{Z}_p)\cap GL_n(\mathbf{Q}_p)$ にたいして，Bの A による表現の密度（局所密度）$\alpha_p(A,B)$ を

$$\alpha_p(A,B)=\lim_{e\to\infty}\#\{\bar{X}\in M_{mn}(\mathbf{Z}_p)/p^eM_{mn}(\mathbf{Z}_p);A[X]\equiv B \bmod p^eS_n(\mathbf{Z}_p)\}$$

で定義する．ただし，$A[X]={}^tXAX$とする．冒頭にのべたように局所密度を精密に求めることは難しい．とくに，Bの行列式の p-進位数 ord_pB

が大きいときほどその表し方は複雑になる．そこで，その複雑さの度合をはかるため，我々は次の２つの型のべき級数を定義する：まず，A, B を上のとおりとし，$\mathbf{n}$ を $n_1 + ...n_l = n, n_i > 0$ $(i = 1,..,l)$ を満たす $\mathbf{n} = (n_1, ..., n_l) \in \mathbf{N}^l$（ただし $\mathbf{N}$ は０以上の整数の集合）の元としたとき，形式的べき級数 $P_p(A, B; \mathbf{n}, x_1, ..., x_l)$ を

$$P_p(A, B; \mathbf{n}, x_1, ..., x_l) = \sum_{\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_l)\in\mathbf{N}^l} \alpha_p(A, B[\mathrm{diag}(p^{\lambda_1}E_{n_1}, ..., p^{\lambda_l}E_{n_l})])x_1^{\lambda_1}...x_l^{\lambda_l}$$

と定義する．ここで，

$$\mathrm{diag}(B_1, ..., B_l) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_l \end{pmatrix}$$

であり E_{n_i} は n_i 次単位行列とする．p を強調する必要のないときには suffix の p を落とす．次に $A, \mathbf{n}$ を上のとおりとし B が $B = \mathrm{diag}(B_1, ..., B_l), B_i \in GL_{n_i}(\mathbf{Q}_p) \cap S_{n_i}(\mathbf{Z}_p)$ $(i = 1,..,l)$ の形に分解されているとき，$Q_p(A, B; \mathbf{n}, x_1, ..., x_l)$ を

$$Q_p(A, B; \mathbf{n}, x_1, ..., x_l) = \sum_{\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_l)\in\mathbf{N}^l} \alpha_p(A, \mathrm{diag}(p^{\lambda_1}B_1, ..., p^{\lambda_l}B_l))x_1^{\lambda_1}...x_l^{\lambda_l}$$

で定義する．ここでも，p を強調する必要のないときには suffix の p を落とす．すぐにわかるように，$l = 1$ のとき $Q(A, B; \mathbf{n}, x_1)$ は [Ki] で定義されたべき級数に一致する．また，B の分解 $B = \mathrm{diag}(B_1, ..., B_l)$ がジョルダン分解のとき $Q(A, B; \mathbf{n}, x_1, ..., x_l)$ を調べることは特に重要である．たとえば $p \neq 2, \mathbf{n} = (1, ..., 1)$ とし，A をひとつ固定したとき，有限個のユニモジュラー行列 $\mathrm{diag}(b_1, ..., b_n)$ にたいして $Q(A, B; \mathbf{n}; x_1, ..., x_n)$ の具体的な形がわかればすべての $B \in S_n(\mathbf{Z}_p) \cap GL_n(\mathbf{Q}_p)$ にたいして $\alpha_p(A, B)$ がわかることになる.（４節参照）また，$B = \mathrm{diag}(B_1, ..., B_l)$，$B_i \in GL_{n_i} \in S_{n_i}(\mathbf{Z}_p)$ のときは

$$Q(A, B; \mathbf{n}; x_1, ..., x_l) = \sum_{e\in\{0,1\}^l} x^e P(A, B^e; \mathbf{n}; x_1, ..., x_l)$$

となる．このとき，次の問題が考えられる：

問題１．$Q(A,B;\mathbf{n};x_1,....,x_l), P(A,B;\mathbf{n};x_1,....,x_l)$ は $x_1,...,x_l$の有理関数となるか．

問題２．もしそうだとしたら，それらの分母の形はどうなるか，また分子の次数はどうなるか．

この小論では２節で，[BS] に従って $Q(A,B;\mathbf{n};x_1,....,x_l)$ の有理性を示し，３節で，[BS] とは異なる方法で $P(A,B;\mathbf{n};x_1,....,x_l)$ の有理性を示す．また，３節の後半と４節で特別だが重要な場合に問題２を扱う．

2 Denef の p-進積分と $Q(A,B;\mathbf{n};x_1,...,x_l)$

$A\in S_m(\mathbf{Z}_p)\cap GL_m(\mathbf{Q}_p), \mathbf{n}=(n_1,...,n_l)\in\mathbf{N}^l, n_1+...+n_l=n$ とする．また $B=\mathrm{diag}(B_1,...,B_l), B_i\in S_{n_i}(\mathbf{Z}_p)\cap GL_{n_i}(\mathbf{Q}_p)$ とする．この節では [BS] に従って，Denef の p-進積分と $Q(A,B;\mathbf{n};x_1,...,x_l)$ との関係を述べ，それを用いて $Q(A,B;\mathbf{n};x_1,...,x_l)$ の有理性を示す．この節の議論は少し形をかえて $p=2$ のときにも適用できるが，簡単のため $p\neq 2$ とする．詳細は [BS] を参照されたい．

$\mathbf{Z}_p^*$を $\mathbf{Z}_p$の単数群とし，$\mathbf{Z}_p^*/\mathbf{Z}_p^{*2}=\{\bar{1},\bar{\Delta}\}$　とする．$r=(r_1,...,r_t)\in\mathbf{N}^t, \epsilon=(\epsilon_1,....,\epsilon_t)\in\{1,\Delta\}^t$にたいして $M_{mn}(\mathbf{Z}_p)\times\prod_{i=1}^l S_{n_i}(\mathbf{Z}_p)\times\mathbf{Z}_p^t$の部分集合$\Omega=\Omega(r,\epsilon)$ を

$$\Omega(r,\epsilon)=\{(x,y_1,...,y_l,\alpha_1,...,\alpha_t)\in M_{mn}(\mathbf{Z}_p)\times\prod_{i=1}^{l}S_{n_i}(\mathbf{Z}_p)\times\mathbf{Z}_p^t;$$

$$\infty>\mathrm{ord}_p(\alpha_1)>...>\mathrm{ord}_p(\alpha_t)\geq 0, p^{-\mathrm{ord}_p(\alpha_i)}\alpha_i\in\mathbf{Z}_p^{*2}\ (i=1,...,t),$$

$$A[x]\sim\mathrm{diag}(y_1,...,y_l)\sim\mathrm{diag}(\alpha_1U_{r_1,\epsilon_1},...,\alpha_tU_{r_t,\epsilon_t})\}$$

で定義する．ここで，$U_{r_i,\epsilon_i}=\mathrm{diag}(E_{r_i},\epsilon_i)\ (i=1,...,t)$ である．また，２つの $\mathbf{Q}_p$に成分をもつ対称行列 x,yが $\mathbf{Z}_p$上同値であるとき $x\sim y$と書く．

Ωは [Den1] の意味での semi-algebraic set であることに注意する．さらに $(z_1,...,z_l,\zeta_1,...,\zeta_t) \in \mathbf{C}^l \times \mathbf{C}^t$ にたいして$\xi_{r,\epsilon}(A,B;z_1,...,z_l,\zeta_1,....,\zeta_t)$ を

$$\xi_{r,\epsilon}(A,B;z_1,...,z_l,\zeta_1,....,\zeta_t)$$

$$= \int_\Omega \prod_{i=1}^{l} \left| \frac{\det y_i}{\det T_i} \right|_p^{z_i} \prod_{j=1}^{t} | \alpha_j |_p^{\zeta_j} | \, dx \, | \prod_{i=1}^{l} \left| \frac{\det B_i}{\det y_i} \right|^{(n_i+1)/2} | \, dy_i \, | \prod_{j=1}^{t} | \alpha_j |^{-1} | \, d\alpha_j \, |$$

で定義する．ここで$|\, dx \,|, |\, dy_i \,|, |\, d\alpha_j \,|$ はそれぞれ $M_{mn}(\mathbf{Q}_p), S_{n_i}(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Q}_p$ 上の正規ハール測度である．このとき 次が成立する．

Theorem 2.1. ([BS])
$\Re z_1,....,\Re z_l$が十分大きいとき

$$Q(A,B;p^{-n_1 z_1},....,p^{-n_l z_l}) = \prod_{i=1}^{n}(1-p^{-i})^{-1} \prod_{i=1}^{l} v(B_i)^{-1} \sum_{t=1}^{n} 2^{-2t}$$

$$\times \sum_{(r,\epsilon)\in \mathbf{N}^t \times \{1,\Delta\}^t} \alpha_{r,\epsilon}\xi_{r,\epsilon}(A,B;z_1,...,z_l,-m_1,....,-m_t)$$

が成り立つ．ここで $m_i = r_i(\sum_{j=1}^{i} r_j - (r_i-1)/2)$ であり，

$$\alpha_{r,\epsilon} = \prod_{i=1}^{t} \alpha_{r_i,\epsilon_i},$$

$$\alpha_{r_i,\epsilon_i} = \prod_{j=1}^{[r_i/2]} (1-p^{-2j}) \times \begin{cases} (1+(\frac{(-1)^{r_i/2}\epsilon_i}{p})p^{-r_i/2})^{-1} & r_i \text{ 偶数} \\ 1 & r_i \text{ 奇数} \end{cases}$$

である．また $v(B_i)$ は $\{y_i \in S_{n_i}(\mathbf{Z}_p) \cap GL_{n_i}(\mathbf{Q}_p); y_i \sim B_i\}$ の $S_{n_i}(\mathbf{Q}_p) \cap GL_{n_i}(\mathbf{Q}_p)$ 上の測度 $\left| \frac{\det B_i}{\det y_i} \right|_p^{(n_i+1)/2} | \, dy_i \, |$ に関する体積である．

これと Denef[De1] における p-進積分の一般論（の多変数への拡張）によりただちに次がしめされる．

Theorem 2.2. ([BS]) $Q(A,B;x_1,...,x_l) \in \mathbf{Q}(x_1,...,x_l)$ でありその分母のすべての因子は次の形をしている．

$$1-p^{-c}x_1^{b_1}...x_l^{b_l} \ (c \in \mathbf{Z}, b_1,...,b_l \in \mathbf{N})$$

上の方法は有理性を示すための最も直接的な方法であると思われる．[BS] にはこの他に様々な級数が定義されその有理性が示されている．

3 Igusa local zeta function と $P(A,B;\mathbf{n};x_1,...,x_l)$

この節では Katsurada[Ka1] に従って，Igusa local zeta function と $P(A,B;\mathbf{n};x_1,...,x_l)$ の関係を述べ，それを用いて $P(A,B;\mathbf{n};x_1,...,x_l)$ の有理性を示す．

$\{x_{ij}\ (1 \le i \le m, 1 \le j \le n), x_1,...,x_l\}$ を $\mathbf{Q}_p$上の変数とする．簡単のため $X = (x_{ij}), x = (x_1,...,x_l)$ とおく．$A \in S_m(\mathbf{Z}_p) \cap GL_m(\mathbf{Q}_p), B \in S_n(\mathbf{Z}_p) \cap GL_n(\mathbf{Q}_p)$ と $\mathbf{n} = (n_1,...,n_l)$ にたいして，$S_n(\mathbf{Q}_p[X,x])$ の元 $g(X,x) = (g_{ij}(X,x))$ を

$$g(X,x) = A[X] - B[\mathrm{diag}(x_1E_{n_1},....,x_lE_{n_l})]$$

で定義する．$g_{ii}(X,x), 2g_{ij}(X,x) \in \mathbf{Z}_p[X,x]$ である．$I_n = \{(i,j) \in \mathbf{N}^2; 1 \le i \le j \le n\}$ とし集合 Rにたいして $R^{<n>} = R^{I_n}$ とおく．すなわち

$$R^{<n>} = \{U = (u_{11},....,u_{1n},u_{22},....,u_{2n},....,u_{nn}; u_{ij} \in R\}$$

である．$\Re u_{ij} > 0\ ((i,j) \in I_n), \Re u_i > 0\ (i = 1,...,l)$ を満たす $((u_{ij}),u_1,...,u_l) \in \mathbf{C}^{<n>} \times \mathbf{C}^l$ にたいして

$$Z(A,B;(u_{ij}),u_1,...,u_l)$$

$$= \int_{\mathbf{Z}^l \times M_{mn}(\mathbf{Z}_p)} \prod_{1 \le i \le j \le n} |\ g_{ij}(X,x)\ |_p^{u_{ij}} \prod_{i=1}^{l} |\ x_i\ |_p^{u_i}|\ dx\ ||\ dX\ |$$

とおく．ここで $|\ dx\ |, |\ dX\ |$ はそれぞれ $\mathbf{Q}_p^l, M_{mn}(\mathbf{Q}_p)$ 上の正規 Haar 測度である．$Z(A,B;(u_{ij}),u_1,...,u_l)$ を $A,B,\mathbf{n}$ に付随する (generalized) Igusa local zeta function とよぶ．$Z(A,B;(u_{ij}),u_1,...,u_l)$ は$\Re u_{ij} > 0\ ((i,j) \in I_n), \Re u_i > 0\ (i = 1,...,l)$ で正則であるから領域

$$E = \{(u_{ij}),w_1,...,w_l) \in \mathbf{C}^{<n>} \times \mathbf{C}^l; \Re u_{ij} > 0,$$

$$\Re(w_k - 4n_k \sum u_{ij}) > -2n_k n(n+1) - 1 \ (k = 1, ..., l)\}$$

で

$$Z(A, B; ((u_{ij}), p^{2n_1 n(n+1)+4n_1 \sum u_{ij}+1-w_1}, ..., p^{2n_l n(n+1)+4n_l \sum u_{ij}+1-w_l})$$
$$= \sum_{(k_{ij}) \in \mathbf{Z}^{<n>}} P(A, B; (k_{ij}); p^{-w_1}, ..., p^{-w_l}) \prod (p^{-1} p^{-u_{ij}})^{k_{ij}}$$

と表される．ここで $P(A, B; (k_{ij}); x_1, .., x_l)$ は $x_1, ..., x_l$ の収束べき級数である．

Theorem 3.1. ([Ka1].) 上の記号と仮定のもとで $\min k_{ij}$ が十分大きいとき

$$P(A, B; (k_{ij}); x_1, ..., x_l) = c_{p,m,n}(1 - p^{-1})^{n(n+1)/2+l} P(A, B; \mathbf{n}; x_1, ..., x_l)$$

ここで $c_{p,m,n}$ は p, m, n によって決まる定数である．

すなわち この結果は $P(A, B; \mathbf{n}; x_1, ..., x_l)$ が本質的には $Z(A, B; ((u_{ij}), p^{2n_1 n(n+1)+4n_1 \sum u_{ij}+1-w_1}, ..., p^{2n_l n(n+1)+4n_l \sum u_{ij}+1-w_l})$ の $p^{u_{ij}}$ $((i.j) \in I_n)$ に関する Laurent 展開の係数として実現できることを示す．この結果と [Des] を組み合わせると簡単な留数解析により次を得る．

Theporem 3.2. ([Ka2])
$P(A, B; \mathbf{n}; x_1, ..., x_l) \in \mathbf{Q}(x_1, ..., x_l)$ でありその分母のすべての因子は

$$1 - p^{-c} x_1^{b_1} ....x_l^{b_l} \ (c \in \mathbf{Z}, b_1, ..., b_l \in \mathbf{N})$$

の形をしている．

我々の方法は 2 節の方法に比較して間接的である．しかし，$Z(A, B; (u_{ij}), u_1, ..., u_l$ の形が比較的よくわかるために $P(A, B; \mathbf{n}; x_1, ..., x_l)$ について（それゆえ $Q(A, B; \mathbf{n}; x_1, ..., x_l)$ について）より詳しい情報を得られることが多い．ここでは，つぎの 2 つをあげる．なお，次節も参照．

Theorem 3.3. [Ka4] $A \in S_m(\mathbf{Z}), B \in S_n(\mathbf{Z})$ とする．このとき

$$\deg P_p(A, B; \mathbf{n}; x_1, ..., x_l) \leq -l$$

がほとんどすべての p について成立する．とくに $B = \mathrm{diag}(B_1, ..., B_l)$ $(\deg B_i = n_i\ i = 1, .., l)$ のとき

$$\deg Q_p(A, B; \mathbf{n}; x_1, ..., x_l) \leq -2l$$

これは，定理３．１と [Den2] を組み合わせてできる．また具体的にどのような p にたいしてこの不等式が成立するかについては特別な場合には４節．定理４．１およびその系を参照されたい．

Theorem 3.4. [Ka3] $A \in S_m(\mathbf{Z}_p) \cap GL_m(\mathbf{Q}_p), B \in S_n(\mathbf{Z}_p) \cap GL_n(\mathbf{Q}_p), l = 1, \mathbf{n} = (n)$ とする．このとき，

$$Q(A, B; \mathbf{n}; x) = \frac{R(x)}{(1-x)\prod_{i=0}^{m_0}(1 - p^{(n-i)(n+i-m+1)}x^2)}$$

ここで $R(x) \in \mathbf{Q}[x]$ で，$m_0 = \min(n-1, [m/2])$. とくに m が偶数で A がユニモジュラーのとき

$$Q(A, B; \mathbf{n}; x) = \frac{S(x)}{(1-x)\prod_{i=0}^{m_0}(1 - (\epsilon p^{(n+i-m+1)/2})^{n-i}x)}$$

ここで $S(x) \in \mathbf{Q}[x]$ で　$\epsilon = \left(\dfrac{(-1)^{m/2}\det 2A}{p}\right)$.

これは，[Ki],[BS],[H] 等の $Q(A, B; \mathbf{n}; x)$ にたいする結果の精密化となっている．

4　B が対角行列のときの精密な結果

この節では $B \in S_n(\mathbf{Z}_p)$ が対角行列, $\mathbf{n} = (1, \ldots\ldots, 1)$ のとき $P(A, B; \mathbf{n}; x_1, \ldots, x_n)$ と $Q(A, B; \mathbf{n}; x_1, \ldots, x_n)$ の分母，分子 に関する精密な結果を述べる．$p \neq 2, m \geq 2n$ を仮定する．$A \in S_m(\mathbf{Z}_p), B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ $(b_i \in \mathbf{Z}_p \backslash \{0\}, \mathbf{n} = (1, \ldots\ldots, 1)$ とするとき，$P(A, B; \mathbf{n}; x_1, \ldots, x_n), Q(A, B; \mathbf{n}; x_1, \ldots, x_n)$ はそれぞれ

$$P(A, B; \mathbf{n}; x_1, \ldots, x_n) = \sum_{r_1, \ldots, r_n = 0}^{\infty} \alpha(A, \mathrm{diag}(b_1 p^{2r_1}, \ldots, b_n p^{2r_n})) x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n},$$

$$Q(A, B; \mathbf{n}; x_1, \ldots, x_n) = \sum_{r_1, \ldots, r_n = 0}^{\infty} \alpha(A, \mathrm{diag}(b_1 p^{r_1}, \ldots, b_n p^{r_n})) x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n}$$

と表される．以下，簡単のため，$P(A, B; \mathbf{n}; x_1, \ldots, x_n) = P(A, B; x_1, \ldots\ldots, x_n)$, $Q(A, B; \mathbf{n}; x_1, \ldots, x_n) = Q(A, B; x_1, \ldots, x_n)$ と表す．このとき，次が成立する．

Theorem 4.1. (1) 上の仮定のもとで

$$P(A, B; x_1, \ldots\ldots, x_n) = D_{p,m,n}(x_1, \ldots, x_n)^{-1} R(A, B; x_1, \ldots, x_n).$$

ただし $D_{p,m,n}(x_1, \ldots, x_n)$ は

$$D_{p,m,n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{\beta=1}^{n} \prod_{\gamma=1}^{n-\beta} \prod_{\{i_1, \ldots, i_{\beta+\gamma}\} \in \{1, \ldots, n\}} (1 - p^{\beta(-m+n+\gamma+1)} x_{i_1} \ldots x_{i_{\beta+\gamma}})$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} (1 - p^{-m+n+1} x_i) \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i).$$

で $R(A, B; x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ である．

(2) さらに，$A \in GL_m(\mathbf{Z}_p), B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots\ldots, b_n)$ $(b_i \in \mathbf{Z}_p^*, p\mathbf{Z}_p^*)$．とするとき

$$\deg P(A, B; x_1, \ldots\ldots, x_n) \leq -n.$$

とくに $A\in S_m(\mathbf{Z})\cap GL_m(\mathbf{Q}), B=\mathrm{diag}(b_1,....,b_n)$ $(b_i\in\mathbf{Z}\backslash\{0\})$ のとき $\det A, \det B$を割らないすべての素数 p にたいして，

$$P_p(A,B;x_1,...,x_n)\leq -n.$$

証明は，$P(A,B;x_1,....,x_n)$ およびそれを修正したべき級数の間に成り立つ漸化式を用いて帰納法により行う．詳細は [Ka5],[Ka6] を参照．この漸化式は [Ka5] では二次加群を用いて代数的に証明してあるが，3 節の方法を用いた別証明もある．なお，仮定 $m\geq 2n$ は結果の記述を簡単にするためのもので，この仮定がないときの結果については [Ka6] を参照．これより次を得る，

Corollary. (1) 上の定理の仮定のもとで

$$Q(A,B;x_1,....,x_n)=D_{p,m,n}(x_1^2,...,x_n^2)^{-1}S(A,B;x_1,...,x_n).$$

ただし，$S(A,B;x_1,...,x_n)\in\mathbf{Q}[x_1,...,x_n]$.

(2) さらに $A\in GL_m(\mathbf{Z}_p), B=\mathrm{diag}(b_1,....,b_n)$ $(b_i\in\mathbf{Z}_p^*, p\mathbf{Z}_p^*)$ ならば

$$\deg Q(A,B;x_1,....,x_n)\leq -2n.$$

とくに $A\in S_m(\mathbf{Z})\cap GL_m(\mathbf{Q}), B=\mathrm{diag}(b_1,....,b_n)$ $(b_i\in\mathbf{Z}\backslash\{0\})$ のとき $\det A, \det B$を割らないすべての素数 p にたいして，

$$Q_p(A,B;x_1,...,x_n)\leq -2n.$$

最後に例をあげる

Example 1. $\mathbf{Q}$ 係数のϵ,x,yに関する有理式 $S(\epsilon,x,y), T(\epsilon,x,y)$ をそれぞれ

$$S(\epsilon,x,y)=(1-\epsilon y^{-k})(1-x)^{-1}(1-\epsilon y^{-k+1}x)^{-1}$$

$$T(\epsilon,x,y)=(1+\epsilon y^{-k})(1-\epsilon y^{-k}x)(1-x)^{-1}(1-y^{-2k+1}x^2)$$

と定義する．

Proposition 4.1. (1)

$$S(\epsilon, x, p) = Q_p(A, b; x)$$

が $\det A, b \in \mathbf{Z}_p^*$, $\left(\dfrac{(-1)^k \det A}{p}\right) = \epsilon$を満たすすべての $p \neq 2, k \geq 1$, と $A \in S_{2k}(\mathbf{Z}_p), b \in \mathbf{Z}_p$にたいして成立する．

(2)

$$T(\epsilon, x, p) = Q_p(A, b; x)$$

が $\det A, b \in \mathbf{Z}_p^*$, $\left(\dfrac{(-1)^k b \det A}{p}\right) = \epsilon$を満たすすべての $p \neq 2, k \geq 1$, と $A \in S_{2k+1}(\mathbf{Z}_p), b \in \mathbf{Z}_p$にたいして成立する．

Examples 2. $\mathbf{Q}$ 係数の$\epsilon, \eta; x_1, x_2, y$に関する有理式$U(\epsilon, \eta; x_1, x_2, y)$ を

$$U(\epsilon, \eta; x_1, x_2, y) = (1 - \epsilon y^{-k})(1 + \epsilon\eta y^{1-k})$$

$$\times(1 - \epsilon y^{1-k}\eta(x_1 + x_2) + (y^{3-2k} + y^{1-k}\epsilon\eta)x_1x_2 - y^{3-2k}x_1x_2(x_1 + x_2) + y^{4-3k}x_1^2x_2^2\epsilon\eta)$$

$$\times(1 - y^{2-k}\epsilon x_1x_2)^{-1}(1 - y^{3-2k}x_1^2)^{-1}(1 - y^{3-2k}x_2^2)^{-1}(1 - x_1)^{-1}(1 - x_2)^{-1}$$

と定義する．

Proposition 4.2.

$$Q_p(A, B; x_1, x_2) = U(\epsilon, \eta; x_1, x_2, p)$$

が $\det A, b_1, b_2 \in \mathbf{Z}_p^*$, $\left(\dfrac{(-1)^k \det A}{p}\right) = \epsilon$, $\left(\dfrac{b_1 b_2}{p}\right) = \eta$ を満たすすべての素数 $p \neq 2$, 整数 $k \geq 2$ と $A \in S_{2k}(\mathbf{Z}_p), B = \mathrm{diag}(b_1, b_2)$ にたいして成立する．

Proposition 4.1 は，[S,Hilfssatz 16] の再定式化となっている．また Proposition 4.2 は$\epsilon = 1$のときは Maaß[M] の結果の再定式化となっている．いずれの場合も定理４．１の系よりも良い結果を与えている．Proposition 4.2 と同様のことは $n = 2, m = 2k + 1$ のときも成立する．

Remark: $S(\epsilon, x, p), T(\epsilon, x, p), U(\epsilon, \eta; x_1, x_2, y)$ は次の関数等式を満たす.

$$S(\epsilon, x, y) = -x^2yS(\epsilon^{-1}, x^{-1}, y^{-1}), T(\epsilon, x, p) = -\epsilon^{-2}x^2yT(\epsilon^{-1}, x^{-1}, y^{-1}),$$

$$U(\epsilon, \eta; x_1, x_2, y) = \epsilon^{-2}\eta^{-2}x_1^2x_2^2y^3U(\epsilon^{-1}, \eta^{-1}; x_1^{-1}, x_2^{-1}, y^{-1})$$

一般の m, n にたいしても上のような普遍的な有理式が存在し，同様な関数等式を満たすと予想される.

References

[BS] S.Böcherer and F.Sato, Rationality of certain formal power series related to local densities, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli 36(1987), 53-86.

[Den1] J. Denef, The rationality of the Poincaré series associated to p-adic points on a variety, Invent. math. 77(1984), 1-23.

[Den2] J. Denef, On the degree of Igusa's local zeta function, Amer. J. Math. 109 (1987), 991-1008.

[Des] B. Deshommes, Critères de rationalité et application à la série génératrice d'un système d'équation à coefficients dans un corps local, J. Number Theory 22 (1986) 75-114.

[H]Y.Hironaka, On a denominator of Kitaoka's formal power series attached to local densities,Comment. Math. Univ. St. Paul. 37 (1988), 159-171.

[Ka1] H. Katsurada, Generalized Igusa local zeta functions and local densities of quadratic forms, Tôhoku Math. J. 44 (1992), 211-218

[Ka2] H.Katsurada, Rationality of a certain formal power series attached to local densities of quadratic forms, preprint.

[Ka3] H.Katsurada, A remark on Kitaoka formal power series attached to local densities of of quadratic forms, preprint.

[Ka4] H.Katsurada, On the degree of a formal power series attached to local densities, in preparation.

[Ka5,6] H.Katsurada, A certain formal power series attached to local densities of quadratic forms I,II, preprint.

[Ki] Y. Kitaoka, Local densities of quadratic forms and Fourier coefficients of Eisenstein series, Nagoya Math. J., 103(1986), 149-160.

[M] H. Maaß, Die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades, Mat. -Pys. Medd. Danske Vid. Selsk., 34 (1964), no.7, 1-25.

[S] C. L. Siegel, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, Ann. of Math. 36(1935), 527-606.