数理解析研究所講究録
第 843 巻 1993 年 72-78

Rankin - Selberg convolutions for $U(n,n+1)$

渡部 隆夫 (東北大 教養)

ユニタリ群の保型形式のリフティングを調べているさいに, Gelbart and Piatetuki-Shapiro の論法 ([G-P, Part B]) の拡張に気付いたので, それを報告する.

0. Notation

F を代数体とし, E/F を２次拡大とする. F 上次の代数群を考える.

$$G^n = U(n,n+1)$$
$$= \left\{ g = \begin{pmatrix} A & \alpha & B \\ \beta & \epsilon & \gamma \\ C & \delta & D \end{pmatrix} \in GL_{2n+1}(E) \mid {}^t\overline{g} \begin{pmatrix} & & 1_n \\ & 1 & \\ 1_n & & \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} & & 1_n \\ & 1 & \\ 1_n & & \end{pmatrix} \right\}$$
$$H^n = U(n,n)$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & D \end{pmatrix} \in G^n \right\}$$

また $1 \leq q \leq n$ にたいして

$$GL_q^n = \left\{ \iota(A) = \begin{pmatrix} A & & & & \\ & 1_{n-q} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & {}^t\overline{A}^{-1} & \\ & & & & 1_{n-q} \end{pmatrix} \mid A \in GL_q(E) \right\}$$

$$G^{n-q} = \left\{ \begin{pmatrix} 1_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & \alpha & 0 & B \\ 0 & \beta & \epsilon & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1_q & 0 \\ 0 & C & \delta & 0 & D \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} A & \alpha & B \\ \beta & \epsilon & \gamma \\ C & \delta & D \end{pmatrix} \in U(n-q, n-q+1) \right\}$$

$$\Delta_q = \left\{ \iota(\delta) \in GL_q^n \mid \delta = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in GL_q(E) \right\}$$

$$L_q = \left\{ \iota(\ell) \in GL_n^n \mid \ell = \begin{pmatrix} 1_q & * \\ 0 & 1_{n-q} \end{pmatrix} \in GL_n(E) \right\}$$

$$N_q = \left\{ n_q(\alpha, B) = \begin{pmatrix} 1_n & \alpha & B \\ 0 & 1 & -{}^t\overline{\alpha} \\ 0 & 0 & 1_n \end{pmatrix} \in G^n \mid \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0_{n-q} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\widetilde{U}_q = L_q N_q$$

$U_q = \Delta_q L_q N_q$
$\widetilde{M}_q = GL_q^n \times G^{n-q}$
$Q_q = \widetilde{M}_q \widetilde{U}_q =$ a maximal parabolic subgroup of G^n
$P_q = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_q$
$R_q = Q_q \cap Q_{q+1} \cap \cdots \cap Q_n$

G^n の部分群 G が与えられた時,

$$^{\circ}G = G \cap H^n$$

とおく.

1. Cusp forms on G^n.

$\mathbf{A}$ を F のアデールとし, 自明でない指標 μ: $F\backslash\mathbf{A} \to \mathbf{C}^1$ を固定する. このとき $U_q(\mathbf{A})$ の指標 μ_q を次のように定義する.

$$\mu_q(\iota(\delta)\iota(\ell)n_q(\alpha, B)) = \mu(\mathrm{tr}_{E/F}(\delta_{12} + \cdots + \delta_{q-1q} + \alpha_q))$$

簡単な計算から

(1.1) $$\{g \in G^{n-q}(\mathbf{A}) \mid \mu_q(g^{-1}ug) = \mu_q(u) \text{ for all } u \in U_q(\mathbf{A})\} = H^{n-q}(\mathbf{A})$$

がわかる.

$\mathcal{A}_0(G^n)$ を $G^n(\mathbf{A})$ 上の cusp form のなす空間とする. $\varphi \in \mathcal{A}_0(G^n)$ にたいして

$$\lambda_q(\varphi; g) = \int_{U_q\backslash U_q(\mathbf{A})} \mu_q^{-1}(u)\varphi(ug)du$$

とおく. (1.1) より

$$\lambda_q(\varphi; hg) = \lambda_q(\varphi; g) \text{ for all } h \in H^{n-q}$$

となるから, σ を H^{n-q} 上自明な $H^{n-q}(\mathbf{A})$ の character とするとき

$$W_q^{\sigma}(\varphi; g) = \int_{H^{n-q}\backslash H^{n-q}(\mathbf{A})} \sigma(h)\lambda_q(\varphi; hg)dh$$

とおく. $q = n$ の場合, $W_n(\varphi; g)$ は通常の Whittaker 関数である.

Lemma. 任意の $\varphi \in \mathcal{A}_0(G^n)$ にたいして

$$\int_{^{\circ}\widetilde{U}_q\backslash^{\circ}\widetilde{U}_q(\mathbf{A})} \varphi(ug)du = \sum_{\gamma \in \Delta_q\backslash GL_q^n} \lambda_q(\varphi; \gamma g)$$

証明. 記述を簡単にするため $q = 2$ の場合に証明してみる. 一般に $^{\circ}N_q$ は N_q の正規部分群で $^{\circ}N_q\backslash N_q \cong E^q$ であることに注意して, $\alpha_1, \alpha_2 \in E$ にたいして

$$\overline{n}_2\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = {}^{\circ}N_2 \cdot n_2(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, 0) \in {}^{\circ}N_2\backslash N_2$$

とおく. このとき

$$\iota(A)\overline{n}_2\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\iota(A)^{-1}=\overline{n}_2\left(A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\right)\quad\text{for } A\in GL_2(E)\tag{1.2}$$

である. いま $\varphi\in\mathcal{A}_0(G^n)$ と $g\in G^n(\mathbf{A})$ を固定して

$$(E\backslash\mathbf{A}_E)^2\ni\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\mapsto J\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\int_{{}^\circ\widetilde{U}_2\backslash{}^\circ\widetilde{U}_2(\mathbf{A})}\varphi\left(u\overline{n}_2\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}g\right)du$$

により関数 J を定義する.

$$C_g(\beta_1,\beta_2)=\int_{(E\backslash\mathbf{A}_E)^2}\mu(\mathrm{tr}_{E/F}(\beta_1x_1+\beta_2x_2))^{-1}J\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}dx_1dx_2$$

とすればフーリエ展開

$$J\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\sum_{\beta_1,\beta_2\in E}C_g(\beta_1,\beta_2)\mu(\mathrm{tr}_{E/F}(\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2))$$

をえる. このとき φ が cusp form であることと (1.2) から

$$C_g(0,0)=0$$
$$C_{\iota(A)g}(\beta_1,\beta_2)=C_g((\beta_1,\beta_2)A)\quad\text{for } A\in GL_2(E)$$

が従う. よって

$$\Delta'=\{A\in GL_2(E)\mid(0,1)A=(0,1)\}$$

とすれば

$$J\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\sum_{A\in\Delta'\backslash GL_2(E)}C_{\iota(A)g}(0,1)$$

をえる. 次に

$$\Delta_2\backslash\Delta_2(\mathbf{A})\ni\iota(\delta)\mapsto C_{\iota(\delta)g}(0,1)$$

により $\Delta_2\backslash\Delta_2(\mathbf{A})\cong E\backslash\mathbf{A}_E$ 上の関数を定義してそのフーリエ展開を求めると

$$C_g(0,1)=\sum_{\gamma\in\Delta_2\backslash\iota(\Delta')}\lambda_2(\varphi;\gamma g)$$

となる. 以上をあわせると

$$\int_{{}^\circ\widetilde{U}_2\backslash{}^\circ\widetilde{U}_2(\mathbf{A})}\varphi(ug)du=J\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$
$$=\sum_{A\in\Delta'\backslash GL_2(E)}\sum_{\gamma\in\Delta_2\backslash\iota(\Delta')}\lambda_2(\varphi;\gamma\iota(A)g)=\sum_{\gamma\in\Delta_2\backslash GL_2^n}\lambda_2(\varphi;\gamma g)\qquad\blacksquare$$

cusp form の定義から

$$\int_{\widetilde{U}_q\backslash\widetilde{U}_q(\mathbf{A})}\varphi(ug)du=0 \quad \text{for all } 1\le q\le n$$

であることに注意する．上の等式の左辺は φ を $H^n(\mathbf{A})$ 上の関数に制限したときの ${}^\circ\widetilde{U}_q$ に沿った constant term であるとみなせる．また

$$\varphi|_{H^n(\mathbf{A})}\in L^2(H^n\backslash H^n(\mathbf{A}))=L^2_{cusp}(H^n\backslash H^n(\mathbf{A}))\oplus\bigoplus_{\{{}^\circ P\}}L^2(H^n,\{{}^\circ P\}) \tag{1.3}$$

(ここで右辺は Langlands の elementary decomposition で $\{{}^\circ P\}$ は H^n の F-rational proper standard parabolic subgroups の association classes を動き，$L^2(H^n,\{{}^\circ P\})$ は ${}^\circ P$ の Levi subgroup の cusp forms から生じる incomplete theta series で張られた $L^2(H^n\backslash H^n(\mathbf{A}))$ の部分空間とする) であるから次がわかる．

Corollary. $\varphi\in\mathcal{A}_0(G^n)$ にたいして

$$\varphi|_{H^n(\mathbf{A})}\in L^2_{cusp}(H^n\backslash H^n(\mathbf{A}))\Longleftrightarrow\lambda_q(\varphi;\cdot)=0 \quad \textit{for all } 1\le q\le n$$

この右側の条件をみたす保型形式を特徴付けることは興味ある問題であるように思われる．たとえば，[W] において導入した filtration を用いれば $\mathcal{A}^1(G^n)$ ([W] の記号では $\mathcal{A}^1({}^1G^n)$) に属する保型形式は明らかにこの条件をみたす．ここで cuspidal theta series は $\mathcal{A}^1(G^n)$ に属していることを注意しておく．

一般に条件 $\lambda_q(\varphi;\cdot)=0$ は ${}^\circ P\subset{}^\circ Q_q$ であるような任意の parabolic subgroup ${}^\circ P$ について，$\varphi|_{H^n(\mathbf{A})}$ が $L^2(H^n,\{{}^\circ P\})$ と直交することを意味する．これから

Corollary. $\varphi\in\mathcal{A}_0(G^n)$ にたいして

$$\lambda_n(\varphi;\cdot)=0\Longrightarrow\varphi|_{H^n(\mathbf{A})}\perp L^2(H^n,\{{}^\circ R_q\}) \quad \textit{for all } 1\le q\le n$$

たとえば，$n=2$ の場合

$$L^2(H^2\backslash H^2(\mathbf{A}))=L^2_{cusp}(H^2\backslash H^2(\mathbf{A}))\oplus L^2(H^2,\{{}^\circ P_2\})\oplus L^2(H^2,\{{}^\circ Q_1\})\oplus L^2(H^2,\{{}^\circ Q_2\})$$

であるが

$$\begin{aligned}
&(1)\ \ \lambda_1(\varphi;\cdot)=\lambda_2(\varphi;\cdot)=0 &&\Longleftrightarrow\varphi|_{H^2(\mathbf{A})}\in L^2_{cusp}(H^2\backslash H^2(\mathbf{A}))\\
&(2)\ \ \lambda_1(\varphi;\cdot)\neq0,\ \ \lambda_2(\varphi;\cdot)=0 &&\Longrightarrow\varphi|_{H^2(\mathbf{A})}\in L^2_{cusp}(H^2\backslash H^2(\mathbf{A}))\oplus L^2(H^2,\{{}^\circ Q_1\})\\
&(3)\ \ \lambda_1(\varphi;\cdot)=0,\ \ \lambda_2(\varphi;\cdot)\neq0 &&\Longrightarrow\varphi|_{H^2(\mathbf{A})}\in L^2_{cusp}(H^2\backslash H^2(\mathbf{A}))\oplus L^2(H^2,\{{}^\circ Q_2\})
\end{aligned}$$

となる．

2. Eisenstein series on H^n.

$H^n(\mathbf{A})$ 上の Eisenstein 級数を以下の様に構成する．まず指標を

$$\alpha:{}^\circ Q_q(\mathbf{A})=GL^n_q(\mathbf{A})H^{n-q}(\mathbf{A}){}^\circ\widetilde{U}_q(\mathbf{A})\to\mathbf{C}^*:\alpha(\iota(A)hu)=|\det A|,\quad \begin{array}{l}A\in GL_q(\mathbf{A}_E)\\ h\in H^{n-q}(\mathbf{A}),\ u\in{}^\circ\widetilde{U}_q(\mathbf{A})\end{array}$$

で定義する．いま $GL_q(\mathbf{A}_E)$ の 既約 square-integrable 表現 (τ, V_τ) と $H^{n-q}(\mathbf{A})$ の既約 square-integrable 表現 (σ, V_σ) をとる．このとき $\tau \otimes \sigma$ は自然に ${}^\circ Q_q(\mathbf{A})$ まで延長される．$V_\tau \otimes V_\sigma$ は $L^2({}^\circ\widetilde{M}_q\backslash{}^\circ\widetilde{M}_q(\mathbf{A}))$ に実現されているとする．このとき

$$\begin{aligned} J(\tau,\sigma,s) &= \left\{f : H^n(\mathbf{A}) \to V_\tau \otimes V_\sigma \mid f(gh) = \alpha(g)^{s+n-q/2}(\tau\otimes\sigma)(g)(f(h)), \quad \begin{matrix} g \in {}^\circ Q_q(\mathbf{A}) \\ h \in H^n(\mathbf{A}) \end{matrix}\right\} \\ &= \mathrm{Ind}_{{}^\circ Q_q(\mathbf{A})}^{H^n(\mathbf{A})} \alpha^s \tau \otimes \sigma \end{aligned}$$

とおく．$f_s \in J(\tau,\sigma,s)$ にたいして，Eisenstein 級数を

$$E(f_s;h) = \sum_{\gamma \in {}^\circ Q_q \backslash H^n} (f_s(\gamma h))(1_n)$$

で与える．これは $\Re s > n - q/2$ で絶対収束し有理型関数に解析接続される．さらに

$$W(f_s;h) = \int_{\Delta_q\backslash\Delta_q(\mathbf{A})} \mu_q(u)(f_s(uh))(1_n)du$$

とおく．スペクトル分解との関係を述べる．$L^2(H^n\backslash H^n(\mathbf{A}))$ の１次元連続スペクトルに関係する部分は Langlands の記号の類似で

$$\bigoplus_{k=1}^{n} \bigoplus_{\substack{\{{}^\circ P\} \\ {}^\circ P \subset {}^\circ Q_k}} L^2(H^n, \{{}^\circ Q_k\}, \{{}^\circ P\})$$

とかける．ここで

$$X(\tau,\sigma) = \text{closure of } \left\{ \int_{\Re s = 0} \psi(s) E(f_s;h)ds \;\middle|\; \begin{matrix} \psi \in C_c(\sqrt{-1}\mathbf{R}) \\ f_s \in J(\tau,\sigma,s) \end{matrix} \right\}$$

とすれば

$$L^2(H^n, \{{}^\circ Q_q\}, \{{}^\circ P\}) = \bigoplus_{\substack{\{{}^\circ\widetilde{M}_q \cap {}^\circ P'\} \\ {}^\circ P' \subset \{{}^\circ P\}}} \bigoplus_{\tau\otimes\sigma \in L^2_{disc}({}^\circ\widetilde{M}_q, \{{}^\circ\widetilde{M}_q \cap {}^\circ P'\})} X(\tau,\sigma)$$

である．とくに[M-W]の結果から

(1) $L^2(H^n, \{{}^\circ Q_q\}, \{{}^\circ Q_q\}) = \displaystyle\bigoplus_{\substack{\tau\,:\,\text{cuspidal} \\ \sigma\,:\,\text{cuspidal}}} X(\tau,\sigma)$

(2) $L^2(H^n, \{{}^\circ Q_q\}, \{{}^\circ R_q\}) = \displaystyle\bigoplus_{\substack{\tau\,:\,\text{cuspidal} \\ \sigma\,:\,\text{character}}} X(\tau,\sigma) \oplus \bigoplus_{\substack{\tau\,:\,\text{character} \\ \sigma\,:\,\text{residual}}} X(\tau,\sigma)$

(3) $L^2(H^n, \{{}^\circ Q_q\}, \{{}^\circ P_q\}) = \displaystyle\bigoplus_{\substack{\tau\,:\,\text{character} \\ \sigma\,:\,\text{cuspidal}}} X(\tau,\sigma)$

(4) $L^2(H^n, \{{}^\circ Q_q\}, \{{}^\circ P_k\}) = \displaystyle\bigoplus_{\substack{\tau\,:\,\text{character} \\ \sigma\,:\,\text{residual}}} X(\tau,\sigma) \quad \text{for all } q+1 \le k \le n$

(5) $L^2(H^n, \{{}^\circ Q_q\}, \{{}^\circ R_k\}) = \{0\} \quad \text{for all } 2 \le k \le q-1$

となる.

3. Basic identity.

$G^n(\mathbf{A})$ の既約 cuspidal 表現 (π, V_π) をとる. $\varphi \in V_\pi$ と $f_s \in J(\tau, \sigma, s)$ にたいして

$$I(\varphi, f_s) = \int_{H^n \backslash H^n(\mathbf{A})} \varphi(h) E(f_s; h) dh$$

とおく. [M-W] より τ が residual のならば, それは Whittaker model をもたない. この事実と Lemma を使った式の変形から次をえる.

THEOREM. (1) τ が *residual* のとき $I(\varphi, f_s) = 0$

(2) τ が *cuspidal* で σ が *character* のとき

$$I(\varphi, f_s) = \int_{{}^\circ U_q(\mathbf{A}) H^{n-q}(\mathbf{A}) \backslash H^n(\mathbf{A})} W_q^\sigma(\varphi; h) W(f_s; h) dh$$

($q = n$ のとき, (2) は Gelbart and Piatetski-Shapiro によって証明された. σ が cuspidal のときこのような Basic identity が存在するかどうかはわかっていない.) (1) より

COROLLARY. 任意の $\varphi \in \mathcal{A}_0(G^n)$ について

$$\varphi|_{H^n(\mathbf{A})} \perp \bigoplus_{q=1}^{n} \bigoplus_{k=q}^{n} L^2(H^n, \{{}^\circ Q_q\}, \{{}^\circ P_k\})$$

とくに $q = n$ のとき

COROLLARY. 任意の $\varphi \in \mathcal{A}_0(G^n)$ について

$$\varphi|_{H^n(\mathbf{A})} \perp \bigoplus_{\substack{\{{}^\circ P\} \\ {}^\circ P \subset {}^\circ Q_n \\ {}^\circ P \neq {}^\circ Q_n}} L^2(H^n, \{{}^\circ Q_n\}, \{{}^\circ P\})$$

さて, (2) の場合を考察する. 右辺の積分の領域はアデールでありかつ $W(f_s; h)$ は f_s を適当にとれば local Whittaker 関数の積に分解するから, 次の問題が自然に生じる.

QUESTION. 右辺の積分はオイラー積をもつか?

この問題についてわかっていることを述べる. いま $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\infty \cup \mathcal{P}_f$ を F の素点全体の集合とすれば, π は制限テンソル積 $\pi = \otimes_v \pi_v$ に分解される. 各 $v \in \mathcal{P}$ について

$$L_q(\pi_v) = \left\{ \begin{array}{l} \ell \colon V_{\pi_v} \to \mathbf{C} \;\; \text{linear functional such that} \\ \ell(\pi_v(uh)x) = \mu_{q,v}(u)\sigma_v(h)\ell(x), \quad \text{for any } u \in U_q(F_v),\ h \in H^{n-q}(F_v),\ x \in V_{\pi_v} \end{array} \right\}$$

とおき, 次の命題を考える.

(M-q) $\qquad \dim L_q(\pi_v) \le 1$ for any irreducible unitary rep. π_v of $G^n(F_v)$

このとき

$$(\text{M-q}) \text{ がすべての } v \in \mathcal{P} \text{ について真である} \Longrightarrow W_q^q(\varphi; h) \text{ は積に分解する}$$
$$\Longrightarrow I(\varphi, f_s) \text{ は Euler 積をもつ}$$

がなりたつ. 上の命題については次の結果が知られている.

(3.1) (M-n) is true for all $v \in \mathcal{P}$.
(3.2) (M-(n-1)) is true for non-split $v \in \mathcal{P}_f$. (Novodvorsky [N]).

(3.1) については $W_n(\varphi, \cdot)$ が Whittaker 関数であることから明らかである. この場合には B. Tamir [T] により Basic identity の右辺の積分の不分岐局所因子の計算も行われている.

以上の事柄は直交群 $SO(n, n+1)$ についても同様に成り立つ. この場合 (M-(n-1)) に類似の命題は, すべての有限素点で真である.

References

[G-P] S. Gelbart and I. Piatetski-Shapiro, *L-functions for $G \times GL(n)$*, in "Explicit Costructions of Automorphic L-functions," Springer Lecture Notes in Math. 1254, 1987, pp. 53 - 136.
[M-W] C. Moeglin and J.-L. Waldspurger, *Le spectre residuel de $GL(n)$*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **22** (1989), 605 - 674.
[N] M. Novodvorsky, *New unique models of representations of unitary groups*, Comp. Math **33** (1976), 289 - 295.
[T] B. Tamir, *On L-functions and intertwining operators for unitary groups*, Israel J. Math. **73** (1991), 161 - 188.
[W] T. Watanabe, *Theta liftings for quasi-split unitary groups*, preprint.