数理解析研究所講究録
844巻 1993年 172-182

Regulatorの大きさの評価

東北大学教養部 内田興二
(Kōji Uchida)

序. 代数体 K の次数を n, 実共役が r_1 個, 虚の共役が $2r_2$ 個とする。 K の regulator を R_K, 判別式を D_K, 類数を h, Kに含まれる1の巾根の個数を wとする。 R_K の大きさをnおよびD_Kに関係する値で評価することを問題とする。 どの2つも複素共役でないKの r_1+r_2 個の同型写像を考え, Kの元αのそれらの同型による像を $\alpha^{(i)}$, $i=1,\cdots,r_1+r_2$, と記す。 $r=r_1+r_2-1$ とし, Kの基本単数を $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ とするとき, regulator R_K は行列式

$$R_K = \begin{vmatrix} \log\|\varepsilon_1^{(1)}\| & \cdots & \log\|\varepsilon_r^{(1)}\| \\ \vdots & & \vdots \\ \log\|\varepsilon_1^{(r)}\| & \cdots & \log\|\varepsilon_r^{(r)}\| \end{vmatrix}$$

で与えられる。 ここで $\|\cdot\|$ は正規化された絶対値であり, 行列式が正となるように $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ の順序を選んでおく。 Kの Dedekind ζ-関数 $\zeta_K(s)$ の $s=1$ における留数は $h\cdot\rho$

となる。 ここで ρ は一つのイデアル類に関する partial ζ-関数の留数である。 これらの ζ-関数の大きさを評価することによって R_K の大きさを評価するのが一つの考え方で，§1で簡単に紹介する。 もう一つの方法は行列式 R_K の各列を実 r 次元空間 $\mathbb{R}^r$ の格子を生成するベクトルと考え，その格子の基本領域の体積 R_K を，数の幾何学の方法を用いて評価する方法である。 その基本は§2に述べる successive minima の議論であるが，それを利用するには R_K そのものよりも $\mathbb{R}^{r+1}$ において行列式

$$\overline{R}_K = \begin{vmatrix} \log\|\varepsilon_1^{(1)}\| & \cdots\cdots & \log\|\varepsilon_r^{(1)}\| & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \log\|\varepsilon_1^{(r)}\| & \cdots\cdots & \log\|\varepsilon_r^{(r)}\| & 1 \\ \log\|\varepsilon_1^{(r_1+r_2)}\| & \cdots\cdots & \log\|\varepsilon_r^{(r_1+r_2)}\| & 1 \end{vmatrix}$$

の各列の生成する格子を考える方が扱いやすい。 その理由は，R_K を評価するときに除かれた一つの共役に関する $\log\|\varepsilon_j^{(r_1+r_2)}\|$ の大きさが常に関係すること，また

$$\sum_{i=1}^{r_1+r_2} \log\|\varepsilon_j^{(i)}\| = 0\,, \qquad j = 1, \cdots, r$$

により $\overline{R}_K = (r+1)R_K$ が得られ，同時に $\overline{R}_K$ の最後の列が他のすべての列と直交するから，次元を一つ上げても successive minima による評価が悪くならないことによる。

1. ゼータ関数の留数を評価する方法　代数体Kのζ関数 $\zeta_K(s)$, または一つのイデアル類に関する partial ζ関数に対して, 関数等式を用いて実数 $s>1$ におけるζ関数の値を評価し, それによって $s=1$ における留数の値を評価する。$\zeta_K(s)$ の値を上から評価する方法は古くから知られており, 留数 $\rho_h \geqq \rho$ であること, 及び

$$\rho = \frac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}R_K}{w\sqrt{|D_K|}}$$

によって R_K の上からの評価

$$R_K < c_n(\log|D_K|)^{n-1}\cdot\sqrt{|D_K|}$$

が Landau [7], Remak [13], Siegel [16] によって得られた。Zimmert [21] は partial ζ関数を評価する新しい方法を開発して,

$$R_K \geqq 0.02\,w\cdot\exp(0.46\,r_1 + 0.1\,r_2)$$

という下からの評価を得た。特に, 総実代数体で regulator が最小のものは $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ である。

2. Minkowski の successive minima　m 次元空間 $\mathbb{R}^m$ の lattice L に対して, L の i-th successive minimum λ_i とは, L に i 個の一次独立な元 $a_1, \cdots, a_i$ で

$$\|a_1\| \leqq \lambda, \cdots, \|a_i\| \leqq \lambda$$

となるものが存在するような λ の最小値をいう。

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_m$$

は明らかであるが，これらの積を評価したい。Lの基本領域の体積を $d(L)$ と表す。$\mathbb{R}^m$ のすべての lattice についての $\lambda_1{}^m/d(L)$ の上限を δ と記す。また $\lambda_1 = 1$ である lattice Lを考えると，半径 $\frac{1}{2}$ の開球には mod Lで合同な点がないから，$d(L)$ はその球の体積以上である。従って $\lambda_1 = 1$ である lattice 全体について $d(L)$ の下限を Δ と記すと，$\Delta > 0$ であるが，$\delta = \Delta^{-1}$ であることが容易に分る。

定理1 (Minkowski) $d(L) \leqq \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m \leqq \delta\cdot d(L)$

証明．基本領域の辺の長さを考えて，左の不等式は明らか。Lの一次独立な元 $\{\mathfrak{c}_1, \cdots, \mathfrak{c}_m\}$ を，$\|\mathfrak{c}_i\| = \lambda_i$ にとると，Lの基 $\{\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_m\}$ および $\mathbb{R}^m$ の正規直交基 $\{\mathfrak{u}_1, \cdots, \mathfrak{u}_m\}$ を，$\mathfrak{a}_i$ は $\mathfrak{c}_1, \cdots, \mathfrak{c}_i$ の一次結合で，$\mathfrak{a}_i = a_{i1}\mathfrak{u}_1 + \cdots + a_{ii}\mathfrak{u}_i$ となるようにできる。0でない整数の組 $(x_1, \cdots, x_m)$ に対して $x_k \neq 0$，$x_i = 0$ for $i > k$ とすると，$\sum x_i\mathfrak{a}_i$ は $\mathfrak{c}_1, \cdots, \mathfrak{c}_{k-1}$ の一次結合でないから $\|\sum x_i\mathfrak{a}_i\| \geqq \lambda_k$ であり

$$1 \leqq \lambda_k^{-2}\|\sum x_i\mathfrak{a}_i\|^2 = \lambda_k^{-2}\sum_j\Big(\sum_i x_i a_{ij}\Big)^2$$
$$\leqq \sum_j \lambda_j^{-2}\Big(\sum_i x_i a_{ij}\Big)^2$$

を得る。最後の不等式は，仮定から j も k 以下の和と考えて

よく，そのとき$\lambda_j \leqq \lambda_k$であることによる。従って

$$b_i = a_{i1}\cdot\lambda_1^{-1}u_1 + \cdots + a_{ii}\cdot\lambda_i^{-1}u_i, \quad i=1,\cdots,m$$

とおくと$\|\sum x_i b_i\| \geqq 1$となる。即ち$\{b_1,\cdots,b_m\}$を基とするlattice L'に対して$\lambda_1' \geqq 1$である。b_iの定義から

$$d(L') = (\lambda_1\cdots\lambda_m)^{-1}\cdot d(L)$$

となること及び

$$1/d(L') \leqq \lambda_1'^{m}/d(L') \leqq \delta$$

により，定理の右側の不等式が得られる。

δを評価するにはDirichletの積分

$$\int\cdots\int_D x_1^{p_1-1}\cdots x_m^{p_m-1}(1-x_1-\cdots-x_m)^{p_0-1}dx_1\cdots dx_m$$
$$= \frac{\Gamma(p_0)\cdots\Gamma(p_m)}{\Gamma(p_0+\cdots+p_m)}$$

を用いる。ただし，$D=\{x_1\geqq 0,\cdots,x_m\geqq 0,\ x_1+\cdots+x_m\leqq 1\}$。

特にm次元単位球の体積V_mは

$$V_m = \pi^{m/2}/\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)$$
$$= \begin{cases} \pi^{l}/l!, & m=2l \\ \pi^{l}2^{l+1}/(2l+1)(2l-1)\cdots 1, & m=2l+1 \end{cases}$$

となる。Lを$\lambda_1=1$であるlatticeとする。$2L$の点で原点を中心とし半径Aの球に含まれる点を$a_1,\cdots,a_r$とすると

$$r = 2^{-m}d(L)^{-1}A^m V_m + O(A^{m-1})$$

である。一方

$$\phi(x) = \mathrm{Max}\left(0,\ 1-\frac{\|x\|^2}{2}\right)$$

なる関数を考えると，$\|a_i - a_j\| \geqq 2$ と不等式

$$r\cdot\sum(y-b_i)^2 = \sum_{i<j}(b_i-b_j)^2 + (ry-\sum b_i)^2 \geqq \sum_{i<j}(b_i-b_j)^2$$

を用いて $\mathbb{R}^m$ の任意の点 x において

$$\sum \phi(x-a_i) \leqq 1$$

となる。原点を中心とし半径 $A+\sqrt{2}$ の球の外では左辺は 0 となるので，左辺の積分は $(A+\sqrt{2})^m\cdot V_m$ 以下であるが

$$\int_{\mathbb{R}^m}\sum\phi(x-a_i)\,dx = r\cdot\int_{\mathbb{R}^m}\phi(x)\,dx$$

$$= r\cdot\int_{\|x\|^2\leqq 2}\left(1-\frac{\|x\|^2}{2}\right)dx = r\cdot 2^{\frac{m}{2}}\left(1+\frac{m}{2}\right)^{-1}V_m$$

が Dirichlet の積分に帰着して分るので

$$r \leqq 2^{-\frac{m}{2}}\left(1+\frac{m}{2}\right)(A+\sqrt{2})^m$$

となり，$A\to\infty$ とすることにより

$$\delta^{-1} = \Delta \geqq 2^{-\frac{m}{2}}\left(1+\frac{m}{2}\right)^{-1}V_m$$

$$= (\pi/2)^{\frac{m}{2}}\Big/\left(1+\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right) = (\pi/2)^{\frac{m}{2}}\Big/\Gamma\left(2+\frac{m}{2}\right)$$

が得られる。この節は Cassels [2]，特に P.80, 120, 205, 249 によった。

3．数の幾何による R_K の評価　R_K の大きさを下から評価する方法は，体次数 n のみに関係する値で評価する方法も，

判別式D_Kにも関係する評価もRemak [14], [15] に始まる。総実代数体の場合にはPohst [9], [10]によってnと共に大きくなる評価が与えられた。判別式を含む評価は$|D_K|$が十分大きい場合に限るがSilverman [17]によって

$$R_K > c_n(\log d_n|D_K|)^{r-\rho}$$

という評価が与えられた。ここでrはKの単数群の階数，ρは真部分体の単数群の階数の最大値でc_n, d_nはnのみに関係する定数である。c_n, d_nの値についてはFriedman [6]によって改良された。以下ではρを別の値$\lambda \leqq \rho$でおきかえた評価について述べる。序に述べた行列式R_Kの各列の生成する格子を最後の列に直交する部分空間に制限した格子の基本領域の体積は，最後の列を正規化した行列式$\sqrt{r+1}\cdot R_K$に等しく，このr次元空間に定理1を適用して

$$R_K \geqq \sqrt{r+1}^{-1}\cdot \delta^{-1}\cdot \prod_{j=1}^{r} m(\varepsilon_j) \geqq (r+1)^{-\frac{r}{2}}\cdot \prod_{j=1}^{r} m(\varepsilon_j)$$

が得られる。ここで$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$は独立単数で

$$m(\varepsilon_j) = \left(\sum_{i=1}^{r+1} (\log\|\varepsilon_j^{(i)}\|)^2\right)^{1/2}$$

である。代数体Eの元αに対して

$$H_E(\alpha) = \prod_i \mathrm{Max}(1, \|\alpha^{(i)}\|)$$

をαのheightといい，Eがm次のとき$h(\alpha) = \frac{1}{m}\log H_E(\alpha)$をabsolute logarithmic heightという。

$$m(\varepsilon_j) \geqq \frac{1}{\sqrt{r+1}} \sum_{i=1}^{r+1} |\log\|\varepsilon_j^{(i)}\|| = \frac{2n}{\sqrt{r+1}}\, h(\varepsilon_j)$$

であり，Dobrowolsky[5]により $h(\varepsilon_i)$ は n のみに関係する値で下から評価できる。さらに詳しく評価するには ε_j を次のような部分体に含まれるものと含まれないものに分ける。

$c>1$ を定数（n に関係してよい）とし，F を K の部分体で

$$(*) \qquad |D_F| < |D_K|^{1/[K:F]^c}$$

なる不等式をみたす極大な体とする。Q はこの不等式をみたし，K はみたさないから，このような F は常に存在する。

定理2. F の単数群の階数を λ とすると，次数 n のみに関係する定数 $c_n, d_n > 0$ が存在して，$d_n|D_K| > 1$ なる K に対して

$$R_K > c_n(\log d_n|D_K|)^{r-\lambda}$$

が成立つ。

F に含まれない K の元 α を考え，$m = [F(\alpha):F]$ とする。$D_{F(\alpha)} = D_F^m \cdot N_F(D_{F(\alpha)/F})$ と $D_{F(\alpha)}$ は (*) をみたさないことから

$$|N_F(D_{F(\alpha)/F})| \geqq |D_K|^{(m^c-m)/[K:F]^c}$$

が分る。α の相対判別式 $\Delta(\alpha)$ は $D_{F(\alpha)/F}$ の倍数であることと，行列式の Hadamard の不等式により

$$|\Delta(\alpha)| \leqq \prod_{i=1}^{m}\left(1+|\alpha^{(i)}|^2+\cdots+|\alpha^{(i)}|^{2(m-1)}\right)$$

$$\leqq m^{m}\cdot\prod_{i=1}^{m}\mathrm{Max}\left(1,|\alpha^{(i)}|^{2(m-1)}\right)$$

から

$$|N_F(D_{F(\alpha)/F})|\leqq m^{[F(\alpha):\mathbb{Q}]}\cdot H_{F(\alpha)}(\alpha)^{2(m-1)}$$

が得られる。これらの対数をとり $m^{c-1}-1\geqq(c-1)\log m$ を用いると，Fに含まれない ε_j に対して

$$h(\varepsilon_j)\geqq\frac{\log m}{2(m-1)}\cdot\frac{c-1}{n^c}\log\left(|D_K|/e^{n^c/(c-1)}\right)$$

となる。$m\leqq n$ であること，Fに含まれる ε_j は高々入であること，それらにはDobrowolskiの定理を利用できることを合せて，上の R_K の不等式に代入して定理が得られる。特に $c=1+\dfrac{1}{\log n}$ にとると $d_n=n^{-en}$ とすることができる。

注．nが有界で D_K が大きくなる体の族に対して，定理2は有効であり，入＜pとなる場合が多いのでSilvermanよりよくなっている。CM体又はその部分体では途中がよくなるので $d_n|D_K|>1$ という条件は不要となる。しかし，円分体のようにnと D_K が同時に大きくなるときには，Pohstによる評価より悪くなる。上に触れることのできなかった内容のものも文献表に加えました。京都に着いてすぐに体調をくずし，この講演を取止め，多くの方に御迷惑をおかけしたことを，お詫びします。

参　考　文　献

[1] A.M.Berge and J.Martinet, Minorations de hauteurs et petits regulateurs relatifs, Sem. Th. Nombres Bordeaux, 1987-1988, n° 11

[2] J.W.S.Cassels, An introduction to the geometry of numbers, Grundlehlen der Math. 99, Springer

[3] A.Costa and E.Friedman, Ratios of regulators in totally real extensions of number fields, J.Number theory, 37(1991), pp.288-297

[4] T.W.Cusick, Lower bounds for regulators, Lec Notes in Math., 1068(1984), pp.63-73

[5] E.Dobrowolski, On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial, Acta Arithm., 34(1979), pp.391-401

[6] E.Friedman, Analytic formulas for the regulator of a number field, Inv. Math., 98(1989), pp.599-622

[7] E.Landau, Verallgemeinerung eines Pólyaschen Satzes auf algebraische Zahlkörper, Nachr. Göttingen , 1918, pp.478-488

[8] A.M.Odlyzko, Bounds for discriminants and related estimates for class numbers, regulators and zeros of zeta functions:a survey of recent results, Sem. Th. Nombres Bordeaux 2(1990), pp.119-141

[9] M.Pohst, Regulatorabschätzungen für total reelle algebraische Zahlkörper, J.Number Theory, 9(1977), pp.459-492

[10] M.Pohst, Eine Regulatorabschätzung, Abh.Hamburg, 47(1978), 95-106

[11] M.Pohst-H.Zassenhaus, On effective computation of fundamental units I, Math. of Computation, 38(1982), pp.275-291

[12] M.Pohst-H.Zassenhaus, On effective computation of fundamental units II, Math. of Computation, 38(1982), pp.293-329

[13] R.Remak, Elementare Abschätzungen von Fundamentaleinheiten und des Regulators eines algebraischen Zahlkörpers, J. für Math.,165(1931), pp.159-179

[14] R.Remak, Über die Abschätzung des absoluten Betrages des Regulators eines algebraischen Zahlkörpers nach unten, J. für Math. 167(1932), pp.360-378

[15] R.Remak, Über Grössenbesiehungen zwischen Discriminante und Regulator eines algebraischen Zahlkörpers, Compositio Math.,10 (1952)

[16] C.L.Siegel, Abschätzung von Einheiten, Nachr.Göttingen, 1969, pp.71-86

[17] J.H.Silverman, An inequality relating the regulator and the discriminant of a number field, J. Number Theory, 19(1984), pp.437-442

[18] J.H.Silverman, The Thue equation and height functions, Progress in Math., 31(1983), pp.259-270

[19] C.J.Smyth, On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer, Bull. London Math. Soc., 3(1971), pp.169-175

[20] K.Uchida, On Silverman's estimate of regulators, to appear

[21] R.Zimmert, Ideale kleiner Norm in Idealklassen und eine Regulator-abschätzung, Inv.Math.,62(1981), pp.367-380