数理解析研究所講究録
第 844 巻 1993 年 74-78

Lubin-Tate 群の指数級数と p 進補間

九大・理　白谷　克巳 (Katsumi SHIRATANI)
九大・理　今田　恒久 (Tsunehisa IMADA)

§1.　有理 p 進数体の Lubin-Tate 群

$F(X,Y)\in\mathbf{Z}_p[[X,Y]]$ を有理 p 進数体 $\mathbf{Q}_p$ の 1 つの Lubin-Tate 群とする. 即ち $\pi=p\varepsilon$, $\varepsilon\in\mathbf{Z}_p^\times$ を素元, $f(X)\equiv\pi X \pmod{\deg 2}$, $f(X)\equiv X^p \pmod{p}$ なる Frobenius 級数 $[\pi]_F(X)=f(X)\in\mathbf{Z}_p[[X]]$ に対し $f\circ F=F\circ f$ で一意に定まる形式群とする.

height 1 の $\mathbf{Z}_p$ 上の 1 次元形式群はすべて Lubin-Tate 群である.

特に, $f(X)=\pi X+X^p$ から生ずる Lubin-Tate 群を基本 Lubin-Tate 群 $\xi(X,Y)$ という.

乗法群 $G_m(X,Y)=(1+X)(1+Y)-1$ は, $\mathbf{Q}_p$ の $[p]_{G_m}(X)=(1+X)^p-1$ から生ずる Lubin-Tate 群で, 局所類体論 [1] により, $G_m(X,Y)$ と $F(X,Y)$ は, $\mathbf{Q}_p$ の最大不分岐拡大 K の完備化 $\bar{K}$ の整数環 $O_{\bar{K}}$ 上で同型である. 即ち $\phi(X)=\kappa^{-1}X+\cdots\in XO_{\bar{K}}[[X]]$, $\kappa\in O_{\bar{K}}^\times$ があって

$$\phi: G_m \xrightarrow{\sim} F.$$

F の対数級数 $\lambda_F: F\xrightarrow{\sim} G_a$ （加法群）, 指数級数 $e_F: G_a\xrightarrow{\sim} F$ で $\lambda_F'(0)=e_F'(0)=1$ となるものをとる.

$\mathbf{Q}_p$ の代数的閉包の完備化 $\mathbf{C}_p$, $\mathbf{C}_p$ の整数環を O として $h(X)\in O((X))^\times$ を任意にとり

$$\frac{Xh'(e_F(X))}{\lambda_F'(e_F(X))h(e_F(X))}=e^{B(F,h)X}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(F,h)}{n!}X^n$$

で, 数 $B_m(F,h)\in\mathbf{C}_p$ を定義する.

h の選び方でこれは既知の色々な数を含む. $c\in\mathbf{Z}_p^\times$, $c\neq 1$ をとって X を cX にかえると $H_c(e_F(X),h)=e^{B(F,h)cX}-e^{B(F,h)X}\in XO[[e_F(X)]]$ がすぐ分かるから $e_F(X)=\phi(e^{\kappa X}-1)$ を代入して, $e^{\kappa X}-1$ で展開する.

従って，$\alpha_i(h,c)\in O$ があって

$$H_c(e_F(X),h)=X\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i(h,c)\sum_{j=0}^{i}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}(-1)^{i-j}e^{j\kappa X}$$

が得られ, 係数を比較すると

$$(c^m-1)\frac{1}{m}B_m(F,h)=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i(h,c)\Delta^i 0^{m-1}\kappa^{m-1}\ ,$$

$$\Delta^i 0^{m-1}=\sum_{j=0}^{i}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}(-1)^{i-j}j^{m-1}.$$

これから色々な Kummer 合同式が得られる.

§2. p 進補間

さて,ζ を 1 の原始 p 乗根とすると $v=\phi(\zeta-1)$ は Fの真の π分点で

$$e_F(X)\underset{F}{+}[\nu]_F(v)=\phi(\zeta^\nu e^{\kappa X}-1)\quad(\nu=1,2,\cdots,p).$$

従って

$$H_c(e_F(X),h)-\frac{1}{p}\sum_{\gamma\in\wedge_{F,1}}H_c(e_F(X)\underset{F}{+}\gamma,h)$$

は, 上記第 2 項の和で,$(j,p)=1$ なる条件の j についての和となる. ここで, $\wedge_{F,1}=\{\gamma\in\mathbf{C}_p\,;\,[\pi]_F(\gamma)=0\}$.

一般に $h(X)\in O((X))$ に対し Coleman ノルム作用素 $Nh(X)\in O((X))$ が定義され,

$$(Nh)([\pi]_F(X))=\prod_{\gamma\in\wedge_{F,1}}h(X\underset{F}{+}\gamma)\ .$$

$h(X)\in O((X))^\times$ なら $Nh(X)\in O((X))^\times$ である.
これを対数微分とすると

$$\frac{\pi(Nh)'([\pi]_F(X))}{\lambda_F{}'([\pi]_F(X))(Nh)([\pi]_F(X))}=\sum_{\gamma\in\wedge_{F,1}}\frac{h'(X\underset{F}{+}\gamma)}{\lambda'_F(X\underset{F}{+}\gamma)h(X\underset{F}{+}\gamma)}\ .$$

Xに $e_F(X)$ を代入して, Xをかけると
上記は

$$H_c(e_F(X),h)-\frac{1}{p}H_c(e_F(\pi X),Nh)$$

に等しいから

$$(c^m-1)\{\frac{1}{m}B_m(F,h)-\frac{1}{p}\pi^m\frac{1}{m}B_m(F,Nh)\}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i(h,c)\sum_{(j,p)=1}\binom{i}{j}(-1)^{i-j}j^{m-1}\kappa^{m-1}\ .$$

さて, 同型 $\phi(X)=\kappa^{-1}X+\cdots$は, 素元 $\pi=p\varepsilon, \varepsilon\in\mathbf{Z}_p^\times$ に対し $\varepsilon=\kappa^{1-\sigma}$ なる $\kappa\in O_{\bar{K}}^\times$ でとれる [1]. σ は $\bar{K}/\mathbf{Q}_p$ の Frobenius 自己同型である. 従って, $\kappa\equiv\kappa_0 \pmod p$, $\kappa_0\in K$, $f=[\mathbf{Q}_p(\kappa_0):\mathbf{Q}_p]$, $q_0=p^f$, $e_0=p-1$ または 2,$d=(p-1,\frac{q_0-1}{p-1})$ とおくと, $\kappa=\omega(\kappa)<\kappa>$, $<\kappa>\equiv 1 \pmod p$, $\omega(\kappa)^{e_0d}=1$ が分かる. このとき f は κ_0 に依存するから最小の f をとる.

そこで, 普通の場合($\kappa=1$ の場合)より粗い点で上の数を補間する $\mathbf{Z}_p$上の連続関数 $(s\neq 1)$ が作られる.

定理 1. $\mathbf{Z}_p$上の局所解析的関数 $\zeta_p(s,F,h)$ $(s\neq 1)$ があって, 正整数 $m\equiv 0 \pmod{e_0d}$ に対し

$$\zeta_p(1-m,F,h)=-\frac{1}{m}\{B_m(F,h)-p^{m-1}\varepsilon^mB_m(F,Nh)\}$$

となる.

Lichtenbaum([4]) は, 虚数乗法をもつ $\mathbf{Z}$ 上の楕円曲線 E から生ずる形式群 $F=\hat{E}=\xi$, $\pi=p\varepsilon$, $h(X)=X$ の場合である.

χ を導手 fの Dirichlet 指標とするとき, 各 i, $1\leq i\leq f$, に対し $h_i(X)\in O((X))^\times$を定め, $h(X)=\prod_{i=1}^f h_i(X)$ とおく. 一般 Bernoulli 数, p 進 L 関数の拡張も

$$e^{B(F,h,\chi)X}=\frac{\chi(-1)}{\tau(\bar{\chi})}\sum_{i=1}^{f}\bar{\chi}(i)e^{B(F,h_i)X}$$

$$L_p(s,F,h,\chi)=\frac{\chi(-1)}{\tau(\bar{\chi})}\sum_{i=1}^{f}\bar{\chi}(i)\zeta_p(s,F,h_i)$$

で定義するとよい. $\tau(\bar{\chi})$ はガウス和である.

§3. $s=1$ での値

これらの関数の $s=1$ での留数または値も容易に計算されて次の様になる.

定理2. $h(X)=X^l h_1(X),\ h_1(X)\in O[[X]]^\times,\ l\gtreqqless 0$ とする.

$l\neq 0$ なら $\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_p(s,F,h)=l(1-\frac{1}{p})$,

$l=0$ なら $\zeta_p(1,F,h)=-\log h(0)+\frac{1}{p}\log Nh(0)$.

証明は, $\log e_F(X)$ 及び $\log h(e_F(X))$ を X のべきに展開して, 両辺を微分し,Xをかけ係数を比較する. そして, 例えば $l=0$ のときには

$$\zeta_p(1,F,h)=\lim_{\substack{|m|\to 0\\ m\equiv 0 \pmod{e_0 d}}}\zeta_p(1-m,F,h)=-\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{p^\rho e_0 d}B_{p^\rho e_0 d}(F,h)$$

$\lim_{\rho\to\infty}\kappa^{p^\rho e_0 d}=1,\ \lim_{\rho\to\infty}\Delta^i 0^{p^\rho e_0 d}=-\frac{1}{p}\sum_{\nu=1}^{p}(\zeta^\nu-1)^i$ に注意してもとにもどすと

$$\zeta_p(1,F,h)=-\log h(0)+\frac{1}{p}\log Nh(0)$$

が得られる.

これは Leopoldt 公式の類似と見做してよい.

文　　献

[1] K.Iwasawa, Local class field theory, Oxford Univ. Press, 1986.

[2] A.Kudo, *On p-adic Dedekind sums* (II), Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ. **45** (1991), 245-284.

[3] E.Kummer, *Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwicklungs coëfficienten einer bestimmten Gattung analytischer Functionen*, J. reine angew. Math. **41** (1851) , 368-372.

[4] S.Lichtenbaum, *On p-adic L-functions associated to elliptic curves,* Inv. math. **56** (1980), 19-55.

[5] K.Shiratani and S.Yamamoto, *On a p-adic interpolation of the Euler numbers and its derivatives*, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ. **39** (1985), 113-125.

[6] K.Shiratani, *On certain values of p-adic L-functions*, Mam. Fac. Sci., Kyushu Univ. **28** (1974), 59-82.

[7] K.Shiratani and T.Imada, *The exponential series of the Lubin-Tate groups and p-adic interpolation*, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ. 46 (1992), 351-365.