

多重度一定の特性帯を持つ一般の
偏微分方程式系の Levi 条件

龍谷大学工学部 松本和一郎

(Waichiro Matsumoto)

§0. Introduction.

下の Cauchy 問題を考える

$$(1) \begin{cases} \mathbb{P} u \equiv (D_t u - \sum_{|\alpha| \leq \nu} A_\alpha(t, x) D_x^\alpha) u = f(t, x), \\ u(t_0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (\nu \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\})$$

$$= = = . \quad D_t = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_{t, x}^{1+n}$$

であり。 $u(t, x), f(t, x), u_0(x)$ は N -次元ベクトル, $A_\alpha(t, x)$ は $N \times N$ 行列である。 Ω を $\mathbb{R}_{t, x}^{1+n}$ の開集合とする。 $\nu(t, x)$ は N -次元ベクトル。

Ω 上で定義した C^∞ 級関数を成分に持つとす。

$v(t, x) \in C^\infty(\Omega)$ と略記す。又、ある集合 G の元を成分

に持つ $N \times N$ 行列の全体を $\text{Mat}(N; G)$ とかく。特に

$\text{Mat}(N; G)$ に属し、 $\tau = \tau^{-1}$ 逆元を持つ行列の全体を $\text{GL}(N; G)$

とかく。 $\Omega_{t_0} = \Omega \cap \{t = t_0\}$, $\Omega_{t_0}^\pm = \Omega \cap \{t \gtrless t_0\}$ と

おこう。当面 $A_\alpha(t, x) \in \text{Mat}(N; C^\infty(\Omega))$ とする。

定義 1. (C^∞ well posedness) ^{at (t_0, x_0)} 下の (E) と (U) が成り立つ
 とす。 Ω の点 (t_0, x_0) で Cauchy 問題 (1) が 未来に C^∞ well
 posed という。

(E) (Existence) (t_0, x_0) の近傍 \hat{w} があって
 $\forall u_0(x) \in C^\infty(\Omega_{t_0}), \forall f(t, x) \in C^\infty(\Omega)$ に対して
 $u(t, x) \in C^\infty(\hat{w})$ があって $\hat{w}_{t_0}^+$ で
 (1) を満たす。

(U) (Local uniqueness) (t_0, x_0) の任意の近傍 w
 に対してある (t_0, x_0) の近傍 $w' \subset w$ があって。
 $u_0 = 0$ in w_{t_0} かつ $f = 0$ in w ならば (1) の
 解 u は $w_{t_0}^+$ で 0 である。

"過去に C^∞ well posed" も $\hat{w}_{t_0}^+, w_{t_0}^+$ を $\hat{w}_{t_0}^-, w_{t_0}^-$
 に置きかえて定義した。

定義 2. (C^∞ well posedness in Ω) Cauchy 問題 (1) が
 Ω の各点 (t_0, x_0) で 未来に (過去に) C^∞ well posed の
 とす。 (1) は Ω で 未来に (過去に) C^∞ well posed という。
 特に Ω において 未来にも 過去にも C^∞ well posed の時。
 単に Ω で C^∞ well posed という。

(1) n 階 Ω で C^∞ well posed とする為の $P(t, x, D_t, D_x)$ に対する条件を Levi 条件とす。比較の為には高階単独方程式の場合の結果をまとめておく。

$$P(t, x, D_t, D_x) = D_t^m + \sum_{\substack{|\alpha| \leq l_j \\ 1 \leq j \leq m}} a_{\alpha j}(t, x) D_x^\alpha D_t^{m-j} \quad (a_{\alpha j} \in C^\infty(\Omega) : \text{スカリ})$$

とする。まず S. Mizohata [17] [16], K. Kajitani [6] により、 $a_{\alpha j} \in A(\Omega)$ の仮定の下に (K. Kajitani は $a_{\alpha j} \in C^\infty(\Omega)$ の場合も扱っている)

(5) (1) n 階 C^∞ well posed

$\Rightarrow V=1$ かつ $p_m(t, x, \lambda, \xi) = 0$ の λ は実根 n 個 $(t, x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^l$ に対してすべて実である。

$$p_m = \lambda^m + \sum_{\substack{|\alpha| \leq j \\ 1 \leq j \leq m}} a_{\alpha j}(t, x) \xi^\alpha \lambda^{m-j},$$

が得られている。完全な Levi 条件は、未だ得られて

ない。そこで以下の仮定のもとに結果をまとめる。
(H. Flaschka and G. Strang [5], J. Chazarin [3], S. Mizohata [16])

(a.1) $p_m = 0$ の λ に関する根 $\lambda_j(t, x, \xi)$ は $\Omega \times (\mathbb{R}^l \setminus \{0\})$ 上一定の多重度 m_j を持つ ($\sum_{j=1}^d m_j = m$)

(a.1) の下には、 $P(t, x, D_t, D_x)$ は下のよう分解できる。
(H. Kumano-go [1])

$$(2) \quad P = \prod_{j=1}^{od} P_j(t, x, D_t, D_x), \quad P_j = (D_t - \lambda_j(t, x, D_x))^{m_j} + \sum_{k=1}^{m_j} b_k^j(t, x, D_x) \cdot (D_t - \lambda_j)^{m_j-k}$$

ord $b_k^j \leq k-1$,

$\equiv \equiv$ は作用素の積を表す。 \equiv を用いて
 単独高階の場合の Levi 条件は (a.1) の下は

$$(2) (f) \oplus \text{true ord } b_k^j \leq 0.$$

とする。 $\equiv \equiv$ true ord $b = \mu$ とは $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} b(t, x, |\xi|^\mu) / |\xi|^\mu \neq 0$
 各 $(t, x, \xi) \in \Omega \times S^{2l-1}$ に対して 有限かつ $\neq 0$ の μ とである。

一方、系の場合 (f) に対応する結果も (a.1)
 に当たる仮定の下での (2) に対応する結果も未解決で
 ある。後者については V.M. Petkov [19], [20], H. Yama-
 hara [25], Y. Demay [4], W. Matsumoto [12], J. Vaillant
 [22], [23], [24] etc があるが、"すれも特性根の
 多重度を限るか、ある" は主要部の Jordan 構造に仮定
 をおくものである。 $\equiv \equiv$ では、 \equiv のような構造上の仮定
 を置くかわりに係数の解析性を仮定する。 Ω で
 実解析的函数の全体を $\mathcal{A}(\Omega)$ とかく。後で必要に
 なるので、複素領域 $\hat{\Omega}$ での正則函数の全体を $\mathcal{H}(\hat{\Omega})$ 、
 有理型函数の全体を $\mathcal{M}(\hat{\Omega})$ とかく $\equiv \equiv$ としておく。

$$(A.0) \quad A_\alpha(t, x) \in \text{Mat}(N; \mathcal{A}(\Omega)) \quad (|\alpha| \leq \nu).$$

我々の結果を記述する為には言葉を用意しよう。

$\|\xi\| = \sqrt{|\text{Re } \xi|^2 + |\text{Im } \xi|^2}$ とおく。 $W \times \Gamma \subset \mathbb{C}_{t,x}^H \times \mathbb{C}_\xi^P$
 $\neq \text{conic}$ とは $\Gamma(t, x, \xi) \in W \times \Gamma \Rightarrow \forall \rho > 0 \quad (t, x, \rho\xi) \in W \times \Gamma$
 のことである。又、 $\hat{W} \subset W \times \Gamma$ が *conically compact in*

$\omega \times \Gamma$ とは $\tilde{\omega} \cap \{\|\xi\|=1\}$ かつ $\omega \times \Gamma \cap \{\|\xi\|=1\}$ で compact とする $\omega = \omega$ である。 $\omega \times \Gamma \subset \mathbb{C}^{1+l} \times \underbrace{\mathbb{C}^l}_{\text{conic}}$ としよう。

定義 3 (Meromorphic formal symbol)

形式和 $a(t, x, \xi) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t, x, \xi)$ かつ 下の (3), (4) を満たす時 $a(t, x, \xi)$ を $\omega \times \Gamma$ における κ 次の meromorphic formal symbol とする。

(3) ω の $\omega \times \Gamma$ の analytic set (ある正則函数 $\neq 0$ の零点集合) と定数 κ があり、 $a_i \in M(\omega \times \Gamma) \cap \mathcal{H}(\omega \times \Gamma \setminus \Sigma)$ かつ a_i は $\xi \mapsto \|\xi\|$ に関して $\kappa - i$ 次正齊次。 ($i \in \mathbb{Z}_+$)

(4) $\omega \times \Gamma \setminus \Sigma$ の任意の conically compact subset $\tilde{\omega}$ に対してある $C > 0, R > 0$ があり、

$$|a_i(t, x, \xi)| \leq C R^i [1 + \|\xi\|]^{\kappa - i} \quad \text{on } \tilde{\omega} \quad (i \in \mathbb{Z}_+)$$

が成り立つ。

定義 4 (Holomorphic formal symbol)

$a(t, x, \xi)$ が $\omega \times \Gamma$ において $\Sigma = \emptyset$ の meromorphic formal symbol の時 $\omega \times \Gamma$ における holomorphic formal symbol とする。

κ : \mathbb{R} の $\omega \times \Gamma$ 上の meromorphic formal symbol (= m.f.s) の全体を S_M^κ , κ : \mathbb{R} の $\omega \times \Gamma$ 上の holomorphic formal symbol の全体を S_H^κ とかく。又、 $S_M = \bigcup_K S_M^\kappa$ (= h.f.s.)

等とおく。 S_M における積を定義しよう。 $a = \sum a_i$, $b = \sum b_i$ とす。

$$(5) \quad a \cdot b = \sum_{i=0}^{\infty} c_i, \quad c_i = \sum_{j+k+|k|=i} \frac{1}{\alpha!} a_j^{(k)}(t, x, \tau) b_{k(\alpha)}(t, x, \tau)$$

と定義する。 $\alpha = 1$ には $a^{(k)} = (\frac{\partial}{\partial x})^k a$, $a_{k(\alpha)} = D_x^\alpha a$ である。
 通常の和と積で $S_M(W \times \Gamma)$ は非可換体、
 $S_H(W \times \Gamma)$ は $S_M(W \times \Gamma)$ の部分環となる。

$a = \sum a_i \in S_M^k$ において $0 \leq i < i_0$ のとき $a_i = 0$, $a_{i_0} \neq 0$ ならば $k - i_0$ を a の true order, a_{i_0} を a の true principal part (= t.p.p.) と呼ぶ。

また、 τ は τ の dual 変数 τ も含んで meromorphic formal symbol $p(t, x, \tau, \xi)$ を考えよう。
 τ の全体を \bar{S}_M とする。 true order, true p.p. 等の定義は同様である。
 $\dot{S}_M^k = \{ p \in \bar{S}_M^k : p \text{ が } k \text{ 次正斉次} \}$, $\dot{S}_M = \bigcup_k \dot{S}_M^k$ とおき、
 \dot{S}_M に通常の積を与えたと $\dot{S}_M \setminus \{0\}$ は可換乗法群となる。
 $p \in \bar{S}_M$ に対してその true p.p. p_{i_0} を対応させる射像 π

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} \pi : \bar{S}_M \setminus \{0\} & \longrightarrow & \dot{S}_M \setminus \{0\} \\ \downarrow p & \longmapsto & \downarrow p_{i_0} = \pi(p) \end{array}$$

は非可換乗法群から可換乗法群への群の準同型

である。この π を用いれば E. Artin [1] の手帳で $\text{Mat}(N; \bar{S}_M)$ の元 $P(t, x, \tau, \xi)$ に行列式を定義できる。これを $\det_M P$ とかこう。これは M. Sato-M. Kashiwara [2] の行列式に対象が共通な限り一致する。特に P が微分作用素ならば、 $\det_M P$ は 正則函数を係数 に持つ τ と ξ の齊次多項式となる。

単独高階の場合の (2) に対応する P の分解を与えよう。

order の尺度として ξ_j ($1 \leq j \leq l$) の 1 つをとる。ここでは ξ_1 としておく。従って形式的に $\xi_1 = 0$ も pole set Σ に入れておく。(例えば $\xi_1 \xi_2 = (\xi_2/\xi_1) \xi_1^2$ と 0 次正齊次部分と ξ_1 の中に分離して考える。)

Theorem 0. (W. Matsumoto [13].)

$$P = I_N D_t + A(t, x, \xi), \quad A \in S_M^V$$

において $A_0(t, x, \xi)$ の固有値 $\lambda_j(t, x, \xi) \in \overset{\circ}{S}_M^V$ ($1 \leq j \leq d$) かつ $(t, x, \xi) \in \omega \times \Gamma \subset \mathbb{C}_{t,x}^{1+l} \times \mathbb{C}_\xi^l$ において一定の多重度 m_j を持つ holomorphic function ($\bar{u} \in \overset{\circ}{S}_M^V$) とする。 ($\sum_{j=1}^d m_j = N$)

このとき $\mathcal{N}(t, \alpha, \Xi) \in GL(N; S_M)$, $\{\delta_j\}_{1 \leq j \leq d}$,
 $\{n_{jk}\}_{\substack{1 \leq k \leq \delta_j \\ 1 \leq j \leq d}}$ ($\delta_j \in \mathbb{N}$, $n_{jk} \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\delta_j} n_{jk} = m_j$) なる

あり

$$(7) \tilde{P} \equiv \mathcal{N}^{-1} \circ P \circ \mathcal{N} = \bigoplus_{1 \leq j \leq d} \bigoplus_{1 \leq k \leq \delta_j} P^{jk}(t, \alpha, D_t, \Xi)$$

$$P^{jk} = (D_t - \lambda_j(t, \alpha, \Xi)) I_{n_{jk}} - B^{jk}(t, \alpha, \Xi)$$

$$B^{jk} = \sum_{i=0}^{\infty} B_i^{jk}, \quad B_i^{jk} \in \text{Mat}(n_{jk}; S_M^{\nu-i})$$

$$B_0^{jk} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \Xi_1^{\nu}$$

$$B_i^{jk} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ b_i^{jk}(1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & & b_i^{jk}(n_{jk}) \end{pmatrix}, \quad (i \geq 1).$$

と Jordan 標準形の主要部と Sylvester 型の
 低階に相似変換できる。上の \mathcal{N} と P^{jk} を構成
 するアルゴリズムがある。

この定理を我々の目的に使用するために言
 明する。

定義 5. (μ 次の M -基底)

$P(t, \alpha, D_t, \Xi) = I_N D_t - A(t, \alpha, \Xi)$, $A \in S_M^{\nu}$
 に対して、 N 次元ベクトル $\{v_h^{jk}\}_{\substack{1 \leq h \leq n_{jk} \\ 1 \leq k \leq \delta_j \\ 1 \leq j \leq d}}$, $v_h^{jk} \in S_M$
 が

$$(8) P \circ v_h^{jk} \Big|_{D_t=0} + v_{h+1}^{jk} \Xi_1^{\mu} = -b^{(h)} \circ v_1^{jk}, \quad b^{(h)} \in S_M^{\mu-1}$$

を満たし. S_M 上の右ベクトル空間の基底となる時
 \mathcal{P} の $\{\lambda_j\}_{1 \leq j \leq d}$ に属する μ 次の M -基底とす。

Th.0 は しかるべき仮定の下に \mathcal{P} が A_0 の
 固有値に属する ν 次の M 基底を持つことを主張
 している。

Remark. M 基底に於ける $\{\delta_j\}$ も $\{n_{j,k}\}$ も不変
 量ではない。

例. $\mathcal{P} = I_3 D_t - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \xi_1^\nu + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_1^{\nu'}$
 ($\nu > \nu'$, $b = \text{定数}$)

$d = 1$, $\lambda_1 = 0$ である。

1) $\delta_1 = 2$, $n_{11} = 2$, $n_{12} = 1$ の場合.

右に之は
 $\nu_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nu_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nu_1^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) $\delta_1 = 1$, $n_{11} = 3$ の場合

右に之は
 $\nu_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/b \end{pmatrix}$, $\nu_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nu_3^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xi_1^{\nu-\nu}$.

系における (f) に対応する結果を述べよう。

定義 6. (Hyperbolic polynomial)

t と x の齊次多項式 $f(t, x, \tau, \xi)$ が t について Kowalevskian polynomial であつて $f=0$ の t に関する根がすべて $\Omega \times \mathbb{R}_+^l$ 上実数のときは f を hyperbolic polynomial とす。

定義 7. (Hyperbolic system)

系 $Q(t, x, D_t, \xi)$ において $\det_M Q$ が hyperbolic polynomial の時 Q を hyperbolic system とす。 (特に (1) の P の type で $\nu=1$ のときは $\det_M P = \det P_0$ である。 P_0 は P の階部分)

Theorem I. (A.0) を仮定する。 (1) が Ω において未来に (又は過去に) C^∞ well posed ならば。

下の同値な (F)₁ ~ (F)₃ が成り立つ。

(F)₁ $\det_M P$ が hyperbolic polynomial である。

(F)₂ P が S_M における相似変換で 1 階 hyperbolic system に変換される。

(F)₃ $\nu > 1$ のとき $A_0 = \sum_{|\alpha|=\nu} A_\alpha(t, x) \xi^\alpha$ が巾零 (従つて Th_0 が適用できる) かつ P の標準形 \tilde{P} in Th_0 に

おいて

$$(9) \text{ true ord } b^{jk}(h) \leq 1 - (v-1)(n_{jk} - h) \quad (1 \leq h \leq n_{jk})$$

が成り立つ。更に

$$(10) \det_M \tilde{P} \equiv \tau^{n_{jk}} - \sum_{h=1}^{n_{jk}} b^{jk}(h) \tau_1^{(v-1)(n_{jk}-h)} \tau^{h-1} = 0$$

の τ に関する根が $\Omega \times \mathbb{R}^l$ 上定数である。

"(1) が C^∞ w.p. $\Rightarrow A_0$: 中零, (9)" は共に S. Mizohata [17], K. Kajitani [6] と同様に示せる。"(1) が C^∞ w.p. $\Rightarrow (10)$ " は S. Mizohata [16] と同様に示せる。又 "(F)₃ \Rightarrow (F)₂ \Rightarrow (F)₁ \Rightarrow (F)₃" は明らかである。

さて、系において (A.1) に対応する仮定を導入しよう。

$$(A.1) \det_M P = 0 \text{ の } (t, x, \tau, \zeta) \in \Omega \times (\mathbb{R}_{\tau, \zeta}^{1+l} \setminus \{0\})$$

における零点が各連結成分上多重度一定である。

(F)₃ \oplus (A.1) により、 \tilde{P} が 1 階 system に変換され更に再び Th 0 の仮定を満たす。すなわち P は 1 次の M -基底を持つことになる。= 既に (F)₃ におけるものと区別する為に τ の量は \sim をつけると

了。 (A.0) (A.1) の下 \mathbb{P} に対する Levi 条件を与えよう。

Theorem 2. (A.0), (A.1) を仮定する。 下の同値な $(L)_1, (L)_2$ が \mathbb{P} に対する Levi 条件である。

$(L)_1$ \mathbb{P} が S_M における相似変換で主要部が対角の 1 階双曲系に変換される。

$(L)_2$ \mathbb{P} が 1 次の M -基底を持つ。 更に

$$(11) \quad \text{true ord } \check{b}^{jk}(h) \leq -(\tilde{n}_{jk} - h) \quad (1 \leq h \leq \tilde{n}_{jk} - 1)$$

が成り立つ。

Remark 1. 上の Remark にもおなじく (9) や (11) の条件は全体として M -基底のとり方によらない不変量である。

Remark 2. Th 2 において C^∞ w.p. $\Leftrightarrow (L)_1, (L)_2$ となるのは未来 \wedge (又は過去 \wedge) の C^∞ w.p. だけでよい。 逆に $(L)_1$ の $(L)_2$ からは未来 \wedge も過去 \wedge も (11) が C^∞ w.p. と同じことが従う。

Remark 3. Th 1 の結果が成り立つ為には係数の解析性は不必要のように思われるが、証明されていない。

一方 Th2 に関しては、下の例に見るように係数の解析性を無条件にほずるわけにはいかない。

例

$$P = I_3 D_t - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} D_x - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu(t) \\ \nu(t) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

① $\mu(t)\nu(t) \equiv 0$

特: $s_1 > s'_1 > t_1 > t'_1 > s_2 > s'_2 > t_2 > t'_2 > \dots$

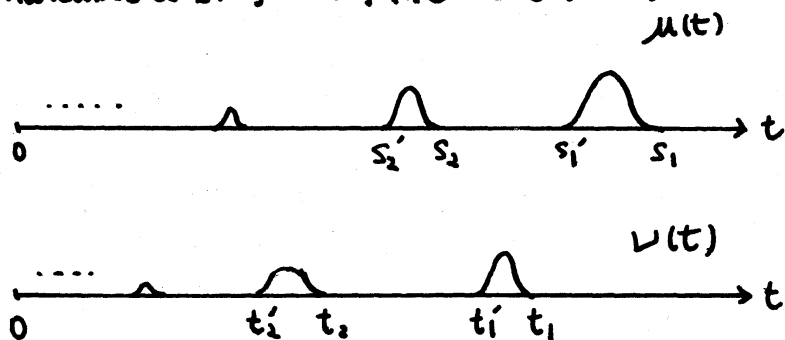
∴ あって

$$\text{Supp } \mu = \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [s'_i, s_i],$$

$$\text{Supp } \nu = \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [t'_i, t_i],$$

② $\mu(t) \geq 0, \nu(t) \geq 0, \mu, \nu \in C^\infty(\mathbb{R})$

なるば P に対する初期値問題は $(0, x_0)$ において未来に C^∞ well posed である。 ($\forall x_0 \in \mathbb{R}$)
(W. Matsumoto [12] と同様にして示す)



Th2 の証明の方針.

"(1) $\Leftarrow C^\infty$ w.p. $\Rightarrow (L)_2$ " は単独高階のと互と同じに証明される。" $(L)_2 \Rightarrow (L)_1$ " は明か。したがって

" $(L)_1 \Rightarrow (1) \Leftarrow C^\infty$ w.p." を示せばよい。

$\exists \tilde{\Omega} : \Omega$ の complex nbd , $P_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{C}^l ; |\operatorname{Im} \xi| < \varepsilon |\operatorname{Re} \xi|\}$
 $(\exists \varepsilon > 0)$ とする。以下 $\tilde{\Omega} \times P_\varepsilon$ で考える。

Step 1. W. Matsumoto and H. Yamahara [15] と同様にして、(1) の *形式的な基本解を

$$(12) \quad u = \sum_{h=0}^{\infty} t^h u_h(t, x, \xi) / h! \quad (\text{形式的中級数})$$

の形で求める。 $\{u_h\}$ は S_M で unique に定まる。

ある $k_0 \geq 0$ があって $u_h \in \underline{S}_H^{h+k_0}$ である。上の級数は収束する。

Step 2. (A.1) の仮定 $(\oplus (F)_2)$ (= d')。 $\det M P =$

$$= \prod_{j=1}^d (t - \lambda_j(t, x, \xi))^{m_j}, \quad \lambda_j \neq \lambda_{j'} \text{ on } \tilde{\Omega} \times P_\varepsilon \text{ if } j \neq j',$$

$\lambda_j \in \underline{S}_H^1(\tilde{\Omega} \times P_\varepsilon)$, $\lambda_j : \text{real on } \Omega \times \mathbb{R}^l$ とする。従って

λ_j の phase function $\phi_j(t, x, \xi)$ を $\underline{S}_H^1(\tilde{\Omega} \times P_\varepsilon)$ に定める。

一方相似変換で 1 階主部対角双曲系に変換されることから

$$N \circ u = \bigoplus_{j,k} u_{jk} \text{ とすると}$$

$$(13) \quad I_{n_j k} (D_t - \lambda_j(t, x, \xi)) u_{jk} - C(t, x, \xi) u_{jk} = 0,$$

$$C \in \operatorname{Mat}(n_j k; S_M^0)$$

が成り立つ。

ここで u_{jk} を Fourier

積分作用素の形

$$(14) \quad u_{jk} = a_{jk}(t, x, \xi) e^{i\phi_j(t, x, \xi)}$$

に書き直す。(この時 a_{jk}, ϕ_j 共に t の中級数:

前者は形式的, 後者は収束, と表し t の形式的中級数と

して扱う。

Step 3. $a_{jk}(t, x, \xi)$ の満たすバリエーション方程式は
1階常微分方程式となるから

$$(15) \quad a_{jk} = \sum_{h=0}^{\infty} t^h a_{jkh}(x, \xi)$$

において $a_{jkh} \in S_M^{\kappa_0'}$ (κ_0' : 定数)

となる。(H. Kumano-go [11] 参照)

Step 4.

一方 (12) の u も $\sum_{j=1}^d u^j e^{i\phi_j}$ の形にかけ
から、これを $N \oplus a_{jk} e^{i\phi_j}$ と比較して (const.
の評価も含めて、

$$(16) \quad u^j = \sum_{h=0}^{\infty} t^h u_h^j(x, \xi)$$

において、

$$(17) \quad |u_h^j(x, \xi)| \leq C R^h h! \|\xi\|^{\kappa_0 + \kappa_0'}$$

を得る。

以上より、(1) は C_0^∞ に作用する Fourier 積分
作用素の symbol を (t_0, x_0) の近傍で持つ。

これより、 $\varphi_\Lambda^{\text{cf}}$ を cutoff しておけば有限伝播性と
あわせて (1) の解を局所的に得ることができるとなる。

Q.E.D.

References

- [1] E. Artin ; Geometric algebra , Chap. 4 .
Interscience Publishers (1957).
- [2] L. Boutet de Monvel and P. Krée ; Ann. Inst.
Fourier Grenoble, 17 (1) (1967) 295-323,
- [3] J. Chazarin ; Ann. Inst. Fourier Grenoble, 24(1)
(1974) 173-202
- [4] Y. Demay ; J. Math. Pure Appl., 56 (1977) 393-422.
- [5] H. Flaschka and G. Strang ; Adv. Math. 6 (3) (1971)
347-379
- [6] K. Kajitani ; Comm. PDE 4 (6) (1979) 595-608,
- [7] H. Komatsu ; Proc. Japan Acad. 55 SerA (1979), 69-72,
- [8] ————— : Proc. Japan Acad. 56 SerA (1980), 137-142,
- [9] ————— : Ultradistributions IV (to appear).
- [10] H. Kumano-go ; Proc. Japan Acad. 52(9) (1976), 480-483.
- [11] ————— : Pseudo-differential operators, Chap 10.
The MIT Press (1981)
- [12] W. Matsumoto ; J. Math. Kyoto U. 21 (1) & (2) (1981)
47-84 & 251-271
- [13] ————— : Normal form of systems of partial

- and pseudo differential operators in formal symbol classes, (to appear in J. Math. Kyoto U.)
- [14] ——— : Levi condition for general systems (to appear),
- [15] W. Matsumoto and H. Yamahara : Proc. Japan Acad. 67, Ser A (6) (1991) 181-185.
- [16] S. Mizohata : J. Math. Kyoto U. 1(1) (1961) 109-127.
- [17] ——— : Israel J. Math. 13 (1972), 173-187,
- [18] ——— ; Calcul d'opérat. front d'ondes, Travaux en cours (ed. J. Vaillant) Hermann 29 (1988) 39-64.
- [19] V.M. Petkov : Dokl. Acad. Nauk. SSSR, 209 (4) 1973 795-797 (Russian)
- [20] ——— : Trudy Mosc. Mat. Obs. 37 (1978) 3-47
- [21] M. Sato and M. Kashiwara : Proc. Japan Acad. 51 Ser A (1975) 17-19
- [22] J. Vaillant : Proc. conf. hyperbolic eq. Univ. Pisa, Longman Sci. and Tech. (1988)
- [23] ——— : Bull. Sci. Math. 114 (3) (1990) 243-328
- [24] ——— : Opérateurs de multiplicité constante, (to appear)
- [25] H. Yamahara : Publ. RIMS Kyoto U. 12(2) (1976) 493-572.