

On the Propagation of a Certain Polarization Set for Semilinear Systems of Real Principal Type

京大理 土居 伸一 (Shin-ichi Doi)

§0 序

N. Dencker [D] は ベクトル値超関数 (distribution) に対し, wave front set の精密化である polarization set を定義した。これは, 特異性の最も高い成分に関する情報を含んでいる。そしてある擬微分作用素 (PsDO_p) 系に対し, polarization set 版の特異性の伝播を証明した。又, C. Gerard [G1, 2] は, 境界値問題の解の polarization set を調べた。

他方, 非線形偏微分方程式に対する特異性の伝播や相互作用についての研究が, '70年代後半よりさかんに行われている (cf. [Be] の参考文献)。

筆者は [Doi] においてこの二者の合体, つまり Dencker の結果の半線形偏微分方程式系への拡張, を試みた。その際, 補うかでない表象をもつ作用素を扱う必要があるため, 元の polarization set の定義のままでは安定性に欠けるように思

われた。そこで [Doi] では、より安定性のある polarization set を導入し、これに併し前述の拡張を行った。本報告集では、その概要を述べたい。

§ 1. Polarization Set の定義と基本的性質

◎ 記号. $z_0 = (x_0, z_0) \in \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, $r > 0$ に併して

$$M(z_0, r) = \left\{ a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d}); 0 \leq a \leq 1, a = 1 \text{ (} z = z_0 \text{ の近傍で)} \right. \\ \left. \text{supp } a \subset \{z \in \mathbb{R}^{2d}; |z - z_0| < r\} \right\}$$

$$M(z_0) = \bigcup_{r>0} M(z_0, r)$$

と置く。 $a, b \in M(z_0)$ に併し次のように定める:

$$a \ll b \stackrel{\text{def}}{\iff} b = 1 \text{ (supp } a \text{ の近傍で)}.$$

$a \in M(z_0)$ に併し $a_n(x, z) = a(x, \frac{z}{n})$ ($n \in \mathbb{N}$) とおき、

B, D, Q_p 列 $\{a_n(x, D)\}_{n=1}^\infty$ を以後頻繁に用いる ([M1, 2], [LT] を参照せよ)。□

◎ H^s の意味での波面集合 WF^s の特徴付け. 次の補題が成り立つ。

補題 1.1. ([T]). $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ に併し次は同値である:

(1) $z_0 \notin WF^s(u)$

(2) $\exists a \in M(z_0)$ s.t. $\{\|a_n(x, D)u\|\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{h}^s$

(3) $\exists r > 0 \forall a \in M(z_0, r) \{\|a_n(x, D)u\|\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{h}^s$.

ただし $\mathcal{h}^s = \{ \{e_n\}_{n=1}^\infty; e_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^\infty n^{2s-1} e_n^2 < \infty \}$ ($s \in \mathbb{R}$),

$\mathcal{h}^\infty = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{h}^s$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ である。□

⑨ 新しい polarization set の導入. X を \mathbb{R}^d の開集合とし.
 $\mathcal{D}'(X, \mathbb{C}^N)$ で X 上の \mathbb{C}^N 値超関数全体を表わす. つまり $u \in \mathcal{D}'(X, \mathbb{C}^N) \Leftrightarrow u = (u_j)_{j=1}^N$, $u_j \in \mathcal{D}'(X)$ である. $\mathcal{D}'(X, \mathbb{C}^N)$ の内. 台がコンパクトなもの全体の全体を $\mathcal{E}'(X, \mathbb{C}^N)$ とかく. その他 $H_{loc}^s(X, \mathbb{C}^N)$, $\mathcal{D}'(X, \mathbb{R}^N)$ 等も同様に定める.

定義 1.2. $z_0 \in X \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, $\theta \in (\mathbb{C}^N)'$, $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ とする.
 $u \in \mathcal{E}'(X, \mathbb{C}^N)$ に對し. $u \in H^s(z_0, \theta)$ とは. 任意の $\varepsilon > 0$ に對し $r > 0$ が存在し. $a \subset b$ なる任意の $a, b \in M(z_0, r)$ に對し
 (*) $\|a_n(x, D) \theta \cdot u\| \leq \varepsilon \|a_n(x, D) u\| + \exists c n^{-1} \|b_n(x, D) u\| + \exists e_n \quad (n \in \mathbb{N})$

が成立することと定める. ここで $c > 0$, $\{e_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{H}^s$ は. a, b, ε, r によるが n によらない. ある定数, 数列である. \square

定義 1.2'. $u \in \mathcal{D}'(X, \mathbb{C}^N)$ に對して $u \in H^s(z_0, \theta)$ とは. x_0 の近傍で 1 となる $\psi \in C^\infty(X)$ があつて $\psi u \in H^s(z_0, \theta)$ となることと定める. 又. 次のようにおく:

$$H^s(u) = \{ (z, \theta) \in X \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^N)'; u \in H^s(z, \theta) \}. \square$$

定義 1.3. $u \in \mathcal{D}'(X, \mathbb{C}^N)$ に對し.

$$E^s(u) = \{ (z, w) \in X \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^N; w \cdot \theta = 0 \quad \forall (z, \theta) \in H^s(u) \}.$$

とかく — これが新しい polarization set である. ただし $w \cdot \theta$ は $\mathbb{C}^N \times (\mathbb{C}^N)'$ 上の双線形形式である. \square

注意 $E^s(u)$ は z について conic, w について linear.

注意 1.4 M を可算基をもつ C^∞ 級多様体, E をその上の C^∞ 級複素ベクトル束, E' をその双対, Ω を M 上の C^∞ 級体積密度の束とし. $\mathcal{D}'(M, E) = C^\infty(M, E' \otimes \Omega)'$ とおく. このとき $u \in \mathcal{D}'(M, E)$ に対し, $E^s(u)$ と $H^s(u)$ が順に π^*E と π^*E' の部分集合として自然に定義できる. ただし π は $T^*M \setminus 0$ から M への射影である. \square

注意 1.5 $E^s(u)$ が Dencker [D] と Gérard [G] の意味での polarization set $WF_{pol}^s(u)$ の部分集合になることを証明できる. ただし $u \in \mathcal{D}'(X, \mathbb{C}^N)$ に対し,

$$WF_{pol}^s(u) = \bigcap_{A: Au \in H^s} N_A$$

$$N_A = \{ (z, w) \in (T^*X \setminus 0) \times \mathbb{C}^N ; w \in \text{Ker } A_0(z) \}$$

$A = (A_1, \dots, A_N)$ は $1 \times N$ の各 classical PsDOp (properly supported)

A_0 : A の主表象. \square

◎ Polarization Set の基本性質

命題 1.6 $Pr(E^s(u) \setminus 0) = WF^s(u) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j=1}^N WF^s(u_j)$.

ただし $Pr: (T^*X \setminus 0) \times \mathbb{C}^N \rightarrow T^*X \setminus 0$ は射影で, $E^s(u) \setminus 0$ の 0 は $(T^*X \setminus 0) \times \{0\}$ の略である. \square

命題 1.7 $u \in \mathcal{D}'(X, \mathbb{C}^N)$, $P \in M$ の各 classical PsDOp の $M \times N$ 系, P_m をその主表象とする (properly supported は以後 113 以下断わらないこととする). このとき

$$P_m(z) E^s(u, z) \subset E^{s-m}(Pu, z), \quad z \in T^*X \setminus 0$$

が成立する。 $P_m(z)$ が可逆な (従って $M=N$) z については
等号が成立する。 \square

注意 $E^s(u, z)$ を $E^s(u)$ の z 上のフーリエ変換を表わす。

§2 主要結果

X を \mathbb{R}^d の開集合とし、 X 上の非線形偏微分作用素系

$$(NL) \quad P[u] = F(x, \partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq m}$$

を考える。ここで $u = (u_1, \dots, u_M)$, $F = (F_j(x, u_\alpha)_{|\alpha| \leq m})_{j=1, \dots, M}$
であり、 F は $\{(x, u_\alpha)_{|\alpha| \leq m}; x \in X, u_\alpha = (u_{k,\alpha})_{1 \leq k \leq N} \in \mathbb{R}^N\}$ から
 \mathbb{C}^M への C^∞ 写像である。 P が半線形の場合は、

$$(SL) \quad P[u] = P_m(x, D)u + G(x, \partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq m-1}$$

なる形をとる。ここで $P_m(x, D)$ は m 次斉次な線形部分で、
 $G(x, \partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq m-1}$ は低階を表わす。

注意 $D = (D_1, \dots, D_d)$, $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_d)$, $D_j = i^{-1} \partial_j = i^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}$ 。

定理 2.1 $u \in C^{m+p} \cap H_{loc}^s(X, \mathbb{R}^N)$, $p > 0$, $s \leq s_1 \leq s+p$
と (NL) を仮定すると $z \in X \times (\mathbb{R}^d, 0) \neq \emptyset$ に対し、

$$P_m(z) E^{s_1}(u, z) \subset E^{s_1-m}(P[u], z)$$

が成立する。ただし

$$P_m(x, z) = \sum_{|\beta|=m} \left(\frac{\partial F_j}{\partial u_{k,\beta}}(x, \partial^\alpha u(x))_{|\alpha| \leq m} \right)_{\substack{j=1, \dots, M \\ \rightarrow k=1, \dots, N}} \cdot (iz)^\beta$$

さらに $M=N$ で $P_m(z)$ が可逆な z に対して等号が成立する。

注意 定理 2.1 の仮定を $u \in C^{m-1+p} \cap H_{loc}^s(X, \mathbb{R}^N)$, $p > 0$
 $s \leq s_1 \leq s+p+1$, (SL) にかえると、同じ結論が成立する。

注意 C^r は $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ のとき C^r 級函数を、 $r > 0$,
 $r \notin \mathbb{N}$ のとき $C^{[r]}$ 級でかつ $[r]$ 回導函数がすべて $r-[r]$
 次 Hölder 連続である函数を表す。

約束 これ以後 $M=N$, (SL) を常に仮定する。

定義 2.2 ([LD]). $P_m(\lambda, z)$ が $z_0 = (x_0, \xi_0) \in T^*X \setminus 0$ で実主要
 型 (real principal type) であるとは、 $(1-m)$ 次正斉次な N
 次行列 $\tilde{P}_{1-m} \in C^\infty(T^*X \setminus 0)$ が存在して

$$\tilde{P}_{1-m}(z) P_m(z) = q_1(z) I_N \quad (z_0 \text{ の 錐近傍で})$$

がなりたつことを言う。ただし q_1 は実数値スカラーで

$q_1 = 0$ ならば dq_1 と α は一次独立となる (z_0 の錐近傍
 で)。すると

$$R_{P_m} = \{ z \in T^*X \setminus 0 ; \det P_m(z) = 0, P_m(z) \text{ は } z \text{ で} \\ \text{実主要型である} \}$$

は超曲面で、 $(T_z R_{P_m})^\sigma = \langle Hq_1(z) \rangle$ は R_{P_m} 上の 1 次元分布
 を定める。その積分曲線を P の陪特性曲線とよぶことにする。

ここで $\sigma = \sum_{j=1}^d dz_j \wedge dx_j$, $V^\sigma = "V \text{ の } \sigma \text{ に 并する直交空間}"$
 である。

定義 2.3 (cf [D]). γ を P の倍特性曲線, L を $\gamma \times \mathbb{C}^N$ の C^1 級複素 1 次元部分束, $u \in C^{m-1}(X, \mathbb{R}^N)$ とする。 L が $s = 0$ (ii) をみたすとき, L を (P, u) の γ 上の Hamilton orbit と呼ぶ:

$$(i) \quad L \subset N_{P_m} = \{ (z, w) \in (T^*X, 0) \times \mathbb{C}^N : w \in \ker P_m(z) \},$$

(ii) L は局所的に s をみたす C^1 級切断 w で γ はられる:

$$(Hq_1 + \frac{1}{2} \{ \tilde{P}_{1-m}, P_m \} + i \tilde{P}_{1-m} P_{m-1}^s) w = 0.$$

ただし q_1, \tilde{P}_{1-m} は定義 2.2 にあられるもので, さうに

$$\{ \tilde{P}_{1-m}, P_m \} = \sum_{j=1}^d (\partial_{z_j} \tilde{P}_{1-m} \partial_{x_j} P_m - \partial_{x_j} \tilde{P}_{1-m} \partial_{z_j} P_m)$$

$$P_{m-1}^s = P_{m-1} - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} \partial_{z_j} P_m$$

$$P_{m-1}(x, z) = \sum_{|\beta|=m-1} \left(\frac{\partial G}{\partial u_{k,\beta}}(x, \partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq m-1} \right)_{\substack{j=1, \dots, N \\ \rightarrow k=1, \dots, N}} \cdot (iz)^{\beta}$$

である。

注意 局所的に $L = \{ (x(t), z(t), \alpha w(t)) : |t| < \varepsilon, \alpha \in \mathbb{C} \}$,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \nabla_z q_1(x(t), z(t)) \\ \dot{z}(t) = -\nabla_x q_1(x(t), z(t)) \\ \dot{w}(t) + \left(\frac{1}{2} \{ \tilde{P}_{1-m}, P_m \} + i \tilde{P}_{1-m} P_{m-1}^s \right) (x(t), z(t)) w(t) = 0 \\ q_1(x(0), z(0)) = 0, \quad P_m(x(0), z(0)) w(0) = 0. \end{cases}$$

定理 2.4 $u \in C^{m+1+p} \cap H_{loc}^s(X, \mathbb{R}^N)$, $p > 0$, $s \leq s_1 \leq s+p$ を仮定する。 L を (P, u) の γ 上の Hamilton orbit とする。

もし $\gamma \cap WF^{s_1+1-m}(P[u]) = \emptyset$ ならば

$$E^{s_1}(u) \cap L = \gamma \times \{0\} \text{ 又は } L$$

である。言いかえると、 (P, u) の γ 上の Hamilton orbit $L_1,$

L_2, \dots, L_k があって次が成立する:

$$E^{s_1}(u)|_{\gamma} = L_1 \oplus \dots \oplus L_k \quad \circ$$

注意 $P \in \mathcal{N}$ のとき、 S, S_1 の範囲は [Bo], [Me] でのものに相当している。又、 P が線形ならば $S_1 \in \mathbb{R}$ での以上の主張がなりたつ。Dencker の結果に対応している。

REFERENCES

- [Be] M. Beals, "Propagation and interaction of singularities in nonlinear hyperbolic problems," Birkhäuser, 1989.
- [Bo] J. M. Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. **14** (1981), 209–246.
- [D] N. Dencker, *On the propagation of polarization sets for systems of real principal type*, J. Funct. Anal. **46** (1982), 351–373.
- [Doi] S. Doi, *On the propagation of a certain polarization set for semilinear systems of real principal type*, to appear in J. Math. Kyoto. Univ.
- [G1] C. Gérard, *Réflexion du front d'onde polarisé des solutions de systèmes d'équations aux dérivées partielles*, C. R. Acad. Sc. Paris **297** (1983), 409–412.
- [G2] C. Gérard, *Propagation de polarisation pour des problèmes aux limites convexes pour les bicaractéristiques*, Comm. in P.D.E. **10** (1985), 1347–1382.
- [Hö] L. Hörmander, *Pseudo-differential operators of type 1,1*, Comm. Partial Diff. Eq. **13:9** (1988), 1085–1111.
- [Me] Y. Meyer, *Remarques sur un théorème de J. M. Bony*, Suppl. ai Rend. del Circolo mat. di Palermo **II:1** (1981), 1–20.
- [M1] S. Mizohata, "On the Cauchy problem," Academic Press, 1985.
- [M2] S. Mizohata, *On the Cauchy problem for hyperbolic equations and related problems —micro-local energy method—*, in "Hyperbolic equations and related topics," Kinokuniya, 1986, pp. 193–233.
- [T] Y. Takei, *A fine microlocalization and hypoellipticity*, J. Math. Kyoto. Univ. **29** (1989), 127–157.