数理解析研究所講究録
第 846 巻 1993 年 126-129

グラフの分割について (III)

慶應大　榎本 彦衛　(Hikoe Enomoto)

ここでは、向きのない有限単純グラフのみを考える。すなわち、グラフ G とは頂点集合 $V(G)$ と辺集合 $E(G)$ の組で、$V(G)$ は有限集合、$E(G)$ は

$$\binom{V(G)}{2} = \left\{ e \,\middle|\, \begin{array}{l} e \subset V(G) \\ |e| = 2 \end{array} \right\}$$

の部分集合である。また、頂点集合を分割する分割問題のみを考える。

グラフの性質 $\mathcal{P}$ とグラフ G の位数の分割 $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$ に対し、$V(G)$ の分割

$$V(G) = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$$

で、各 i について

(1)　$|A_i| = a_i$

(2)　$\langle A_i \rangle$ は性質 $\mathcal{P}$ を満たす

の成り立つものが存在するとき、G は性質 $\mathrm{DP}(n, k, \sum a_i, \mathcal{P})$ を持つという。さらに、任意の相異なる頂点 $v_1, \cdot \cdot \cdot, v_k$ に対し、$V(G)$ の分割 $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ で、

(1)　$|A_i| = a_i$

(2)　$\langle A_i \rangle$ は性質 $\mathcal{P}$ を満たす

(3)　$v_i \in A_i$

の成り立つものが存在するとき、G は性質 $\mathrm{SDP}(n, k, \sum a_i, \mathcal{P})$ を持つということにし、DP や SDP が成り立つための条件を考えることにする。$\mathcal{P}$ としては、連結であるという性質 $\mathcal{C}$ や孤立点を持たないという性質 $\mathcal{I}$ を考えることにする。

1975年の第5回 British Combinatorics Conference において、Maurer は G が k-連結ならば任意の分割 $\sum_{i=1}^{k} a_i$ に対して、DP$(n, k, \sum a_i, \mathscr{C})$ が成り立つと予想した。同じ国際会議において、A. Frank は

G が k-連結ならば任意の分割 $\sum_{i=1}^{k} a_i$ に対して、SDP$(n, k, \sum a_i, \mathscr{C})$ が成り立つ

というもっと強い予想を提出した。G が k-連結でなければ、SDP$(n, k, \sum a_i, \mathscr{C})$ の成り立たないような頂点 $v_1, \cdots, v_k$ と分割 $\sum a_i$ の存在することは容易に分かるので、この予想は k-連結性の必要十分条件を与えることになる。この予想は Györi [1] と Lovász [2] により、ほぼ同時期に独立に証明された。

同じ国際会議において、A. Frank は、連結度 $\kappa(G)$ を最小次数 $\delta(G)$ で置き換えた予想

$$\delta(G) \geqq k \implies \mathrm{DP}(n, k, \textstyle\sum a_i, \mathscr{I})$$

も提出したが、この予想の解決にはずいぶん時間がかかった。

定理 1 ([3]) 連結グラフ G の最小次数が k 以上ならば、任意の分割 $\sum_{i=1}^{k} a_i$ (ただし、$a_i \neq 1$) に対し、DP$(n, k, \sum a_i, \mathscr{I})$ が成り立つ

ここでは、SDP$(n, k, \sum a_i, \mathscr{I})$ が成り立つための条件について考えてみたい。(以下、性質 $\mathscr{I}$ について考えるときは、とくに断らなくても、$a_i \neq 1$ とする。)

[4]において、定理 1 の系として、

$$\delta(G) \geqq 3k \implies \mathrm{SDP}(n, k, \textstyle\sum a_i, \mathscr{I})$$

が出てくると書いたが、定理 1 では G が連結と仮定しているということを忘れてお

り、その時点では証明できていなかった。しかし、結果は正しく、最近になってようやく証明が完成した。

定理 2（[5]） グラフ G の最小次数が $3k$ 以上ならば、任意の分割 $\sum_{i=1}^{k} a_i$ に対し、$\mathrm{SDP}(n, k, \sum a_i, \mathcal{I})$が成り立つ

さらに、[4]において、

$$\delta(G) \geqq 2k-1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{SDP}(n, k, \textstyle\sum a_i, \mathcal{I})$$

という予想を述べたが、これは誤りで、$\delta(G) = 3k - 3$ で $\mathrm{SDP}(n, k, \sum a_i, \mathcal{I})$ の成り立たない例があると、江川氏から注意を受けた。すなわち、

$$G = K_{3k-2} \cup K_{3k-2},$$

$$a_1 = \cdot\cdot\cdot = a_{k-1} = 3,\ a_k = 3k-1$$

とし、$v_1, \cdot\cdot\cdot, v_k$ を１つの K_{3k-2} の中に取ると、うまく分割できない。（G が連結と仮定しても、$\delta(G) = 3k - 4$の例がある。）そこで、現在は次のように予想している。

予想 3 $\delta(G) \geqq 3k - 2$ ならば、任意の分割 $\sum_{i=1}^{k} a_i$ に対し、$\mathrm{SDP}(n, k, \sum a_i, \mathcal{I})$ が成り立つ。

この予想を証明するためには、定理１を次のように拡張できればよさそうだということがわかっている。

予想 4　G が連結グラフならば、任意の分割 $\sum_{i=1}^{k} a_i$ に対し、$V(G)$ の分割 $V(G) = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ で、

(1)　$|A_i| = a_i,$

(2)　$d_{<A_i>}(x) = 0$ ならば $d_G(x) < k$

を満たすものが存在する。

文　献

[1] L. Lovász, A homology theory for spanning trees of a graph, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **30** (1977) 241–251.

[2] E. Györi, On division of graphs to connected subgraphs, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **18** (1978) 485–494.

[3] H. Enomoto, Graph decompositions without isolated vertices, submitted.

[4] 榎本彦衛，グラフの分割について，応用数学合同研究集会 (1992).

[5] Y. Egawa, H. Enomoto and N. Tokushige, Graph decompositions through prescribed vertices without isolates, preprint.