数理解析研究所講究録
846巻 1993年 46-59

SPIN MODEL の構成について

Victor G. KAC (MIT)
脇本 実 (三重大学教育学部)
(Minoru WAKIMOTO)

§0. まえがき

Spin Model は Link の不変量を構成するための一つの手法として，Jones[5] により導入されたもののようであるが，筆者(M.W)がそれに関心を持つようになったのは，昨年(1992年)11月に三重大学教育学部で行われた坂内英一氏（九州大学）の集中講義が，きっかけであった。Association Schemes をテーマにした明解な講義であったが，集中講義の最終日に，関連する話題として，Fusion algebra (at algebraic level) と spin model についての話をされた。坂内氏は（おそらく）書き上げたばかりの「数学」の論説[1]の原稿に沿いながら，Association scheme やその周辺の話を，私にでも分かるように，易しく，かみくだいて解説して下さったが，

(1) 「assosiation scheme + modular不変性」を用いて spin model を作る話や，

(2) 有限巡回群の上に spin model を構成する話

などは，非常に興味をそそられる話であった。

アフィン・リー環 $\mathfrak{g}$ があると，レベル m の integrable表現の modular変換を使って Fusion algebra が構成されること(Verlinde の公式)は，よく知られている。有限巡回群は，アフィン・リー環 $A_\ell^{(1)}$ のレベル1の fusion algebra とみることが出来る。(坂内)^2 の preprints[2][4]を

お手本にしながら，この方法をリー環の言葉に焼き直して解釈してみようと試みた。リー環には fusion algebra たちが，あり余る程ある。これらに，(坂内)^2 の方法を適用してみたらどうなるだろうか？

しかし実際にやってみると，うまく行かない。うまく行くのは，

(#1)　$A_\ell^{(1)}$, $D_\ell^{(1)}$, $E_\ell^{(1)}$ のレベル 1 の表現の時だけ，

であって，これらは実質的に上の(2)に含まれてしまう。一般のアフィン・リー環に拡張しようとすると，たちまち障害に突き当たる。何故(#1)の時にだけうまく行くのか？ ・・・ 技術的な理由ではあるが，その事情は次のようである：integrable表現の指標の上には modular群 $SL_2(\mathbb{Z})$ が作用しているが，$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の作用を，$ch_\lambda|_S = \Sigma_\mu S_{\lambda\mu} ch_\mu$ と書くとき，

(#2)　$S_{m\Lambda_0,\mu}$ が μ に依らない　（m は λ, μ のレベル）

となる場合には，spin model の構成がうまく行く。しかし integrable な表現で，この条件(#2)を満たすものは，（trivial表現，すなわち m=0 の場合を除けば），(#1)のものしかない。

このように，(坂内)^2 の手法をリー環に拡張することは無理な問題のようにも見えた。しかし・・・我々はもっと広い表現のクラスを知っている。modular不変な表現は integrableな表現だけではない(cf.[7],[8])。admissible表現の世界を覗くと，条件(#2)と似ているが，それよりも少し弱い性質

(#2')　$S_{m\Lambda_0,\mu}$ は（±1倍を除き）μ のとり方に依らない

を持つものが，どのアフィン・リー環にも沢山（無限個）ある。そして，この性質(#2')の下でも，話がうまく行くことが分かった。spin model だけでなく，それの拡張である generalized spin model も generalized^2 spin model も，同時に構成出来る。

このようにしてアフィン・リー環の admissible表現を用いることによって spin models を構成することは，リー環の表現論の応用例としても，結構

面白いもののように思われた。しかしその後，著者たちの間で議論を重ねるにつれて，この構成法は非常に簡単になって行った。余分な脂肪はどんどんとれて行き，ついには・・・admissible表現も，modular不変性も，そしてリー環さえも洗い落とされてしまった。あとに残ったのは，ただ Lattice と，その上の２次形式のみ　・・・ spin model の構成には，たったこれだけのデータで十分だったのである。

§２が本論であるが，この節の定理や Lemmas の証明はすべて高校生の練習問題程度なので省略する。我々の出発点であったリー環の場合の話は，§２の主定理の具体的な適用例として，§３ に略述する。

ここで構成した spin model から，新しい Link不変量が得られるかどうかについては，今のところ未だ分からない。

坂内氏には，spin model を教えていただいたり，論文のコピーを送っていただいたり，助言をいただいたり，終始大変お世話になりました。厚くお礼を申し上げます。

§１． Spin Model の定義：

この節では，X は N 個の元から成る有限集合とする。また，X_+，X_- や，X_i ($i=1,2,3,4$) は N次（複素）正方行列で，その両足は X の元である。

定義1.1. (X ; $X_\pm$) が "Spin model (by Jones)" or "symmetric spin model" であるとは，次の条件 (S0)～(S3) を満たすときに云う：

(S0)　$X_\pm$ は対称行列

(S1)　$X_+ \circ X_- = J$，

ここで，$\circ$ は行列の Hadamard積を表わす。J は，すべての行列

要素が 1 の N次正方行列である。

(S2) $X_+ \cdot X_- = N \cdot I$ （I は単位行列）

(S3) (star triangle relation) 任意の $\alpha, \beta \in X$ に対して，N次の縦ベクトル $Y_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}^N$ を $(Y_{\alpha\beta})_\mu := (X_+)_{\mu\alpha}(X_-)_{\mu\beta}$ で定めると，

$$X_+ Y_{\alpha\beta} = \sqrt{N}\,(X_-)_{\alpha\beta}\, Y_{\alpha\beta}$$ □

Note. 条件(S3)より，行列 X_- の要素は X_+ の固有値の $N^{-1/2}$ 倍である。従って，行列 X_- （及び X_+） の行列要素の内で，異なるものは高々 N 個しかない。 □

Spin model の概念は，宗政・綿谷[9]により，non-symmetric の場合に拡張された：

定義1.2. $(X\,;\,X_\pm)$ は，条件(S1)(S3) と

(GS2) ${}^tX_+ \cdot X_- = N \cdot I$

を満たす時に，“generalized spin model” or “non-symmetric spin model” と呼ばれる。 □

すなわち，このように定義すれば，これから Link不変量が作れるということである。

Spin model は，(坂内)^2 [3] によって更に拡張されている：

定義1.3. $(X\,;\,X_i\,(i=1\sim 4))$ が “generalized^2 spin model” であるとは，次の 3 条件(GGS1)～(GGS3)を満たすときに云う：

(GGS1) $X_1 \circ X_3 = X_2 \circ X_4 = J$

(GGS2) $\quad {}^tX_1X_3 = {}^tX_2X_4 = N\cdot I$

(GGS3) (star triangle relation) 任意の $\alpha, \beta \in X$ に対して，

N次の縦ベクトル $Y_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}^N$ を

$$(Y_{\alpha\beta})_\mu := (X_1)_{\mu\alpha}(X_4)_{\mu\beta}, \qquad (Z_{\alpha\beta})_\mu := (X_4)_{\alpha\mu}(X_1)_{\mu\beta}$$

で定めると，

$$X_+Y_{\alpha\beta} = N^{1/2}(X_-)_{\alpha\beta}Y_{\alpha\beta}, \qquad X_+Z_{\alpha\beta} = N^{1/2}(X_-)_{\alpha\beta}Z_{\alpha\beta}$$

□

Note. この定義は一見複雑なように見えるが，実際には，なかなか使い勝手が良い。あとで §4～ §6 に述べるように，generalized^2 spin model から直ちに，vertex model や IRF-model, それに Braid群の表現などが得られる。 □

§2. Spin Model の構成

L : a lattice

$<\ ,\ >$: a $\mathbb{Q}$-valued bilinear form on L

として，

$$M := L^*\cap L = \{\alpha \in L\ ;\ <\alpha, \beta> \in \mathbb{Z} \quad \text{for all } \beta \in L\}$$

$$X := L/M \quad \text{(abelian group)}$$

$$N := |X|$$

とおく。次の条件(*)が L, $<\ ,\ >$ についての唯一の要請である：

(*) $\quad <\alpha, \alpha> \in 2\mathbb{Z} \qquad \text{for all } \alpha \in M$

Note. 条件(*)は，大きな制限ではない。もしも $(L, <\ ,\ >)$ がこの仮定を満たさない時には，たとえば内積 $<\ ,\ >$ を $<\ ,\ >' := (1/2)<\ ,\ >$ で置き換えれば良い。 □

次に

$$\varepsilon \quad : \quad X \longrightarrow \{\pm 1\} \qquad \text{a group homomorphism}$$

を（任意に）与えて，

$$t_\alpha \;:=\; \varepsilon(\alpha)\, e^{\pi i \langle \alpha, \alpha \rangle}$$

$$D \;:=\; \sum_{\alpha \in X} t_\alpha$$

とおく。このとき，我々の主張は次の２つの定理である：

定理2.1.　$\gamma \in X$ を任意に fix して，$X^\gamma_\pm$ を次のように定める：

$$(X^\gamma_+)_{\alpha\beta} \;:=\; \left(\frac{\sqrt{N}}{Dt_\gamma}\right)^{1/2} \cdot t_{\gamma+\alpha-\beta}$$

$$(X^\gamma_-)_{\alpha\beta} \;:=\; \left(\frac{\sqrt{N}}{Dt_\gamma}\right)^{-1/2} \cdot t^{-1}_{\gamma+\alpha-\beta}$$

このとき，

1)　$X^\gamma_\pm$ は generalized spin model である。

2)　これが symmetric $\Longleftrightarrow$ $2\gamma \in M$ □

定理2.2.　$\xi, \eta \in X$ と $A, B \in \mathbb{C}$ を $AB = \dfrac{\sqrt{N}}{Dt_\xi}$ となるように与えて，X_i (i= 1～ 4) を次のように定める：

$$(X_1)_{\alpha\beta} := At_{\xi+\alpha-\beta}, \qquad (X_3)_{\alpha\beta} := A^{-1}t^{-1}_{\xi+\alpha-\beta}$$

$$(X_2)_{\alpha\beta} := Bt_{\eta+\alpha-\beta}, \qquad (X_4)_{\alpha\beta} := B^{-1}t^{-1}_{\eta+\alpha-\beta}$$

このとき，X_i (i=1～ 4) は generalized^2 spin model である。 □

証明の方針は次のようである。まず

$$S_{\alpha\beta} \;:=\; N^{-1/2} e^{-2\pi i \langle \alpha, \beta \rangle}$$

とおけば，$S_{\alpha\beta}$ は次の性質を持つ：

Lemma A.　行列 $(S'_{\alpha\beta})$ は unitary行列である。

Lemma B. 1) $$S_{\alpha\beta} = N^{-1/2} \cdot \frac{t_\alpha t_\beta}{t_{\alpha+\beta}}$$

2) $$S_{\alpha,0} = N^{-1/2}$$

3) $$S_{\alpha+\alpha',\beta} = N^{1/2} S_{\alpha\beta} S_{\alpha',\beta}$$

4) $$\sum_{\beta\in X} S_{\alpha\beta} = N^{1/2} \delta_{\alpha,0}$$

Lemma C. 1) $$\sum_{\alpha\in X} t_\alpha S_{\alpha\beta} = DN^{-1/2} \cdot t_\beta^{-1}$$

2) $$\sum_{\alpha\in X} t_\alpha \overline{S_{\alpha\beta}} = DN^{-1/2} \cdot t_\beta^{-1}$$

3) $$\sum_{\alpha\in X} t_\alpha S_{\alpha+\beta,\gamma} = DS_{\beta\gamma} t_\gamma^{-1}$$

4) $$\sum_{\alpha\in X} t_{\alpha+\beta} S_{\alpha\gamma} = D\overline{S_{\beta\gamma}} t_\gamma^{-1}$$

Lemma D. $$\sum_{\beta\in X} t_{\alpha+\beta} t_\beta^{-1} = N \cdot \delta_{\alpha,0}$$

Lemma E.　任意の $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in X$ について,

$$\sum_{\nu\in X} t_{\alpha-\nu} t_{\beta+\nu} t^{-1}_{\gamma+\nu} = D t_\lambda t^{-1}_{\gamma-\beta+\lambda} t_{\beta+\alpha-\lambda} t^{-1}_{\alpha+\gamma-\lambda}$$

Note.　Lemma D より直ちに $|D| = N^{1/2}$ を得る。　□

§0. に書いたように，これらの Lemma の証明は，ほとんど自明であるか，または簡単な計算から直ちに従う。Lemma D が (S2),(GS2),(GGS2) を与え，Lemma E が star-triangle relation を与えて，定理を得る。

§3. リー環の場合と Gauss和の公式

§0に述べたように，この節での話が我々の構成法の原型であり，出発点であった。§2で行ったように非常に一般的な setup の下での構成方法から見れば，この節で述べる事柄は単に lattice (L, < , >) の具体的な例にすぎないが，リー環の場合には，modular変換を使うことにより，§2の $D := \sum_{\alpha\in X} t_\alpha$ を求めることが出来ることに注意したい。すなわち，リー環の modular変換は Gauss和の公式を導くのである。

まず最初に，リー環固有の言葉（方言）や記号を準備する。$\mathfrak{g}$ を，有限次元単純リー環(/$\mathbb{C}$)として，root-lattice，weight-lattice などを次のような記号で表す：

Δ_+ : 正の roots 全体のなす集合

$h := \sum_{\alpha\in\Delta_+} \mathbb{C}\alpha$: Cartan subalgebra of $\mathfrak{g}$

$\ell := \mathrm{rank}(\mathfrak{g}) = \dim h$

$(\ |\ )$: $\mathfrak{g}$-invariant bilinear form on $\mathfrak{g}$

s.t. $(\alpha|\alpha) = 2$ if α is a long root

$k^\vee := \dfrac{(\alpha|\alpha)}{(\beta|\beta)}$ （但し α = a long root, β = a short root）

g : dual Coxeter number

$Q := \sum_{\alpha\in\Delta_+} \mathbb{Z}\alpha$: root lattice

$Q^\vee := \sum_{\alpha\in\Delta_+} \mathbb{Z}\alpha^\vee$: co-root lattice （但し $\alpha^\vee := \dfrac{2\alpha}{(\alpha|\alpha)}$ ）

$P := (Q^\vee)^* = \{\lambda \in h\ ;\ (\lambda|\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$ for all $\alpha \in \Delta_+\}$

$P^\vee := Q^* = \{\lambda \in h\ ;\ (\lambda|\alpha) \in \mathbb{Z}$ for all $\alpha \in \Delta_+\}$

$\rho := \dfrac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta_+} \alpha \in P$

とおく。そして次のような L, < , > を考える：

Case I)　$L := P$, $< , > := u^{-1}(\ |\ )$;　（但し　$u \in \mathbb{N}$ ）

このとき，

$$M = uQ^\vee ,\quad X = P/uQ^\vee ,\qquad N = u^\ell\, |P/Q^\vee| .$$

Case II)　$L := P^\vee$, $< , > := (g/u)\cdot(\ |\ )$,　$\varepsilon(\lambda) := e^{2\pi i(\rho|\lambda)}$

但し　$u \in \mathbb{N}$　st.　$\gcd(u,g) = \gcd(u,k^\vee) = 1$　;

このとき，

$$M = uP^\vee ,\quad X = P^\vee/uP^\vee ,\qquad N = u^\ell .$$

Case III)　$\mathfrak{g}$ = simply-laced (ie. $k^\vee = 1$) で，

$L := P$, $< , > := ((g+1)/u)\cdot(\ |\ )$,　$\varepsilon(\lambda) := e^{2\pi i(\rho|\lambda)}$

但し　$u \in \mathbb{N}$　st.　$\gcd(u,g+1) = 1$　;

このとき，

$$M = uQ ,\quad X = P/uQ ,\qquad N = u^\ell\, |J|$$

ここで，$|J|$ は次の通り：

$\mathfrak{g}$:	A_ℓ	D_ℓ	E_6	E_7	E_8
$\|J\|$:	$\ell+1$	4	3	2	1

定理3.1.　Case I のとき，

$$\sum_{\lambda \in P/uQ} e^{\pi i|\lambda|^2/u} = N^{1/2} e^{\pi i \ell} \qquad \square$$

Case II or Case III のときには，

$$s := \begin{cases} g & (\text{Case II のとき}) \\ g+1 & (\text{Case III のとき}) \end{cases}$$

として，

$$\left[\frac{u}{s}\right]_{\mathfrak{g}} := \text{signature of } \prod_{\alpha \in \Delta_+} \sin \frac{\pi u(\rho|\alpha)}{s}$$

とおく。 $\left[\frac{u}{s}\right]_{\mathfrak{g}}$ は，平方剰余記号（Jacobi-symbol）の拡張である。特に，Case II で， $\mathfrak{g} = sl(\ell+1, \mathbb{C})$ のときには，

$$\left[\frac{u}{g}\right]_{sl(\ell+1,\mathbb{C})} = \left[\frac{u}{\ell+1}\right] = \text{Jacobi symbol}$$

となる(cf. Kac[6])．

定理3.2. Case II または Case III のとき，

$$\sum_{\lambda\in X} e^{2\pi i\{s|\lambda|^2/(2u)+(\rho|\lambda)\}} = N^{1/2}\left[\frac{u}{s}\right]_{\mathfrak{g}} e^{\pi i\{(s-ug)/(4s)\}\dim(\mathfrak{g})}$$

□

定理3.1 の証明には，レベル u の Θ-函数の modular変換を用いる。定理3.2 はレベル m (:=s/u-g) の admissible表現の指標の modular変換を用いる。いずれの定理も，$(TS^{-1})^3 = I$ なる関係式を modular変換の行列にあてはめて計算することによって，直ちに得られる。
（ここで，$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。）

§4. Braid群の表現

以下の節では，$(X\ ;\ X_i(i=1\sim 4))$ は §2 で得られた generalized[2] spin model であるとし，V を X の $\mathbb{C}$-linear span とする。

$T_\xi \in \mathrm{End}(V)$， $\Delta_\eta \in \mathrm{End}(V\otimes V)$

を，次の式で定義する：

$$T_\xi(\alpha) := N^{-1/2}\sum_{\gamma\in X}(X_1)_{\alpha\gamma}\cdot\gamma$$

$$\Delta_\eta(\alpha\otimes\beta) := (X_4)_{\alpha\beta}\cdot\alpha\otimes\beta$$

Lemma 4.1. $T_\xi^{(1)}, T_\xi^{(2)} \in \mathrm{End}(V\otimes V)$ を $T_\xi^{(1)} := T_\xi\otimes I$， $T_\xi^{(2)} := I\otimes T_\xi$

により定めると,

$$T_\xi^{(i)} \circ \Delta_\eta \circ T_\xi^{(i)} = \Delta_\eta \circ T_\xi^{(i)} \circ \Delta_\eta \qquad (I=1,2)$$ □

これの証明に使うのは, generalized^2 spin model の条件の内の (GGS3) だけである。

Lemma 4.1 から直ちに, Braid群 $B_{2k} = \langle \sigma_i \rangle_{1 \leqq i \leqq 2k-1}$ の $\otimes^k V$ 上での表現が得られる:

定理4.2. $\xi_1, \cdots, \xi_k; \eta_1, \cdots, \eta_{k-1} \in X$ を任意に fix して,

$$\pi(\sigma_{2i-1}) := I_1 \otimes \cdots \otimes I_{i-1} \otimes T_{\xi_i} \otimes I_{i+1} \otimes \cdots \otimes I_k \qquad (1 \leqq i \leqq k)$$

$$\pi(\sigma_{2i}) := I_1 \otimes \cdots \otimes I_{i-1} \otimes \Delta_{\eta_i} \otimes I_{i+2} \otimes \cdots \otimes I_k \qquad (1 \leqq i \leqq k-1)$$

とおくと, これは Braid群 B_{2k} の表現である。 □

§5. Vertex Model と R-Matrix

ここでは Jones[5] の定義を簡素化して, 次のような vertex model を考える:

定義: $\mathbb{C}$ に値を持つ函数 $w_\pm(a,b|x,y)$ が vertex model であるとは, 次の条件を満たす時に云う:

(V1) $$\sum_{a',b' \in X} w_+(a,a'|b,b')w_-(b',b''|a',a'') = \delta_{a,a''}\delta_{b,b''}$$

(V2) $$\sum_{a',b' \in X} w_+(a,a'|b',b'')w_-(b,b'|a',a'') = \delta_{a,a''}\delta_{b,b''}$$

(V3) $$\sum_{a',b',c' \in X} w_+(a,a'|b,b')w_+(a',a''|c,c')w_+(b',b''|c',c'')$$

$$= \sum_{a',b',c' \in X} w_+(a,a'|c',c'')w_+(b,b'|c,c')w_+(a',a''|b',b'')$$

□

定理5.1.　$(X;X_i(i=1\sim 4))$ を 定理2.2で得られた generalized^2 spin model とし，V を X の $\mathbb{C}$-linear span とする。このとき，

$$w_+(a,b|x,y) := N^{-1/2}\delta_{a+b,x+y}({}^tX_1)_{ay}(X_4)_{by}$$

$$w_-(a,b|x,y) := N^{-1/2}\delta_{a+b,x+y}({}^tX_2)_{ax}(X_3)_{ay}$$

とおけば，$w_\pm$ は vertex model である。　□

この定理と，次の定理とを組み合わせることによって，generalized^2 spin model $(X;X_i(i=1\sim 4))$ から，Braid群 B_k の表現が得られる。これは前節で構成した表現とは別の表現である。

定理5.2.(Jones[5])　$w_\pm(a,b|x,y)$ が vertex model のとき，$R, R^\vee \in \mathrm{End}(V\otimes V)$ を

$$R(a\otimes b) := \sum_{\alpha',\beta'\in X} w_+(a,a'|b,b')\cdot a'\otimes b'$$

$$R^\vee(a\otimes b) := R(b\otimes a)$$

で定めると，$\mathrm{End}(V\otimes V\otimes V)$ において，次の1)2)が成り立つ：

1)　$R_{12}\circ R_{13}\circ R_{23} = R_{23}\circ R_{13}\circ R_{12}$

2)　$R^\vee_{12}\circ R^\vee_{23}\circ R^\vee_{12} = R^\vee_{23}\circ R^\vee_{12}\circ R^\vee_{23}$

そこで

3)　$\pi(\sigma_i) := I_1\otimes I_2\otimes \cdots \otimes I_{i-1}\otimes R^\vee_{i,i+1}\otimes I_{i+2}\otimes \cdots \otimes I_k \quad (1\leq i\leq k-1)$

は，Braid群 B_k の $\otimes^k V$ 上での表現である。　□

§6.　IRF-model

Jones[5]に従って，IRF-model を次のように定義する：

定義： $\mathbb{C}$ に値を持つ函数 $w_{\pm}(a,b,x,y)$ が次の条件を満たすとき，$(X;\ w_{\pm})$ を IRF-model という：

(I0) $$\sum_{x\in X} w_{\pm}(a,b,a,x) = 1$$

(I1) $$\sum_{x\in X} w_{+}(a,b,x,d)w_{-}(x,b,e,d) = \delta_{a,e}$$

(I2) $$\sum_{x\in X} w_{+}(a,b,c,x)w_{-}(c,e,a,x) = \delta_{b,e}$$

(I3) $$\sum_{x\in X} w_{+}(a,b,x,f)w_{+}(b,c,d,x)w_{+}(x,d,e,f) = \sum_{x\in X} w_{+}(b,c,x,a)w_{+}(a,x,e,f)w_{+}(x,c,d,e)$$

□

定理6.1. $(X\ ;\ X_i(i=1\sim 4))$ を 定理2.2で得られた generalized^2 spin model とする。ただし，η は $2\eta\in M$ となるように選んでおく。このとき

$$w_{+}(a,b,c,d) := B^2D^2N^{-3/2}\cdot({}^tX_1)_{ac}(X_4)_{bd} = DN^{-1}\cdot t_{\xi}^{-1}t_{\xi+c-a}t^{-1}_{\eta+b-d}$$

$$w_{-}(a,b,c,d) := B^{-2}D^{-2}N^{1/2}\cdot({}^tX_3)_{ac}(X_2)_{bd} = \bar{D}N^{-1}\cdot t_{\xi}\, t^{-1}_{\xi+a-c}t_{\eta+b-d}$$

とおけば， $w_{\pm}$ は IRF-model である。 □

References

[1] 坂内英一： 代数的組合せ論～アソシエーションスキームの最近の話題 「数学」, Vol.45 No.1 (1993年1月号), 55–75.

[2] E.Bannai & E.Bannai: Spin models on finite cyclic groups, preprint.

[3] E.Bannai & E.Bannai: Generalized generalized spin models, preprint.

[4] E.Bannai & E.Bannai: Generalized spin models and association schemes, preprint.

[5] V.F.Jones: On knot invariants related to some statistical mechanical models, pacific J. Math.,137(1989), 311-334.

[6] V.G.Kac: Simple Lie groups and the Legendre symbol, in Lecture Notes in Math. 848, Springer-Verlag 1981, 110-124.

[7] V.G.Kac & M.Wakimoto: Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 85 (1988), 4956-4960.

[8] V.G.Kac & M.Wakimoto: Classification of modular invariant representations of affine algebras, in: Infinite-dimensional Lie algebras and groups, Adv. Ser. in Math. Phys. 7, World Scientific 1989, 138-177.

[9] A.Munemasa & Y.Watatani: Generalized spin models, preprint.