数理解析研究所講究録
847巻 1993年 94-106

2階算術の諸体系
— モデル論的手法による分析 その2 —

東北大学 理学部 数学科
田中 一之 (Kazuyuki Tanaka)

この論文は，下記の論文の続編として書かれたものである。

2階算術の諸体系－モデル論的手法による分析－，数理解析研講究録771 (1991年12月) pp. 118－156.

上の論文は，以下のような構成になっていた。

§0. 準備

§1. AC, DC, SP, TI

§2. WKL_0に関するHarringtonの結果

§3. WKL_0に関するFriedmanの結果

これに続いて，本文の構成は次の通り，

§4. WKL_0の自己埋め込み定理

§5. PRAについて

§6. 補遺，訂正

§4. WKL_0の自己埋め込み定理

本節では，WKL_0の任意の可算超準モデル(M, S)が自らと同型になる始切片$(I, S\lceil I)$を持つことを示す。ここで，IはMの始切片，つまり$<$に関して閉じたMの真部分集合であり，$S\lceil I = \{X \cap I : X \in S\}$である．

PAの可算超準モデルが自分と同型の始切片を持つことは，H. Friedman (in Lec. Notes in Math. 337 (1973)) によって初めて示され，その後 Dimitracopoulos (in ZML 31 (1985)) が $B\Sigma_2$ のモデル，そして Dimitracopoulos-Paris (in ZML 34 (1988)) が $I\Sigma_1$ のモデルに一般化させた。以下の証明は，$I\Sigma_1$ の自己埋め込みにさらに集合を扱う機構を加えてWKL_0の自己埋め込みを作るというものである．Dimitracopoulos-Parisの定理の証明は，Hájek-Pudlák の本 (Metamath. of First-Order Arith., Springer 1993) にも載っているので，ここではその改良点，つまり集合を扱う手続きの部分を中心に述べる。

最初に，WKL_0の可算超準モデル$V = (M, S)$を１つ固定しておく。以下の議論を簡単にするため，Vは$+, \cdot$を関数でなく，関係として持っていることとする。つまり，$+(a, b, c)$は$a + b = c$を表す関係である。このようにすると，Mの始切片が$+$や$\cdot$に関して閉じていない場合にも数学的構造として扱うことができる。そして，$+(a, b, c)$を満たすcが存在するとき

にそれを $a+b$ と書くと約束しておけば，実際上記法の違いを意識する必要はない。・についても同様。

次に，広義の Σ^1_1 式（G式と呼ぶ）を定義する．以下の定義は簡単な recursion によるもので，G式の集合の存在は RCA_0 でいえるから，それは V の中にも存在する．

定義 4.1. 有限個の原子式またはその否定形を disjunction $\vee$ で結んでできる式を G_0式と呼び，その集まりを G_0 と書く．各(超)自然数 e に対し，

$$G_{4e+1} = \{\exists x\phi : \phi \text{ は有限個の } G_{4e} \text{ 式の conjunction}\} \cup G_{4e},$$
$$G_{4e+2} = \{\forall x<y\ \phi : \phi \text{ は有限個の } G_{4e+1} \text{ 式の disjunction}\} \cup G_{4e+1},$$
$$G_{4e+3} = \{\exists X\phi : \phi \text{ は有限個の } G_{4e+2} \text{ 式の conjunction}\} \cup G_{4e+2},$$
$$G_{4e+4} = \{\forall X\phi : \phi \text{ は有限個の } G_{4e+3} \text{ 式の disjunction}\} \cup G_{4e+3},$$

とおき，最後に

$$G = \bigcup_e G_e$$

とする。G, G_e に属する式をそれぞれG式，G_e式という． ☒

我々は，このG式に対する充足関係を定義したい。そのために，次のような概念をまず導入する．$p \in M$ として，$M_p = \{a \in M : M \models a<p\}$，$S_p = \{X \cap M_p : X \in S\}$，$V_p = (M_p, S_p)$ とおく．V_p 上の充足関係 $Tr^p(z, \zeta)$ は，(G式に限らない)任意の式 ϕ のコード z と，ϕ の自由変数に $M_p \cup S_p$ の値を代入する評価関

数ξについて（Vにおいて）Δ_1^0関係として定義できる。ここで，S_pの要素は2^p以下の数でcodeできることに注意したい。従って，V_pにおける量化詞の解釈は，Vにおける有界量化詞になる。

<u>定義4.2.</u>　G式のコードzについての充足関係$Tr(z,\xi)$を次のように定める：

$$Tr(z,\xi) \iff \exists p\, Tr^p(z,\xi). \qquad \boxtimes$$

<u>補題4.3.</u>　$Tr(z,\xi)$はG式についてTarskiの真理条件を満たす。

（証明）集合を扱う場合の本質的なケースは以下の通り，

$$\begin{aligned} Tr(\forall X z,\xi) &\iff \exists p\, Tr^p(\forall X z,\xi) && \because Tr\text{の定義} \\ &\iff \exists p\, \forall U\, Tr^p(z,\xi\cup\{(X,U)\}) && \because Tr^p\text{の性質} \\ &\iff \forall U\, \exists p\, Tr^p(z,\xi\cup\{(X,U)\}) && \because \text{コンパクト性} \\ &\iff \forall U\, Tr(z,\xi\cup\{(X,U)\}) && \because Tr\text{の定義} \end{aligned}$$

ここで，$\xi\cup\{(X,U)\}$は変数Xに値Uを割当てるようにξを拡張したもの。　$\boxtimes$

<u>補題4.4.</u>　各eと有限評価関数ξに対し，あるpが存在し，ξで評価できる任意のG_e式zについて，

$$Tr(z,\xi) \iff Tr^p(z,\xi).$$

（証明） ξを有限評価関数，つまりξが評価できる変数が有限個であるとする．G_e式はe個の束縛変数をもつので，ξが評価する変数にe個の変数を加えた集合$\mathfrak{X}$を考え，G_e式の変数はすべて$\mathfrak{X}$に属するとしてよい。$\mathfrak{X}$の変数だけを持つ原子始式は有限個しかないから（関数記号がないことに注意）、$\mathfrak{X}$の変数だけを持つG_0式も本質的には（$A\vee A$をAと同一視すれば）有限個しかない。あとは帰納法で，そのようなG_e式も有限個しかないことがいえる．そうすれば，条件を満足するpの存在は，Σ^0_1 induction（又は$S\Sigma_1$）より明らか． ☒

<u>定義 4.5.</u> 定義域の等しい有限評価関数ξ,ξ'に対し，

$$\mathrm{Ref}^p_e(\xi,\xi') \iff [\xi\text{で評価される}G_e\text{式}z\text{について},\ \mathrm{Tr}(z,\xi)\Rightarrow \mathrm{Tr}^p(z,\xi')]$$

<u>補題 4.6.</u> $\mathrm{Ref}^p_e(\xi,\xi')$を仮定する．

(1) $e=4d+1$のとき， $\forall a\,\exists a'<p\ \mathrm{Ref}^p_{e-1}(\xi\cup\{(y,a)\},\xi'\cup\{(y,a')\})$,

(2) $e=4d+2$のとき， $\forall a'<\xi'(x)\,\exists a<\xi(x)\ \mathrm{Ref}^p_{e-1}(\xi\cup\{(y,a)\},\xi'\cup\{(y,a')\})$,

(3) $e=4d+3$のとき， $\forall U\,\exists U'\ \mathrm{Ref}^p_{e-1}(\xi\cup\{(Y,U)\},\xi'\cup\{(Y,U')\})$,

(4) $e=4d+4$のとき， $\forall U'\,\exists U\ \mathrm{Ref}^p_{e-1}(\xi\cup\{(Y,U)\},\xi'\cup\{(Y,U')\})$,

但し，yやYはξで評価されない新しい変数とする．

（証明） (1) aを固定し，$Z=\{z\in G_{e-1}:\ \mathrm{Tr}(z,\xi\cup\{(y,a)\})\}$とおく．補題4.4の証明と同様にして，$Z$は有限集合と考えられる．

従って，その存在は Σ^0_1 induction (又は finite (Σ^0_1-CA)) からいえる。そこで，$z' = \exists y \bigwedge_{z\in Z} z$ とおくと，$z'\in G_e$ かつ $Tr(z',\xi)$ となる。仮定により $Tr^p(z',\xi')$ となるから，ある $a'<p$ が存在して，各 $z\in Z$ に対し，$Tr^p(z,\xi'\cup\{(y,a')\})$ となって，(1)が証明された。

(2) $a'<\xi'(x)$ とする。$\forall a<\xi(x)\ \exists z\in G_{e-1}\,[Tr(z,\xi\cup\{(y,a)\})\wedge \neg Tr^p(z,\xi'\cup\{(y,a')\})]$ と仮定して，矛盾を導く。$Z=\{z\in G_{e-1}: \neg Tr^p(z,\xi'\cup\{(y,a')\})\}$ とおくと，(1)と同様にして Z は有限集合として存在する。すべての $a<\xi'(x)$ に対し，$Tr(z,\xi\cup\{y,a\})$ となる $z\in Z$ が存在するから，$z'=\forall y<x \bigvee_{z\in Z} z \in G_e$ とおけば，$Tr(z',\xi)$. 仮定から $Tr^p(z',\xi')$ となり，すべての $a'<\xi'(x)$ に対し，$Tr^p(z,\xi'\cup\{(y,a')\})$ となる $z\in Z$ が存在することになるが，これは Z の定義と矛盾する。

(3) (1)と同様。

(4) U' を固定する。$Z=\{z\in G_{e-1}: \neg Tr^p(z,\xi'\cup\{(Y,U')\})\}$ とし，$z'=\forall Y \bigvee_{z\in Z} z \in G_e$ とおく。(4)を否定すると，各 U に対して，$Tr(z,\xi\cup\{(Y,U)\})$ となる $z\in Z$ が存在するので，$Tr(z',\xi)$。仮定から $Tr^p(z',\xi')$ となって，Z の定義と矛盾する。 ☒

<u>自己埋め込み定理 4.7.</u> $V=(M,S)$ を WKL_0 の可算超準モデルとし，$g\in M$ とする。このとき，g を含む M の接頭部 $I\,(\neq M)$ が存在し，V と $V\restriction I=(I,S\restriction I)$ の間には V_g の要素を移かさない同型写像 f がある。

(証明)　$q \in M$に対し，$M_q = \{a \in M : M \models a < q\}$, $S_q = \{X \cap M_q : X \in S\}$とおき，$V_q = (M_q, S_q)$と定義した。$V$においては，$M_q$も$S_q$も有限集合だから，それらの要素をすべて異なる変数に割当てるような評価関数ξ_0が考えられる。次に，超自然数$e \in M$を1つ選んで固定する．補題4.4から，ある$p \in M$が存在して，ξ_0で評価されるG_e式Zについて，$Tr(Z, \xi_0) \Leftrightarrow Tr^p(Z, \xi_0)$.

以下では，補題4.6を繰返し使って(back-and-forth argument)，2つの評価関数列$\xi_0 \subset \xi_1 \subset \cdots \subset \xi_k \subset \cdots$と$\xi_0' \subset \xi_1' \subset \cdots \subset \xi_k' \subset \cdots$, $k \in \omega$, を作り，各$k \in \omega$について$Ref^p_{e-k}(\xi_k, \xi_k')$で，かつ

$$\bigcup_k range(\xi_k) = V, \quad \bigcup_k range(\xi_k') = V \restriction I$$

となるようにする．この作業のため，$M = \{a_i : i \in \omega\}$, $S = \{U_i : i \in \omega\}$と書く。また，$\xi_0' = \xi_0$とする．

Case 1：$e - k = 4d + 1$. aを$range(\xi_k)$に含まれないMの最初の要素a_iとし，$a' < p$を補題4.6で与えられるものとする。そして，$\xi_{k+1} = \xi_k \cup \{(y, a)\}$, $\xi_{k+1}' = \xi_k' \cup \{(y, a')\}$とおく。

Case 2：$e - k = 4d + 2$. $\xi_k'(x)$の最大値を$\xi_k'(x_0)$とする．a'を$range(\xi_k')$に含まれず$a' < \xi_k'(x_0)$となるMの最初の要素a_iとし，aは補題4.6で与えられるものとして，$\xi_{k+1} = \xi_k \cup \{(y, a)\}$, $\xi_{k+1}' = \xi_k' \cup \{(y, a')\}$とおく。

Case 3：$e - k = 4d + 3$. $range(\xi_k)$に属する各集合とは$range(\xi_k)$に属する数のどれかによって異なる最初の$U_i \in S$をUとする．

補題4.6で与えられるU'を1つ選んで，$\xi_{k+1}=\xi_k\cup\{(Y,U)\}$，$\xi'_{k+1}=\xi'_k\cup\{(Y,U')\}$とおく．

Case 4：$e-k=4d+4$．U'は，range(ξ'_k)に属する各集合に対し，range(ξ'_k)に属するどれかの数において異なるような最初の$U_i\in S$である．そして，補題4.6のUに対し，$\xi_{k+1}=\xi_k\cup\{(Y,U)\}$，$\xi'_{k+1}=\xi'_k\cup\{(Y,U')\}$とおく．

上の構成から，各$k\in\omega$について，$\mathrm{Ref}^p_{e-k}(\xi_k,\xi'_k)$となるのは明らか。また，Case 1より$M\subseteq\bigcup_k$range$(\xi_k)$も明らか。次に，$S\subseteq\bigcup_k$range$(\xi_k)$を示そう。$U_i\notin\bigcup_k$range$(\xi_k)$が存在するとして，$U_i$をそのようなもので，index iが最小のものとする。いま、kを十分大きくとれば，各$j<i$について，U_iとU_jはrange(ξ_k)の数の上で異なり，かつ$U_j\in$ range(ξ_k)となる。このとき，range(ξ_k)の上でU_iと一致するようなU_l，$l>k$，がすでにrange(ξ_k)に属していることはありえない。なぜなら，U_lを選んだとき，それよりindexの小さなU_iが選べるはずであるから。従って，Case 3より$\xi_{k+1}=\xi_k\cup\{(Y,U_i)\}$，つまり$U_i\in\bigcup_k$range$(\xi_k)$となり矛盾。以上から，$\bigcup_k$range$(\xi_k)=V$である。

次に，$I=\{a'\in M: a'\in\bigcup_k$range$(\xi'_k)\}$とおくと，Case 2より$I$は$M$の接頭部になる。Case 4より$\bigcup_k$range$(\xi'_k)=V\lceil I$を示すのは，上のCase 3の場合と同様である．

最後に，Vと$V\lceil I$の間の同型写像fを定義する。その前に，

各kについて，ξ_k, ξ'_kが単射になることをみる。まず，$\xi_0 = \xi'_0$は単射である．Case 1では，最初に単射ξ_kを単射ξ_{k+1}に拡張し，単射ξ'_kに対しては$\mathrm{Ref}^p_{e-k-1}(\xi_{k+1}, \xi'_{k+1})$を満たす写像$\xi'_{k+1}$がとられた。このとき，$\xi_{k+1}$が単射であることは$G_0$式で表わせるので，その式は$\xi'_{k+1}$についても成立し，結局$\xi'_{k+1}$も単射になる．他のケースも同様にしていえ，$\xi_k$, ξ'_kはすべて単射である。従って，$\bigcup_k \xi_k$，$\bigcup_k \xi'_k$も単射となり，$f = (\bigcup_k \xi'_k) \circ (\bigcup_k \xi_k)^{-1}$はVから$V \restriction I$の上の全単射になっている。$f$が$V_g$上で恒等写像になっているのは明らか。すべての$k$について$\mathrm{Ref}^p_0(\xi_k, \xi'_k)$だから，$f$が同型写像になることも直ちにいえる。 ⊠

§5. PRAについて

PRAは，すべての原始帰納的関数(の定義)に対して関数記号を持ち，その定義式を公理として持つ．その他に，帰納法に関する公理または推論規則が付け加わり，それによりいくつかのバリエーションがある。§3ではΣ^0_0-indをもってしたが，量化詞なし(quantifier free, q.f.と略す)の式についてのinduction axiom或はruleを仮定しても証明能力は変わらない．Σ^0_0式はprim. rec. 関係を表わしているので，PRAで(q.f. ind. ruleに基づくものでも)原子式と同値になるからである。(厳密な証明はとても複雑である。(Girardの本(Proof Theory and Logical Complexity)のpp.67-8, p.81, pp.123-5などを参照) また，q.f. ind. axiomをq.f.式で表わすことも可能で，従ってPRAはq.f. axiomだけで定義できる．このことは，PRAのモデルのクラスがsubstructureに関して閉じていることからモデル論的にも証明できる。

<u>定理5.1.</u> $R(x,y)$をq.f.式として，$PRA \vdash \forall x \exists y R(x,y)$ならば，prim. rec. 関数$f$が存在して，$PRA \vdash \forall x R(x, f(x))$.

(証明) PRAはq.f. axiomだけで定義できるから，Herbrandの定理により，prim.rec.関数$f_1, \cdots, f_n$が存在して，

$$PRA \vdash R(x, f_1(x)) \vee R(x, f_2(x)) \vee \cdots \vee R(x, f_n(x)).$$

$F(x) = max\{f_1(x), \cdots, f_n(x)\}$とし，$f(x) = \mu y \leq F(x)\ R(x,y)$とおけば，

$$PRA \vdash \forall x R(x, f(x)).$$ ☒

定理5.1のPRAを$I\Sigma_1$に置き換えた命題はParsonの定理として知られる。Parsonの定理は，定理5.1とFriedmanの定理3.4から導けるが，Parsonの証明はFriedmanとは独立である。また，Friedmanの定理が，Parsonの定理とHarringtonの定理2.7から導けることも注目したい。

定理5.2. PRA $\vdash \Sigma^0_1$-ind. rule. すなわち，$\varphi(x)$をΣ^0_1式として，PRA $\vdash \varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1))$ ならば PRA $\vdash \forall x\, \varphi(x)$.

(証明) $R(x,y)$をq.f.式とし，PRA $\vdash \exists y R(0,y) \wedge \forall x(\exists y R(x,y) \to \exists y R(x+1,y))$と仮定する。$\forall x(\exists y R(x,y) \to \exists y R(x+1,y))$ならば$\forall x \forall y \exists y'(R(x,y) \to R(x+1,y'))$、定理5.1より，prim. rec. fがあって，

$$\mathrm{PRA} \vdash R(x,y) \to R(x+1, f(x,y)).$$

いま，PRA $\vdash R(0,a)$として，

$$\begin{cases} g(0) = a \\ g(x+1) = f(x, g(x)) \end{cases}$$

と定義すれば，

$$\mathrm{PRA} \vdash \forall x R(x, g(x)) \qquad \therefore\ \mathrm{PRA} \vdash \forall x \exists y R(x,y) \quad \boxtimes$$

定理5.3. PRA $\nvdash \Sigma^0_1$-ind.

(証明) 補題3.3の注のようにJを定義する。すなわち，non-standardな$c \in J$かつprim. rec. 関数で閉じた最小のcutである。$\{g_n\}$を命題3.1の証明で作ったprim. rec. 関数の列として，$B(x,y,z) \leftrightarrow g_x(y) \le z$

とおくと，$J \models \sim \exists y B(c, c, y)$。$J \models \Sigma^0_1$-ind とすれば，$J \models \sim \exists y B(a, c, y)$ となる最小の a があり，よって $J \models \exists y B(a-1, c, y)$，つまりある standard な n について $g_{a-1}(c) < g_n(c)$ となることを意味する。a は non-standard だから $a-1$ も non-standard となり，これはありえない。従って，$J \not\models \Sigma^0_1$-ind。故に，PRA $\nvdash \Sigma^0_1$-ind.

$\boxtimes$

注：Aczel 他編の Proof Theory (Cambridge Univ. Press, 1992) に載っている Wainer-Wallen の論文と Pohlers の論文に，Σ^0_1-ind. rule の Π^0_2-Skolem 関数が prim. rec. になることの証明がある。

§6. 補遺，訂正

1. 定義0.3の基本算術公理に“$0+1=1$”を加える。

2. §1のまとめのダイヤグラム(p138)に次の関係を加える。

$$WKL_0 \equiv \Sigma^0_1\text{-}SP_0 \equiv \Pi^0_1\text{-}AC_0 \equiv \Pi^0_1\text{-}DC_0$$

(証) $\Sigma^0_1\text{-}SP_0 \subseteq \Pi^0_1\text{-}AC_0 \subseteq \Pi^0_1\text{-}DC_0$ は，補題1.2と同様に証明できる。あとは，$WKL_0 \vdash (\Pi^0_1\text{-}DC)$ をいえばよい。$\varphi(x,X,Y)$ を任意の Π^0_1 式とし，$\forall x \forall X \exists Y \varphi(x,X,Y)$ を仮定する。$\exists Z \forall x<m\ \varphi(x,(Z)_x,(Z)_{x+1})$ が任意の m について成立することを帰納法で示す。WKL_0 でこの式は Π^0_1 式と同値になることがいえるので，必要な帰納法は Π^0_1-ind であり，WKL_0 で証明が遂行できる。最後にコンパクト性を用いて，$\exists Z \forall x\ \varphi(x,(Z)_x,(Z)_{x+1})$ がいえるので，$WKL_0 \vdash (\Pi^0_1\text{-}DC)$ となる。 $\boxtimes$

3. §3の前書き(p.147)で，上から10行目の“Σ^0_1 ind”は“Σ^0_1 ind. rule”に直す。下から3行目の(　)の中に，“1977”を入れる。