数理解析研究所講究録
第847巻 1993年 78-93

切断除去による計算可能性の証明

東北大学大学院理学研究科　竹内　泉 (Takeuti, Izumi)

序

二階論理で、ε_0 までの帰納法でその無矛盾性が証明される体系が知られている。［参考文献２］

本章ではその方法を二階型付 λ 計算に適用し、二階型付 λ 計算のある範疇に属する項は ε_0 までの帰納法でその計算可能性が証明されることを示す。

尚、ε_0 より小さい順序数の間の演算「＋」は自然和を表す。

1　二階型付 λ 計算と単層量化

1.1　二階型付 λ 計算

二階型付 λ 計算はジラールによって体系Ｆとして導入された。［参考文献１］

型と項は以下のように構成される。

- 原子型は十分多くある。
- 原子型は型。
- ＴとＵが型ならばＴ→Ｕも型。
- Ｔが型でｔが原子型ならば Πt.Ｔ も型。
- 変数名は十分多くある。
- 変数名ｘに型Ｔを乗せた x^T は変数であり、かつまた項である。右肩の型Ｔは省略して書く。

- 変数 x の型が T で、項 X の型が U であり、X の中に x 以外に変数名が x と同じ変数が自由に現れていないならば、λx.X は型 T → U の項である。
- 項 X の型が T → U、項 Y の型が T ならば、XY は型 U の項である。
- 項 X の型は T で、その自由変数の型に原子型 t が自由に現れないならば、Λt.X は型 Πt.T の項である。
- 項 X の型が Πt.T で、U が型ならば、XU は型 T[U/t] の項である。

計算規則は以下の通り。

α 変換	$\lambda x.X \rhd \lambda y.X[y/x]$	$\Lambda t.X \rhd \Lambda u.X[u/t]$
β 変換	$(\lambda x.X)Y \rhd X[y/x]$	$(\Lambda t.X)T \rhd X[T/t]$

α 同値なものは同一視する。

項 X が計算可能であるとは、X がある正規な項 Y と β 同値であることをいう。

合流性の許では、計算可能性から弱正規化可能性が得られる。

1.2 単層量化

型と項に対し、単層量化という概念を定義する。

1.2.1 型の単層量化

- t が原始型ならば、t は単層量化
- 型 T の中に Π が一つも無ければ、Πt.T は単層量化
- T、U が単層量化な型ならば、T → U は単層量化

1.2.2 項の単層量化

- 変数 x の型が単層量化ならば、 x は単層量化
- 変数 x と項 X が単層量化ならば、 λx.X は単層量化
- 項 X と Y が単層量化ならば、 XY は単層量化
- 単層量化な項 X の型の中に Π が一つも無ければ、 Λt.X は単層量化
- 項 X と型 T が単層量化ならば、 XT は単層量化

単層量化な項の部分項、及びその型は全て単層量化である。単層量化な項の範疇は β 変換で閉じていない。

1.3 階級

1.3.1

型に対し、階級 rank( ) を定義する。

t が原子型ならば、 rank(t) := 0

rank(T → U) := max(rank(T)+1 , rank(U))

rank(Πt.T) := rank(T)+1

1.3.2

可約基及び型適用基に対し、階級 rank( ) を定義する。

可約基 (λx.X)Y の階級は、 λx.X ∈ T である時、

rank((λx.X)Y) := (rank(T)

可約基 (Λt.X)T の階級は、型適用基の階級に順う。

型適用基 XT の階級は、 X ∈ U、 XT ∈ V である時、

rank(XT) := rank(U → V)

1.4 定理

単層量化な項の計算可能性が ε_0 までの帰納法で証明される。

可約基と型適用基の階級の最高が r である時は ω_{r+1} までの帰納法で証明される。

証明

以下に示す補題１、２、及び命題 (2.3.2) より証明される。

2 列計算式構成図

2.1 列計算式構成図

型付 λ 項の構成は、普通は先に示したような自然演繹法式の構成法に依って行なわれるが、ここでは項に対して列計算式の構成法を導入する。

2.1.1

二階型付 λ 計算の項の列計算式構成図を、以下に定義する。

式とは、$\Gamma \vdash$ X : T という形をしたものをいう。但しここで、X は項、T は型である。また、Γ は、x : T という形をした節の集合で、x は変数、T は型であり、同じ変数は一個の節にしか現れない。

構成図は、式に対する以下の始式と推論規則から生成される。

始式　　x : T $\vdash$ x : T

推論規則

→右

$$\frac{(x : A,)\ \Gamma \vdash X : B}{\Gamma \vdash \lambda x.X : A \to B}$$

→左
$$\frac{\Delta \vdash Y : A \qquad y : B\ ,\ \Gamma \vdash yX_1 \cdots X_n : C}{x : A \to B\ ,\ \Gamma\ ,\ \Delta \vdash xYX_1 \cdots X_n : C}$$
$X_1 \cdots X_n$ の中に y は自由に現れていない。

Π右
$$\frac{\Gamma \vdash X : A}{\Gamma \vdash \Lambda t.X : \Pi t.A}$$
Γの中に t は自由に現れていない。

Π左
$$\frac{y : A[T/t]\ ,\ \Gamma \vdash yX_1 \cdots X_n : B}{x : \Pi t.A\ ,\ \Gamma \vdash xTX_1 \cdots X_n : B}$$
$X_1 \cdots X_n$ の中に y は自由に現れていない。

切断
$$\frac{\Delta \vdash Y : A \qquad (\ x : A\ ,\ )\ \Gamma \vdash X_0 \cdots X_n : B}{\Gamma\ ,\ \Delta \vdash (\lambda x.X_0)YX_1 \cdots X_n : B}$$
$X_1 \cdots X_n$ の中に x は自由に現れていない。

Π切断
$$\frac{\Delta \vdash \Lambda t.Y : \Pi t.A \qquad x : \Pi t.A\ ,\ \Gamma \vdash xTX_1 \cdots X_n : B}{\Gamma\ ,\ \Delta \vdash (\Lambda t.Y)TX_1 \cdots X_n : B}$$

$X_1 \cdots X_n$ の中に x は自由に現れていない。

左辺にある括弧は、それがあってもなくてもよいことを表す。

2.1.2

列計算式構成図による項の構成は、先に挙げた自然演繹法式の構成と等価である。則ち、任意の二階型付 λ 項 X に対し、その型が T ならば、あるΓがあって、Γ ⊢X:T を終式に持つ列計算式構成図がある。またそれは変数の置き換えを無視すれは唯一つ定まる。

列計算式構成図では、その中に現れる型は皆、終式の右辺にある項の部分項

の型である。また、現れる項の部分項の型は全て、終式の項のある部分項の型である。単層量化な項の構成図には単層量化な項しか現れない。

可約基は切断・Π切断の推論で作られる。構成図中に切断・Π切断の推論が無ければ、終式の右辺の項は正規である。

この性質に依り、証明図の切断除去の方法を適用し、正規形を得ることを考える。

2.2 度数

2.2.1

構成図の中の型の出現に対し、度数 deg( ) を定義する。この定義は、構成図の梢の方から行なう。

- 始式にある型の度数は、その型の階級に等しい。
- 導入推論の下式にあって、導入に与っていない型の度数は、上式にある祖先の型の度数の最大のものとする。
- →導入推論の下式にあって、導入に与っている型 T → U の度数 d は、上式にあって導入に与っている型 T、U の度数を d′、d″ と書く時、

$$d := \max\{\ d'+1\ ,\ d''\ \}$$

但し、上式に T、U の他に導入に与っていない祖先 T → U が一ヶまたは二ヶある場合には、その T → U の度数の最大のものを d‴ と書く時、

$$d := \max\{\ d'+1\ ,\ d''\ ,\ d'''\ \}$$

- Π導入推論の下式にあって、導入に与っている型 Πt.T の度数 d は、上式にあって導入に与っている型 T、または T^{θ} の度数を d′ と書く時、

$$d := d'+1$$

但し、上式に他の祖先がある場合には、その Πt.T の度数の最大を d″ と書く時、

$$d := \max\{ d'+1 , d'' \}$$

- 切断・Π切断の下式にある型の度数は、上式にある祖先の型の度数の最大のものとする。

2.2.2

構成図の中の切断・Π切断 **I** に対して、その度数 deg(**I**) とは、そこで切られる型の度数のうち、大きい方である。

2.3 順序数

2.3.1

構成図に対して、順序数 ord( ) を定義する。

まず、構成図 F を固定し、F の部分構成図 F′ の順序数 ord( ) を定める。

- 始式のみの図の順序数は 1
- 導入規則で終わっている図では、

上式が一ヶの場合は、$\mathrm{ord}\left(\dfrac{P}{s} \right) := \mathrm{ord}(P)+1$

上式が二ヶの場合は、$\mathrm{ord}\left(\dfrac{P\ Q}{s} \right) := \mathrm{ord}(P)+\mathrm{ord}(Q)$

- 切断、Π切断で終わっている図では、その下式の高さを h、上式の高さを h′ として

$$\mathrm{ord}\left(\frac{P\ Q}{s} \right) := \omega_{h'-h}(\mathrm{ord}(P)+\mathrm{ord}(Q)+\omega)$$

構成図の順序数は、それ全体を部分構成図と見た時の順序数とする。

2.3.2 命題

構成図 P の中の切断・Π切断の度数の最大を d とすると

$$\mathrm{ord}(\ P\ ) < \omega_{d+1}(2)$$

3 補題

3.1 補題1

項 X に可約基があって、可約基と型適用基の階級の最大が r ならば、ある項 X' があって、X と X' は β 同値であり、項 X' を構成する構成図の順序数は $\omega_r(2)$ 未満である。

3.2 補題2

任意の項 X に正規形があることが、構成図の順序数に関する帰納法により証明される。

4 補題1の証明

項 X の部分項の中で、型適用基 MT であって M が変数でないもの全てに対し、それを $(\lambda x.xT)M$ で置き換える。

$$\mathrm{rank}(\ MT\ ) = \mathrm{rank}(\ xT\ ) = \mathrm{rank}(\ (\lambda x.xT)M\ )$$

であるから、可約基・型適用基の階級の最大は変わらない。

こうして得られた項 X' の構成図では、Π 左導入は切断の直上でのみ行なわれる。その際、下式で導入に与っている型は、その直下の切断で切られている。

また、Π 左導入の下式で Π 導入に与っている型以外の型の度数は、その型の階級に等しい。また更に、Π 左導入の直下の切断の度数は、その Π 左導入によって作られた型適用基の階級未満である。

よって構成図全体の高さは、可約基・型適用基の階級の最大を越えない。

5　補題２の証明

終式がβ同値であって順序数が小さい構成図に還元していく操作を定義する。

5.1

まず、全てのΠ切断を切断に置き換える。

その結果、構成図の順序数は変らない。可約基は次のような還元を受ける。

$$(\Lambda t.X)T \quad \rhd \quad (\lambda x.xT)\Lambda t.X$$

構成図の途中でΠ切断によって作られた可約基は、それに対応する可約基が終式の項にもある。その可約基も、同じ還元を受ける。

以下の還元に於いて新たにΠ切断が生じることはないので、この章では以降、構成図にΠ切断は現れない。

項に於ける変数の陽な出現とは、『λx. …』のようにλの直後に現れているもの以外の出現のことをいう。

終式の項に陽に出現している変数のうち最左なものをxとし、その変数xを導入している規則を**I**とする。

Iは→左またはΠ左の推論であり、**I**の下には→左・Π左はない。また、**I**は切断の左の上式の先祖となっていることはない。

以下に、**I**の状況に依って場合分けをする。

5.2

Iの下に切断があり、**I**と切断の間に→右・Π右がある場合には、そういう→右・Π右の中で一番下にあるものを、一番下の切断の直下に置く。変数名の衝突を避ける必要があるならば、変数名を換える。終式の項は

$$C[\ D[\lambda y.X]\ ] \quad \rhd \quad C[\ \lambda y.D[X]\ ]$$

$$C[\ D[\Lambda t.X]\ ] \quad \triangleright \quad C[\ \Lambda t.D[X]\ ]$$

という還元を受ける。移された→右・Π右の高さは0になり、構成図の順序数は小さくなる。

5.3

上の状況が成り立たない場合で、**I** の下で左辺の x が切断に依って切られていない場合。

終式の項は $C[\ D[xX_1 \cdots X_n]\ ]$ という形をしている。 D[ ] は **I** の下の切断で構成された部分であり、 C[ ] はその下の→右・Π右で構成された部分である。D[ ] では x は束縛されない。

ここでもし **I** の下に一ヶ以上切断があれば、**I** を一番下の切断の下に置く。終式の項は

$$C[\ D[xX_1 \cdots X_n]\ ] \quad \triangleright \quad C[\ xD[X_1] \cdots D[X_n]\ ]$$

という還元を受ける。 $D[X_1] \cdots D[X_n]$ を構成する構成図の順序数は元の構成図の順序数より小さい。

この $D[X_1]$、…、$D[X_n]$ の正規形 $\overline{D[X_1]}$、…、$\overline{D[X_n]}$ が得られれば、$C[\ x\ \overline{D[X_1]} \cdots \overline{D[X_n]}\ ]$ は元の項の正規形である。

$n = 0$ の場合、則ち **I** が始式ならば、終式の項は直ちに正規形 C[x] に β 変換される。

5.4

上の状況が成り立たない場合では、**I** の下に左辺の x が切られている切断がある。その切断を **J** とし、P、Q を

$$\frac{Q \quad P}{s}\ \mathbf{J}$$

となっているような部分構成図とする。Q の構成図としての順序数は、元の構成図の順序数より小さい。

もし Q の中に切断があれば、Q から切断を除去する。

5.5

上の状況は全て成り立たない場合は、次の条件が成り立っている。

I の下に切断

$$\frac{Q \quad P}{s}\,\mathbf{J}$$

があり、**I** によって導入された左辺の x は **J** で切られていて、Q には切断がない。

J の上式の高さを h とする。**J** の下にあって高さが h より低い式の中で一番上にあるものに注目し、その式の高さを h′ とする。

x の型の最外の型構成子、及び P と Q の状況によって場合分けをする。

5.5.1

x の型が Πt.T という形の場合、構成図はこのようになっている。

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}Q\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ \Delta \vdash T\end{matrix}}{\Delta \vdash \Pi t.T} \qquad \begin{matrix}P\\ \vdots\\ \dfrac{T^{\theta},\ (\ \Pi t.T\ ,\ )\ \Gamma'' \vdash A}{\Pi t.T\ ,\ \Gamma'' \vdash A}\,\mathbf{I}\\ \vdots\\ \Pi t.T\ ,\ \Gamma \vdash A\end{matrix}}{\Gamma\ ,\ \Delta \vdash A}\,\mathbf{J} \qquad \text{高さ } h$$

$$\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma' \vdash A \qquad\qquad \text{高さ } h'(< h)\\ \vdots\end{matrix}$$

もしQの一番下の推論がΠ右でなければ、Qは始式でΠt.Tを導入しているので、その上にPを乗せる。

図のように、Qの一番下の推論がΠ右ならば、以下のような還元を施す。

Pから推論Iを取り除き、それをP′とする。

Qは切断のない構成図だったので、Qの中には $\Delta \vdash \Pi t.T$ の部分型しか現れていない。そこで、Qから一番下の推論を取り除き、変数tへの代入 θ を施す。

そうして、構成図全体を以下の図に還元する。

$$
\dfrac{
\begin{array}{c} Q^{\theta} \\ \vdots \\ \Delta \vdash T^{\theta} \\ \vdots \\ \Gamma' \vdash T^{\theta} \end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\dfrac{
\dfrac{\begin{array}{c} Q \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta \vdash T \end{array}}{\Delta \vdash \Pi t.T}
\quad
\begin{array}{c} P' \\ \vdots \\ T^{\theta}, (\, \Pi t.T\, ,)\ \Gamma'' \vdash A \\ \vdots \\ T^{\theta}, (\, \Pi t.T\, ,)\ \Gamma \vdash A \end{array}
}{T^{\theta}, \Gamma, \Delta \vdash A} \\ \vdots \\ T^{\theta}, \Gamma' \vdash A' \end{array}
\quad < h
}{\Gamma' \vdash A \qquad h'}
\\
\vdots
$$

Q^{θ} から得られる T^{θ} の度数はrank(T^{θ})に等しく、それはPから得られたΠt.Tの度数よりも小さい。よって、T^{θ} を切る切断の高さはhよりも低くなり、構成図の順序数は小さくなる。

5.5.2

x の型が $A_1 \to \cdots A_j \to B$ という形の場合、構成図はこのようになっている。

$$
\dfrac{\begin{matrix} Q \\ \vdots \\ \Delta \vdash A_1 \to \cdots A_j \to B \end{matrix} \qquad \begin{matrix} P \\ \vdots \\ A_1 \to \cdots A_j \to B\,,\ \Gamma \vdash C \end{matrix}}{\Gamma\,,\ \Delta \vdash C}\ \mathbf{J} \qquad \text{高さ } h
$$

$$
\begin{matrix} \vdots \\ \Gamma' \vdash C \\ \vdots \end{matrix} \qquad \text{高さ } h'(< h)
$$

もし Q の一番下の推論が→右でなければ、 Q は始式で $A_1 \to \cdots B$ を導入しているので、その上に P を乗せる。

各列の高さが増すことはなく、推論か減るので、全体としても順序数は小さくなる。

5.5.3

Q の一番下の推論が→右であり、 P の一番右の始式が

$$A_{i+1} \to \cdots A_j \to B \vdash A_{i+1} \to \cdots A_j \to B$$

の場合、 P と Q はこのようになっている。

P

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\begin{array}{c}P_1\\ \vdots\\ \sim\ \vdash A_1\end{array}\qquad\begin{array}{c}\ddots\ \dfrac{\begin{array}{c}P_i\\ \vdots\\ \sim\ \vdash A_i\end{array}\qquad A_{i+1}\to\cdots A_j\to B\vdash A_{i+1}\to\cdots A_j\to B}{A_i\to\cdots A_j\to B\ ,\ \sim\ \vdash A_{i+1}\to\cdots A_j\to B}\\ \vdots\\ A_2\to\cdots A_j\to B\ ,\ \sim\ \vdash A_{i+1}\to\cdots A_j\to B\end{array}}{A_1\to\cdots A_j\to B\ ,\ \sim\ \vdash A_{i+1}\to\cdots A_j\to B}\ \mathbf{I}\\
\vdots\\
A_1\to\cdots A_j\to B\ ,\ \Gamma\vdash A_{i+1}\to\cdots A_j\to B
\end{array}
$$

Q

$$
\begin{array}{c}
Q'\\
\vdots\\
\dfrac{A_1\ ,\ \cdots\ ,\ A_i\ ,\ \Delta\vdash A_{i+1}\to\cdots A_j\to B}{A_1\ ,\ \cdots\ ,\ A_{i-1}\ ,\ \Delta\vdash A_i\to\cdots A_j\to B}\\
\vdots\\
\Delta\vdash A_1\to\cdots A_j\to B
\end{array}
$$

この場合、前の図に於ける C は $A_{i+1}\to\cdots A_j\to B$ である。

Q を下から辿ると、→右が続いている。$A_1\cdots A_i\ ,\ \Delta\vdash A_{i+1}\to\cdots A_j\to B$ より上の部分を Q' とする。

構成図全体を、次の構成図に還元する。

$$
\dfrac{\begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ \sim\ \vdash A_1 \\ \vdots \\ \Gamma' \vdash A_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c} P_i \\ \vdots \\ \sim\ \vdash A_i \\ \vdots \\ \Gamma' \vdash A_i \end{array} \qquad \begin{array}{c} Q' \\ \vdots \\ A_1\ ,\ \cdots\ ,\ A_i\ ,\ \Delta \vdash C \\ \vdots \\ A_1\ ,\ \cdots\ ,\ A_i\ ,\ \Gamma' \vdash C \end{array} \quad < h}{A_1\ ,\ \cdots\ ,\ A_{i-1}\ ,\ \Gamma' \vdash C} \\ \vdots \\ A_1\ ,\ \Gamma' \vdash C \quad < h \end{array}}{\begin{array}{c} \Gamma' \vdash C \quad h' \\ \vdots \end{array}}
$$

新しく作られた切断の度数は、皆 h よりも小さいので、構成図全体の順序数は小さくなっている。

Q を下から辿った時に、→右が i ヶよりも少なく k ヶしか続いていなかった場合には、Q の一番右の始式は $A_{k+1} \to \cdots B \vdash A_{k+1} \to \cdots B$ である。この上に P の $A_{k+1} \to \cdots B\ ,\ \sim\ \vdash C$ から上の部分を重ねる。それ以外の部分は同様にする。

5.5.4

Q の一番下の推論が→右であり、P がこのようになっている場合。

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ \sim\ \vdash A_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c} P_j \\ \vdots \\ \sim\ \vdash A_j \end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} \vdots \\ T^{\theta}\ ,\ \sim\ \vdash C \end{array}}{\Pi t.T\ ,\ \sim\ \vdash C}}{A_j \to \Pi t.T\ ,\ \sim\ \vdash C} \\ \vdots \\ A_2 \to \cdots A_j \to \Pi t.T\ ,\ \sim\ \vdash C \end{array}}{A_2 \to \cdots A_j \to \Pi t.T\ ,\ \sim\ \vdash C} \ \mathbf{I} \\
\vdots \\
A_1 \to \cdots A_j \to \Pi t.T\ ,\ \Gamma \vdash C
\end{array}
$$

上に挙げたΠと→の方法を組み合わせて構成図を作る。

結論

切断除去の方法に依り、単層量化な項の計算可能性が、ε_0 までの帰納法で証明された。

原始帰納的函数類の計算可能性が ε_0 までの帰納法で証明されることは既に知られていた。［参考文献３・４］単層量化な項は ω 同値性を保存して、原始帰納的函数類を模倣できる。

本章の結果は、原始帰納的函数類の計算可能性の証明を単層量化な項へ自然に拡張したものとなっている。

参考文献

[1] ジラール (Girard, J.-Y.) 他 : Proofs and Types, 1989

[2] 竹内外史 (Takeuti, G.) : On the fundamental conjecture of GLC I, *J. Math. Soc. Japan 7.* 1955

[3] 花谷圭人 (Hanatani, Y.) : Calculabitité des Founctionelles Récursives Primitives de Type Fini sur les Nombres Naturels, *Ann. Jap. Assoc. Philos. Sci.* 1966

[4] 日向茂 (Hinata, S.) : Calculability of primitive recursive functionals of finite type, *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku (A) 9.* 1967