数理解析研究所講究録
847巻 1993年 35-55

Subrecursion theoryにおけるdilationについて

熊本大・工　角田法也 (Noriya Kadota)

§0. 紹介

本論文の目的は、GirardのΠ^1_2-logicで導入されたdilationを有効に用いた次の2点の応用を考察することである。但し、ここで"dilation"はΠ^1_2-logicでのいくつかの概念(denotation systems, dilators, homogeneous trees)の総称として使う。

(1) Slow-growing function G_αとFast-growing function F_αの増加率が等しいordinal α (subrecursive inaccessibleと呼ばれる)の構成。(Wainer[21], Kadota[11])

(2) Novikov-Kondô-Addison Π^1_1-uniformization theoremの証明。(Ressayre[17])

Π^1_2-logicでのdilationはもともと証明論におけるID-theoriesの解析のために導入された(Girard[4][5])が、同時にRecursion theory (Ressayre[17], Girard-Normann[6][7], Girard-Ressayre[8], van de Wiele[18]), Subrecursive hierarchies (Dennis-Jones-Wainer[3], Jervell[10], Wainer[21][22], Kadota[11])等へ応用も見出されている。さらにboundedness theorem (Buchholz[2], Kechris[12], Kechris-Woodin[13], Ressayre[16])、証明論的

ordinalとの関連(Abrusci[1], Päppinghaus[14][15], Vauzeille[19][20])が研究されている。これらはΠ^1_2-logicの性質上、技術的な面も含め、証明論と密接に関連している。

本論文の構成は次のとおり。 §1ではdilationの概念を考察：denotation systemとdilatorは同等なもので、homogeneous treeからあるdenotation systemを作れることを見る。 §2では(1)に関し、countable ordinalを有限部分のdirect limitで表わすことを考察した上で、subrecursive inaccessibleの作り方を述べる。 §3では、(2)に関し、homogeneous treesを用いたΠ^1_1-Unif. th.の証明を述べる。

§1. Denotation systems, dilators, homogeneous trees.

本節では、Girard-Normann[6]に従って、denotation systemsの例から始めて、dilatorsを定義し、それらの同等性を見る。そしてhomogeneous treesを導入する。

Denotation systemsはordinalのCantor normal formの一般化である。以下、2つの例を上げてから定義する：

Onをordinals全体の族とする。

例 1.1 $F(x) = x^2$, $x \in On$とする. $x \in On$に対し、任意$y < F(x)$は、

$$y = x \cdot u_1 + u_2 \quad \text{但し、} u_1, u_2 < x$$

と一意的に表わせる。この表現は係数 u_1, u_2 の順序に従って次の3種に別けられる。

(i) $y = x \cdot x_0 + x_1 \quad (x_0 < x_1 < x)$

(ii) $y = x \cdot x_1 + x_0 \quad (x_0 < x_1 < x)$

(iii) $y = x \cdot x_0 + x_0 \quad (x_0 < x)$

この状況を denotation system で、それぞれ以下の様に表わす：

$$(1;\ x_0, x_1;\ x) = x \cdot x_0 + x_1$$

$$(2;\ x_0, x_1;\ x) = x \cdot x_1 + x_0$$

$$(0;\ x_0;\ x) = x \cdot x_0 + x_0$$

ここで、左端の 1, 2, 0 は codes であって、この例では標準的 prototype $(x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x = 2)$ をとっている：(i) $x \cdot x_0 + x_1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$; (ii) $x \cdot x_1 + x_0 = 2 \cdot 1 + 0 = 2$; (iii) $x \cdot x_0 + x_0 = 2 \cdot 0 + 0 = 0$

例 1.2 $F(x) = (1+x)^x$, $x \in On$ とする。$x \in On$ $y < F(x)$ に対し、$u_1 > \cdots > u_{k-1}$; $v_1, \cdots, v_{k-1} < x$ が一意的に存在して、

$$y = (1+x)^{u_1}(1+v_1) + \cdots + (1+x)^{u_{k-1}}(1+v_{k-1})$$

と表現される。この表現は例1同様、denotation system で次の様に表わされる。
$\{u_1, \cdots, u_{k-1}, v_1, \cdots, v_{k-1}\} = \{x_0 < \cdots < x_{n-1}\}$ のとき、

$$y = (c;\ x_0, \cdots, x_{n-1};\ x)$$

ここで、c は標準的prototype、例えば、$x = \omega$; $y = \omega^{17} \cdot (1+17) + \omega^1 \cdot (1+16) + \omega^0 \cdot (1+12)$

のとき、$y = (c;\ 0, 1, 12, 16, 17;\ \omega)$,

$$c = (1+5)^4 \cdot (1+4) + (1+5)^1 \cdot (1+3) + (1+5)^0 \cdot (1+2) = 6507.$$

定義 1.3　$F: On \to On$ とする。Fに対する denotation system D は、$\{(c;x_0,\cdots,x_{n-1};x) \mid c \in On,\ x_0<\cdots<x_{n-1}<x \in On\}$ のある部分集合 $\mathcal{D}$ (denotations の集合) から On への関数で次を満たすもの。

(i) 各 x に対し、$y<F(x)$ は unique denotation をもつ.

$$y = D((c;x_0,\cdots,x_{n-1};x)).$$

(ii) $(c;x_0,\cdots,x_{n-1};x) \in \mathcal{D},\ y_0<\cdots<y_{n-1}<y \Rightarrow (c;y_0,\cdots,y_{n-1};y) \in \mathcal{D}$.

(iii) $D((c_1;x_0,\cdots,x_{n-1};x)) < D((c_2;x_0',\cdots,x_{m-1}';x))$,

$y_0<\cdots<y_{n-1}<y,\ y_0'<\cdots<y_{m-1}'<y;\quad x_i \le x_j' \Leftrightarrow y_i \le y_j',\ x_i \ge x_j' \Leftrightarrow y_i \ge y_j'$

for $i<n,\ j<m \Rightarrow D((c;y_0,\cdots,y_{n-1};y)) \le D((c_2;y_0',\cdots,y_{n-1}';y))$.

命題 1.4　任意の denotation system は自然数への制限により一意的に定まる。

(証明)　D を $F: On \to On$ に対する denotation sys. とし、$x \in On$ とする。

$$D_x = \{(c;x_0,\cdots,x_{n-1};x) : x_0<\cdots<x_{n-1}<x,\ (c,0,\cdots,n-1;n) \in \mathcal{D}\}$$

とおく。D_x に次の order を入れる. $y_1=(c_1;x_0,\cdots,x_{n-1};x)$, $y_2=(c_2;x_0',\cdots,x_{n-1}';x)$ $\in D_x$ に対し、$\{z_0<\cdots<z_{k-1}\} = \{x_0,\cdots,x_{n-1}\} \cup \{x_0',\cdots,x_{m-1}'\}$ のとき $x_i = z_{\sigma(i)}\ (i<n)$, $x_j' = z_{\tau(j)}\ (j<m)$ で σ, τ を定めて、

$$\begin{aligned} y_1 \le_{D_x} y_2 \quad \Leftrightarrow \quad & D((c_1;\sigma(0),\cdots,\sigma(n-1);k)) \\ & \le D((c_2;\tau(0),\cdots,\tau(m-1);k)) \end{aligned}$$

とおく. 定義 1.3(iii) は order $\le_{D_x}$ は Dでの order と一致していることを表わしている。$\le_{D_x}$ は x と $D\restriction\omega$ により定まるので証る。　□

注意1.5　$\forall n<\omega$ に対し、$F(n)<\omega$ となっているsystemを weekly finite という。このとき、$F\restriction\omega$ が recursive, prim. rec., --- である時、systemをそれぞれ recursive, prim. rec., --- という。

次に、dilators を定義し、その性質を見る。

定義1.6 ・$(x_i, f_{ij})_{i<j<\omega}$ が direct system とは次のときをいう:

(i) $x_i \in On$; (ii) $f_{ij} : x_i \longrightarrow x_j$ (strictly increasing)

(iii) ($i<j<k$ に対し,) $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$

・$(x, f_i)_{i<\omega}$ が direct system $(x_i, f_{ij})_{i<j<\omega}$ の direct limit:

$$(x, f_i)_{i<\omega} = \varinjlim (x_i, f_{ij})$$

とは次をみたすときをいう:

(i) $x \in On$; (ii) $f_i : x_i \rightarrow x$ s.t. $f_i = f_j \circ f_{ij}$;

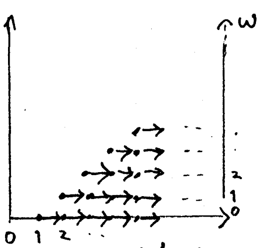
(iii) $(y, g_i)_{i<\omega}$ を (i)(ii)をみたすものとすると、$\exists ! h : x \rightarrow y$ str. inc.

$$g_i = h \circ f_i \quad (\forall i<\omega)$$

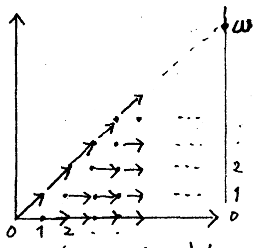
例1.7　$(\omega, id_n)_{n<\omega} = \varinjlim (n, id_{nm})$　但し, $id_n(x)=x$, $id_{nm}(x)=x$

$(\omega+1, id_n+1)_{n<\omega} = \varinjlim (n+1, id_{nm}+1)$ 但し, $id_n+1(x)=\begin{cases} x & (x<n) \\ \omega & (x=n) \end{cases}$ $id_{nm}+1(x)=\begin{cases} x & (x<n) \\ m & (x=n) \end{cases}$

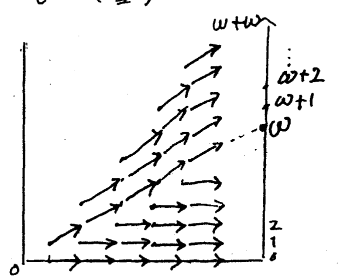
$(\omega+\omega, id_n+id_n)_{n<\omega} = \varinjlim (n+n, id_{nm}+id_{nm})$ 但し, $id_n+id_n=\begin{cases} x & (x<n) \\ \omega+x & (n\leq x) \end{cases}$ $id_{nm}+id_{nm}(x)=\begin{cases} x & (x<n) \\ m-n+x & (n\leq x) \end{cases}$



(ω, id_n)



$(\omega+1, id_n+1)$



$(\omega+\omega, id_n+id_n)$

注意 1.8　On に関しては、任意の direct system は direct limit をもつ (Girard [4, Th. 1.4.1])．逆に countable $\alpha \in On$ は direct system の direct limit である（一意的ではない）．このことは §2 で考察される。

ON を ordinals の category とする（objects は ordinals; morphisms は strictly increasing functions）。$\alpha, \beta \in On$ に対し、

$I(\alpha, \beta) = \{f : \alpha \to \beta \text{ (strictly increasing)}\}$ とする。

このとき、denotation systems に関する命題 1.4 の direct limit 版である次の命題が成り立つ。（証明は Girard [4, Cor. 2.1.8, Cor. 2.2.5].）

命題 1.9　$F, G : ON \to ON$ とするとき、次が成り立つ．

(i) F が direct limits と commute する

$\Leftrightarrow$ F が $\varinjlim(x_i, f_{ij})$, $x_i < \omega$ の形の direct limit と commute する

$\Leftrightarrow$ $\forall x \in On, \forall z < F(x), \exists k < \omega, \exists f \in I(k, x)$ s.t. $z \in rg(F(f))$.

（rg は range のこと.）

(ii) F, G が direct limits と commute するとき、

$$F = G \Leftrightarrow F\restriction_{ON<\omega} = G\restriction_{ON<\omega}.$$

(iii) F が direct limits と commute し、$F\restriction_{ON<\omega}$ が pull-backs と commute するとき、F は pull-backs と commute する。

定義 1.10　Direct limits, pull-backs と commute する functor を dilator という.

この dilators は denotation systems と同等であることを見る。

① <u>Denotation system D は dilator $F: ON \to ON$ を induce する:</u>

$F(x) \overset{def}{=} \{z = D(c; x_0, \cdots, x_{n-1}; x)\}$, $f \in I(x, y)$ に対し、

$F(f)(D(c; x_0, \cdots, x_{n-1}; x)) \overset{def}{=} D(c; f(x_0), \cdots, f(x_{n-1}); y)$ とする。

✻ Direct limits と commute すること: (命題 1.9(i) の形で示す。)

$z = D(c; x_0, \cdots, x_{k-1}; x)$ としたとき、$z_0 = D(c; 0, \cdots, k-1; k)$ とおく。$f \in I(k, x)$ を $f(0) = x_0, \cdots, f(k-1) = x_{k-1}$ で定義したとき、明らかに $F(f)(z_0) = z$.

✻ pull-backs と commute すること:

今、$D(c; y_0, \cdots, y_{n-1}; y) \in rg(F(f)) \Leftrightarrow y_0, \cdots, y_{n-1} \in rg(f)$ がなり立つ。なぜなら、$f \in I(x, y)$ に対して、$F(f)(c; x_0, \cdots, x_{n-1}; x) = D(c; f(x_0), \cdots, f(x_{n-1}); y)$ であるから。このことより、$D(c; y_0, \cdots, y_{n-1}; y) \in rg(F(f)) \cap rg(F(g))$ $\Leftrightarrow y_0, \cdots, y_{n-1} \in rg(f) \cap rg(g)$ $(= rg(f \& g)) \Leftrightarrow D(c; y_0, \cdots, y_{n-1}; y)$ $\in rg(F(f \& g))$.

② <u>Dilator $F: ON \to ON$ は denotation system D を induce する:</u>

命題 1.9 (i) より、$\forall x \in On$, $\forall z < F(x)$, $\exists n < \omega$, $\exists f \in I(n, x)$, $z \in rg(F(f))$. n を、これを満たす最小とすると、f は unique に定まる。(なぜなら $z \in rg(F(g)) \Rightarrow z \in rg(F(f)) \cap rg(F(g)) = rg(F(f \& g))$ ($\overset{\text{comm.}}{\text{pull-backs}}$) であるので、$f \neq g$ とすると $f \& g \in I(m, x)$, $m < n$、(n の min. に) 矛盾。)

$z = D(z_0; f(0), \cdots, f(n-1); x)$、但し、$z_0$ は $F(f)(z_0) = z$ で定めると denotation system (i)(ii) [容易] (iii) [Girard[4, Prop 2.3.17]]

をみたす。

注意 1.11. Direct limits とのcommutationはdenotationの存在に、pull-backsとのcommutationはdenotationの一意性に対応している。

次に homogeneous trees を定義する。まず $On^{<\omega}$ を ordinals の有限列全体とし、$S \subseteq On^{<\omega}$ が tree であるとは、$(\sigma \in S,\ k < lh(\sigma) \Rightarrow \sigma \upharpoonright k \in S)$ のときとする。Tree S が order-invariant とは、

$$\forall \sigma, \tau \in On^{<\omega} (lh(\sigma) = lh(\tau) \wedge \forall i, j < lh(\sigma) (\sigma(i) \leq \sigma(j) \Leftrightarrow \tau(i) \leq \tau(j)) \Rightarrow (\sigma \in S \Leftrightarrow \tau \in S))$$

のときをいう。Order-invariant tree S が well-founded のとき、homogeneous という。次の様に、これは Π^1_2-complete な概念である。

定理 1.12 A を Π^1_2 set とする。Order-invariant な trees S_n $(n<\omega)$ が存在して、次が成り立つ。

$$n \in A \Leftrightarrow \forall f \in On^{\omega}\ \exists t < \omega\ (\bar{f}(t) \notin S_n)$$

$$(\text{i.e.}, \Leftrightarrow S_n \text{ は homogeneous (つまり well-founded)}).$$

但し、$\bar{f}(t)$ は $\langle f(0), \cdots, f(t-1) \rangle$ のこと。

(証明) A が Π^1_2 とすると、Σ^1_1 set B が存在して、

$$n \in A \Leftrightarrow \forall g \in \omega^{\omega}\ \langle n, g \rangle \in B$$

Π^1_1 relation の well-order に関する representation により、rec. map $n, g \longmapsto T_{n,g}$ (但し $T_{n,g}$ は tree on ω) があって

$\langle n, g \rangle \in B \Leftrightarrow T_{n,g}$ は well-founded でない

$\Leftrightarrow \neg \exists f \in On^{\omega}$ ($i \mapsto f(i)$: order preserving ;

但し、i の order は $T_{n,g}$, $f(i)$ は On に関して).

S_nを定義する : $(x_i)_{i<k} \in S_n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists g \in \omega^{\omega}$ ($i \mapsto x_i$ は order preserving;

但し、i の order は $T_{n,g}$, x_i は On に関して).

このとき、上式より、$\forall g (\langle n, g \rangle \in B) \Leftrightarrow \neg \exists f \in On^{\omega} \forall t < \omega \; (\bar{f}(t) \in S_n)$

よって　$n \in A \Leftrightarrow \forall f \in On^{\omega} \exists t < \omega \; (\bar{f}(t) \notin S_n)$. □

次に homogeneous tree は denotation system (すなわち dilator) を induce することを見る :

$S\, (\neq \phi)$ を homogeneous tree とする。$x \in On$ に対し、

$S_x = \{ \sigma \in S \mid \forall i < lh(\sigma) \; (\sigma(i) < x) \}$, $<_x$ を S_x 上の Kleene-Brouwer ordering とする。$\| \; \|_x$ を $<_x$ に関する ordinal norm とし、$\sigma \in S_x$ に対し、$\{ \sigma(i) \mid i < lh(\sigma) \} = \{ x_0 < \cdots < x_{n-1} \}$ のとき、

$$D_S\,((c\,;\, x_0, \cdots, x_{n-1}\,;\, x)) = \| \sigma \|_x$$

とおく。但し、c は次で与えられる :

$\tau : lh(\sigma) \to n$ s.t. $\sigma(i) = x_{\tau(i)}$ のとき、$\| \tau \|_n = c$

このとき、D_S が denotation system であることは容易にわかる。

注意 1.13　このことの逆は成り立っていない。つまり、ある denotation system で、homogeneous tree S に対する D_S となっていない

ものがある。(Girard-Normann [7, Rem 3.5])

注意 1.14 Dilator や homogeneous tree の recursiveness, prim. recursiveness, --- も 注意 1.5 denotation system の場合と同様、ω への制限での性質で定義される。これは Girard [5] の次の定理に関し重要な意味をもつ：

Boundedness theorem : $\forall x \in \mathcal{O}\, \exists y \in \mathcal{O}\, \psi(x, y) \Rightarrow$ ∃prim.rec dilator D s.t. $\forall \alpha \geqq \omega\, \forall x \in \mathcal{O}^{<\alpha}\, \exists y < \mathcal{O}^{<D(\alpha)}\, \psi(x, y)$.

(但し、ψ は arith で Kleene's $\mathcal{O}$ に対して positive な relation)

この結果の重要性は Ressayre [16] が注意しているように D の prim. recursive 性にある。この性質は D の ω への制限に関するもので、(ordinal 上ではなく) ω 上の prim. recursion のみを使って定義されることに注意する。(cf. Buchholz [2], Jäger [9])

§2. Slow-growing と fast-growing hierarchies

本節では Subrecursive inaccessible の構成を行う。まず、countable $\alpha \in On$ を自然数上の direct system の direct limit として表わすことを考察する。

各 limit $\lambda \leq \alpha$ に 1つの fundamental sequence $(\lambda_n)_{n<\omega}$:

$(\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda$, $\sup_x \lambda_x = \lambda$ をみたす列のこと.)

が対応しているものとする。この対応 $\lambda \xmapsto{P} (\lambda_n)_{n<\omega}$ のことを

(fundamental sequencesの) systemという。次の様に n_x^α, g_{xy}^α, g_x^α を定義する：($n_x^\alpha < \omega$; $g_{xy}^\alpha : n_x^\alpha \to n_y^\alpha$; $g_x^\alpha : n_x^\alpha \to \alpha$ for $x < y < \omega$)

$$n_x^0 = 0 , \quad n_x^{\alpha+1} = n_x^\alpha + 1 , \quad n_x^\lambda = n_x^{\lambda x}$$
$$g_{xy}^0 = \phi , \quad g_{xy}^{\alpha+1} = g_{xy}^\alpha \cup \{\langle n_x^\alpha , n_y^\alpha \rangle\} , \quad g_{xy}^\lambda = g_{xy}^{\lambda x}$$
$$g_x^0 = \phi , \quad g_x^{\alpha+1} = g_x^\alpha \cup \{\langle n_x^\alpha , \alpha \rangle\} , \quad g_x^\lambda = g_x^{\lambda x}$$

この定義はfundamental sequencesのとり方に依存しているが、実際次が成り立つ。(証明は Dennis-Jones-Wainer[3, Th.1].)

<u>命題2.1</u>　Countable $\alpha \in On$ に対し、次の条件(a)(b)は同値。

(a) $\forall \gamma \leq \alpha$, $(\gamma, g_x^\gamma)_{x<\omega} = \varinjlim (n_x^\gamma , g_{xy}^\gamma)$

(b) $\forall \gamma \leq \alpha$, $\begin{cases} \cdot\ x < y \Rightarrow \gamma[\![x]\!] \subseteq \gamma[\![y]\!] \text{ and} \\ \cdot\ \beta < \gamma \Rightarrow \exists x < \omega (\beta \in \gamma[\![x]\!]) \end{cases}$

但し、$\gamma[\![x]\!] = \{\beta \mid \beta + 1 <_x \gamma\}$

$<_x$ は ($\delta <_x \delta + 1$, $\lambda_x <_x \lambda$ for limit λ) のtransitive closure.

この命題はfundamental sequencesのsystem $\mathcal{P}$ が、性質(b)をもてば、α は自然数のdirect systemのdirect limitとなることを示しているので、次に $\mathcal{P}$ の性質として(b)を導くもので、より扱い易いものを導入しておく。

<u>定義 2.2</u> System $\mathbb{P}$ が structured であるとは、次の性質をみたすときをいう:

$$\forall \text{ limit } \lambda \leq \alpha \quad (x < y < \omega \Rightarrow \lambda_x \in \lambda[\![y]\!]).$$

このとき、$\alpha \in On^{(str.)}$ と書く.

<u>命題 2.3</u> $\alpha \in On^{(str.)}$ のとき、$\forall \gamma \leq \alpha$ に対し、次が成り立つ.

(i) $x < y < \omega \Rightarrow \gamma[\![x]\!] \subseteq \gamma[\![y]\!]$.

(ii) $\beta < \gamma \Rightarrow \exists x < \omega \ (\beta \in \gamma[\![x]\!])$.

証明は γ に関する帰納法による. (cf. Wainer[21]) n^{α}_{x} は通常、slow-growing function と呼ばれ、$G_\alpha(x)$ と書かれる。

$$G_0(x) = 0 \ ; \quad G_{\alpha+1}(x) = G_\alpha(x)+1 \ ; \quad G_\lambda(x) = G_{\lambda_x}(x).$$

$(G_\alpha(x) = \alpha[\![x]\!]$ の濃度$)$

<u>命題 2.4</u> $\alpha \in On^{(str.)}$ のとき次が成り立つ.

(i) $x < y < \omega \Rightarrow G_\alpha(x) \leq G_\alpha(y)$.

(ii) $\beta < \alpha \Rightarrow G_\beta(x) < G_\alpha(x)$ for $\beta \in \alpha[\![x]\!]$.

<u>定義 2.5</u> Countable $\alpha \in On$ が subrecursive inaccessible (s-inacc.) であるとは、次を満たすときとする:

$$F_\alpha(x) \leq G_\alpha(x+1) \quad \text{for } \forall x < \omega.$$

但し、F_α は次で定義される fast-growing function：

$$F_0(x)=x+1\ ;\ F_{\alpha+1}(x)=F_\alpha^{x+1}(x)\ ;\ F_\lambda(x)=F_{\lambda_x}(x)$$

ここで $f:\omega\to\omega$ に対し、$f^0(x)=x\,;\, f^{m+1}(x)=f(f^m(x))$ で f^m を定める.

注意 2.6 limit $\alpha\in On$ とその fund. seq. $(\alpha_x)_{x<\omega}$ に対し、$\alpha_x\in On^{(str.)}$ であるとき、$G_\alpha(x)<F_\alpha(x)$ for $x>0$ は成り立つ.

定理 2.7 countable limit $\alpha\in On$ とその fund. seq $(\alpha_x)_{x<\omega}$ に対し、$\alpha_x\in On^{(str.)}$ for $\forall x<\omega$ で、$G_{\alpha_{n+1}}=F_{\alpha_n}$ $(\forall n<\omega)$ であれば、α は s-inacc. である。

(証明) $x<\omega$ に対し、

$$F_\alpha(x)=F_{\alpha_x}(x)=G_{\alpha_{x+1}}(x)\leq G_{\alpha_{x+1}}(x+1)=G_\alpha(x+1)\qquad\square$$

この定理の条件 ($G_{\alpha_{n+1}}=F_{\alpha_n}$ $\forall n<\omega$) をみたす $\alpha\in On$ のとり方はいろいろ考えられるが、G, F を単に関数としてではなく、functor として見ると一意的であることが示される. (Wainer[21])
今、s-inacc. $\tau=\sup_x \tau_x$ ($(\tau_x)_{x<\omega}$ は τ の fund. seq.) を次のように構成する：

まず $\omega_0=\omega$；ω_n を n-th uncountable cardinal とする。今までの fund. seq の system の概念を拡張して $\alpha<\omega_n$, $cf(\alpha)=\omega_m$ に対して $\sup\alpha_i=\alpha$ となる上昇列 $(\alpha_i)_{i<\omega_m}$ が1つ対応しているとする。

この$(\alpha_i)_{i<\omega_m}$を以前と同様に fund. seq という. 特にω_nに対する fund. seq. $((\omega_n)_i)_{i<\omega_{n-1}}$については、$(\omega_n)_i = i$で定義する。

このとき、各$n<\omega$に対して、F_αを拡張した$\varphi_\alpha : \omega_n \longrightarrow \omega_n$ $(\alpha < \omega_{n+1})$を定義する:

$$\varphi_0(\beta) = \beta+1 \ ; \quad \varphi_{\alpha+1}(\beta) = \varphi_\alpha^\beta(\varphi_\alpha(\beta))$$

$$\varphi_\lambda(\beta) = \sup_\gamma \varphi_{\lambda_\gamma}(\beta) \qquad (cf(\lambda) = \omega_k \ ; k<n)$$

$$\varphi_\Lambda(\beta) = \varphi_{\Lambda_\beta}(\beta) \qquad (cf(\Lambda) = \omega_n)$$

但し、φ^βの定義は: $\varphi^0() = ()$; $\varphi^{\beta+1}() = \varphi(\varphi^\beta())$; $\varphi^\lambda() = \sup_\gamma \varphi^{\lambda_\gamma}()$.

定義 2.8 $n<\omega$に対し、named ordinals の集合$T_n (\subseteq \omega_n)$を次で定義する:

- $0, 1, \omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_{n-1} \in T_n$,
- $\beta, \gamma \in T_n, \alpha \in T_{n+1} \Rightarrow \varphi_\alpha^\gamma(\beta) \in T_n$ (但し、$\varphi_\alpha : \omega_n \to \omega_n$).

さらに$x<\omega$に対し、$c : T_{n+1} \longrightarrow T_n$を次で定義する:

$$c(0) = 0 \ , \ c(\omega_0) = x \ , \ c(\omega_{k+1}) = \omega_k \ , \ c(\varphi_\alpha^\gamma(\beta)) = \varphi_{c\alpha}^{c\gamma}(c\beta)$$

(但し、左辺の$\varphi_\alpha : \omega_{n+1} \to \omega_{n+1}$, 右辺の$\varphi_\alpha : \omega_n \to \omega_n$)

このとき、次の命題が成り立つ: (Wainer[21], Kadota[11])

命題 2.9 (Collapsing theorem) $x<\omega$, $\alpha \in T_2$, $\beta \in T_1$のとき、

$$G_{\varphi_\alpha(\beta)}(x) = F_{c\alpha}(G_\beta(x)).$$

最後にτとその fund. seq. $(\tau_x)_{x<\omega}$を次の式で定義する.

$\tau_0 = 3$, $\tau_{n+1} = \varphi_{\varphi_{\cdot_{\cdot_{\cdot_{\varphi_3(\omega_n)}\cdot}\cdot}(\omega_1)}}(\omega_0)$

$\tau = \sup_n \tau_n$

このとき、次の命題が成り立つ.(Kadota [11])

命題2.10　$n<\omega$ に対し、$\tau_n \in On^{(str.)}$

この2つの命題と、定理2.7を使えば τ が s-inacc. であることがわかる.

§3. Ressayre による Π^1_1-uniformization theorem の証明

本節では、homogeneous tree を用いた Π^1_1-uniformization theorem の Ressayre[17] による証明を述べる。

この証明に関し、Ressayre [17] は "simple" と述べたが、その simplisity については、H. Tanaka (Math. Rev. 90e:03061 論文[17] の review) の、Shoenfield "Mathematical Logic" の証明はすでに simple であるという意見がある。Ressayre [17] は Π^1_n-unif. th. の、(homogeneous tree を拡張した) Ehrenfeucht -Mostowski model を用いた証明を述べている。

N を自然数全体とし、N上の linear order $<_X$ が与えられたとき、$X \in OL$ と書く. $X^{<\omega}$ を N上の有限列全体とする(考えている order

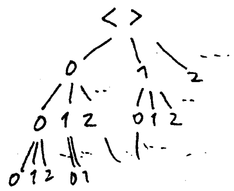
が $<_X$ であることを強調するためにこう書く)。 今、$X \in OL$ のとき、$T \subseteq X^{<\omega}$ が tree であるとは、§1と同じで、$(s \in T,\ k < lh(s) \Rightarrow s \restriction k \in T)$ のときとする。 $<_\omega$ は N 上の通常の ω の order $<$ を表わす。 このとき、tree $A \subseteq \omega^{<\omega}$, $X \in OL$ に対して $A(X) \subseteq X^{<\omega}$ を次で定義する:

$$(x_i)_{i<n} \in A(X) \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \exists (a_i)_{i<n} \in A$$

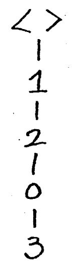
map $a_i \mapsto x_i$ が order preserving

(但し、a_i の order は $<_\omega$, x_i は $<_X$ に関するもの)

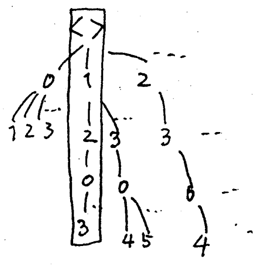
例 3-1 $\omega^{<\omega}$



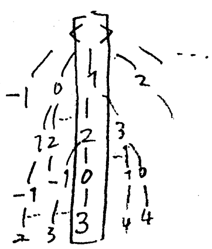
$A\ (\subseteq \omega^{<\omega})$



とする。



$A(\omega)$



$A(\mathbb{Z})$ (本当は $\mathbb{Z}$ をさらに N で coding)

N 上の linear order $<_X$ が well-order のとき、$X \in WO$ と書く。 $A \subseteq \omega^{<\omega}$ が well-founded over WO とは、$(X \in WO \Rightarrow A(X)$ が well-founded $)$ のとき。 次の補題は §1 でも使ったが、Π^1_1 relation の WO に関する表現について述べたもの。

補題 3.1. (Normal form for Π^1_1) $\varphi(R)$ を Π^1_1 relation とする。 このとき、ある対応 $\rho \in \omega^\omega \longmapsto X_\rho \in OL$ があって次が成り立つ:

(i) $\varphi(\rho) \Leftrightarrow X_\rho \in WO$

(ii) X_ρ は recursive in ρ, uniformly (i.e., $<_{X_\rho} = \{e\}^\rho$ for $\exists e \in N$)

今、§1 の定理 1.12 の $\rho \in \omega^\omega$ を $\rho \in 2^\omega$ に制限すると、次の補題（1.12より強い）が成り立つ：

補題 3.2 (Homogeneous tree lemma) $\varphi(R)$ を Π^1_1 relation とする。
$A \subseteq \omega^{<\omega}$ を次で定義される tree とする：

$(a_i)_{i<n} \in A \overset{def.}{\Leftrightarrow} \exists \rho \in 2^\omega$ (map $i \longmapsto a_i$ が order preserving,
但し、i の order は $<_{X_\rho}$，a_i は $<_\omega$ に関するもの．
また、X_ρ は上の補題のもの．)

このとき、次が成り立つ：

(a) (i) $\neg \exists \rho \in 2^\omega \varphi(\rho) \Leftrightarrow A$ は well-founded over WO

(ii) A は rec. enum.（[17] では A は rec. まで述べられている）

(b) 任意の $X \in OL$ に対して、

(i) $(x_i)_{i<n} \in A(X) \Leftrightarrow \exists \rho \in 2^\omega$ (map $i \longmapsto x_i$ が order preserving)
但し、i の order は $<_{X_\rho}$，x_i が $<_X$ に関する．

(ii) $(x_i)_{i<\omega}$ が $A(X)$ の path $\Leftrightarrow \exists \rho \in 2^\omega$ (map $i \longmapsto x_i$ が order preserving
但し i の order は $<_{X_\rho}$，x_i が $<_X$ に関する．

(証明) (b) から示す：(b)(i) 定義より、

$(x_i)_{i<n} \in A(X) \Leftrightarrow \exists (a_i)_{i<n} \in A$ ($a_i \longmapsto x_i$ order preserving) 但し、a_i は $<_\omega$，x_i は $<_X$ に関して。

$\Leftrightarrow \exists \rho \in 2^\omega \, (i \mapsto a_i \mapsto x_i \overset{\text{order preserving}}{}$ (orderは、iは$<_{X_\rho}$, a_iは$<_\omega$, x_iは$<_X$)

$\Leftrightarrow \exists \rho \in 2^\omega \, (i \mapsto x_i)$ order preserving.

b(ii) $\Leftarrow$ は明らか。(b)(ii) $\Rightarrow$ は $(x_i)_{i<\omega}$ が A の path とすると、$\forall n \exists \rho_n \in 2^\omega$ s.t. $i \mapsto x_i \, (i<n)$ が order preserving (iの方は$<_{X_{\rho_n}}$で x_i は$<_X$). 2^ωのコンパクト性より、ある収束部分列 $\{\rho_{n_i}\} \to \exists \rho' \in 2^\omega$ があるが、map $\rho \mapsto X_\rho$ が連続であるから、この $\rho' \in 2^\omega$ に対し、

$\forall n \, (i \mapsto x_i \, (i<n))$ は order pres. (orderは iが$<_{X_{\rho'}}$, x_iが$<_X$)).

(a)(i): $\neg \exists \rho \in 2^\omega \, \varphi(\rho) \overset{3.1}{\Leftrightarrow} \neg \exists \rho \in 2^\omega (X_\rho \in WO)$

$\Leftrightarrow \forall X \, (X \in WO \Rightarrow \neg \exists (x_i) \, \exists \rho \in 2^\omega$ s.t. $i \mapsto x_i$ が order pres.

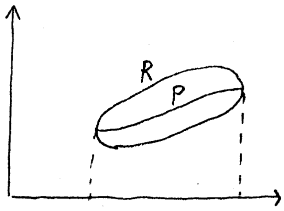
(但て、iはX_ρ, x_iが X)

$\Leftrightarrow \forall X \, (X \in WO \Rightarrow A(X)$ is well-founded.)

(a)(ii): $\bar{x} \in A$ は $\exists \rho \in 2^\omega \, \psi(\rho, \bar{x})$ (ψはrecursive) という形。この場合 A は rec. enumerable であることはよく知られている。 □

<u>定理 3.3</u> (Π^1_1-uniformization theorem) $R(\alpha, \beta)$ を Π^1_1 relation ($\alpha, \beta \in \omega^\omega$) とするとき、$\Pi^1_1$ relation P が存在して、

$\forall \alpha \forall \beta \, (P(\alpha,\beta) \Rightarrow R(\alpha,\beta)) \wedge \forall \alpha \, (\exists! \beta \, P(\alpha,\beta) \Leftrightarrow \exists \beta \, R(\alpha,\beta))$.



(証明): 実際には次の場合を示す. Relativisation と ω^ωを 2^ωでコード化する技術により一般化できるから。

• Π^1_1 の $\varphi(S)$ s.t. $\exists S\in 2^\omega\ \varphi(S)$ に対し、ある Π^1_1 の ψ で次をみたす：

$\exists \rho_0 \in 2^\omega$ s.t. $\varphi(\rho_0)$, $\forall \rho\in 2^\omega\ (\psi(\rho) \Leftrightarrow \rho=\rho_0)$

今、Π^1_1 の $\psi(\rho_0)$ を次で定める：

$\psi(\rho_0) \overset{def}{\Leftrightarrow} (X_{\rho_0}\in WO \wedge \|X_{\rho_0}\| = \min\{\|X_\rho\| : X_\rho\in WO\}$ (第一行)

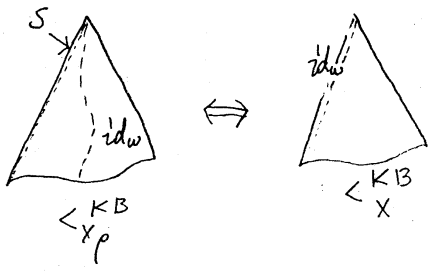
$\wedge$ (id_ω は $A(X_{\rho_0})$ の leftmost な path) (第二行)

$\wedge\ \forall\rho\in 2^\omega\ (X_\rho = X_{\rho_0} \Rightarrow \rho_0 \leqq \rho))$ (第三行)

但し、$\|X\|$ は $<_X$ の order type, $id_\omega=(0,1,2,\cdots)$, A は前補題のもの, "leftmost" は $A(X_{\rho_0})$ の Kleene-Brouwer ordering の意味で.

まず、$\psi(\rho_0)$ の ρ_0 が存在することを示す：仮定 ($\exists S\in 2^\omega \varphi(S)$) と前補題により、$\exists X_\rho \in WO$ s.t. $A(X_\rho)$ は well-founded でない。このとき前補題(b)(ii)より、id_ω が $A(X_\rho)$ の path になる。

$X_{\rho'}$ を(第一行)をみたすとし、$A(X_{\rho'})$ の leftmost path を $S=(s_0,s_1,s_2\cdots)$ とする。$S(i) <_{X_{\rho'}} S(j) \Leftrightarrow i <_X j$ として def. すると、$<_X$ の order type は $<_{X_{\rho'}}$ と同じで、id_ω が $A(X)$ の leftmost path になって、前補題より $\exists\rho''\in 2^\omega\ (X = X_{\rho''})$. (第三行)目



をみたすものは、

$$\inf\{\rho \mid X_\rho = X_{\rho''}\}$$

としてとればよい。

一意性については、逆に、

$A(X_{\rho'})$ の leftmost path S と、id_ω が leftmost path になっている勝手な $A(X)$ の id_ω (すなわち X)とは、$i\mapsto S_i$ (order pres.) で isomorphic になるのでよい。□

参考文献

[1] V. M. Abrusci. Some uses of dilators in combinatorial problems: part III, independence results by means of decreasing F-sequences (F weakly finite dilator). *Archive for Mathematical Logic*, 29: 85–109, 1989.

[2] W. Buchholz. Inductive Definitionen und Dilation. *Archive for Mathematical Logic*, 27: 51–60, 1988.

[3] E. C. Dennis-Jones and S. S. Wainer. Subrecursive hierarchies via direct limits. In *Lecture Notes in Mathematics 1104*, pages 117–128, Springer-Verlag, 1984.

[4] J. -Y. Girard. Π^1_2-logic, part 1: dilators. *Annals of Mathematical Logic*, 21: 75–219, 1981.

[5] J. -Y. Girard. A survey of Π^1_2-logic. In *J.Barwise et al (eds.), Logic, Methodology and Philosophy of Science VI*, pages 89–107, North-Holland, 1982.

[6] J. -Y. Girard and D. Normann. Embeddability of ptykes. *Journal of Symbolic Logic*, 57: 659–676, 1992.

[7] J. -Y. Girard and D. Normann. Set recursion and Π^1_2-logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 28: 255–286, 1985.

[8] J. -Y. Girard and J. P. Ressayre. Elements de logique Π^1_n. In *Recursion Theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 42*, pages 389–445, American Mathematical Society, 1985.

[9] G. Jäger. Countable admissible ordinals and dilators. *Zeitschr. f. math. Logik*, 32: 451–456, 1986.

[10] H. R. Jervell. Introducing homogeneous trees. In *Logic Colloquium'81, Proceedings of Herbrand Symposium*, pages 147–158, North-Holland Publishing Company, 1982.

[11] N. Kadota. On Wainer's notation for a minimal subrecursive inaccessible ordinal. *Mathematical Logic Quarterly*, 39: 217–227, 1993.

[12] A. S. Kechris. Boundedness theorems for dilators and ptykes. *Annals of Pure and Applied Logic*, 52: 79–92, 1991.

[13] A. S. Kechris and W. H. Woodin. A strong boundedness theorem for dilators. *Annals of Pure and Applied Logic*, 52: 93–97, 1991.

[14] P. Päppinghaus. Ptykes in Gödels T und Definierbarkeit von Ordinalzahlen. *Archive for Mathematical Logic*, 28: 119–141, 1989.

[15] P. Päppinghaus. Rekursion über Dilatoren und die Bachmann-Hierarchie. *Archive for Mathematical Logic*, 28: 57–72, 1989.

[16] J. P. Ressayre. Bounding generalized recursive functions of ordinals by effective functors; a complement to the Girard theorem. In *Logic Colloquium'81, Proceedings of Herbrand Symposium*, pages 251–278, North-Holland Publishing Company, 1982.

[17] J. P. Ressayre. Π^1_2-logic and uniformization in the analytical hierarchy. *Archive for Mathematical Logic*, 28: 99–117, 1989.

[18] J. van de Wiele. Recursive dilators and generalized recursions. In *Logic Colloquium'81, Proceedings of Herbrand Symposium*, pages 325–332, North-Holland Publishing Company, 1982.

[19] J. Vauzeilles. Cut-elimination and interpolation for Ω-logic. *Archive for Mathematical Logic*, 27: 161–175, 1988.

[20] J. Vauzeilles. Functors and ordinal notations IV; the Haward ordinal and the functor Λ. *Journal of Symbolic Logic*, 50: 331–338, 1985.

[21] S. S. Wainer. Hierarchies of provably computable functions. In *P.Petkov (ed.), Mathematical Logic*, pages 211–220, Plenum Press, New York, 1990.

[22] S. S. Wainer. The "slow-growing" Π^1_2 approach to hierarchies. In *Recursion Theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 42*, pages 487–502, American Mathematical Society, 1985.