

The Entropy of the Moduli Space of the Real Cubic Polynomials

上智大学 理工学部 数学科 野尻 朝子 (Asako NOJIRI)
" 西沢 清子 (Kiyoko NISHIZAWA)

1. Introduction

実係数 3 次方程式の族の力学系を研究するために、この族に同値関係を導入し、パラメータ化する。このパラメータ平面 (モジュライ空間と呼ぶ) に代数曲線を導入し、大まかに平面を分類することができる。J. Milnor の preprint に基づきながら、関数の複雑さを表す topological entropy という概念を用い、パラメータ平面の性質を詳しくみていくことにする。

2. 3 次多項式写像のパラメータ平面とその分類

3 次多項式写像

$$x \mapsto g(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

は、複素アフィン変換で次の形の多項式

$$z \mapsto f(z) = z^3 - 3a^2z + b \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1)$$

と共役になる。したがって

$$A = a^2, \quad B = b^2 \quad (2)$$

は、モジュライ空間 (moduli space) としての座標系と考えてよい。アフィン共役類に対する不変量 A は判別式の種類とみなされ、critical point が一致しているときに限り 0 になる。 B は f が奇関数のときのみ 0 になる。

ここで座標系の実数係数のアフィン変換に制限すると、もう 1 つの不変量 σ

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \text{sgn}(g''') = \text{sgn}(c_3) \quad (\text{主係数の符号}) \quad (3)$$

が必要となる。この結果、

定義 1 実係数 3 次多項式のアフィン共役類のモジュライ空間 (moduli space) は、

$$\{(A, B) \mid B \geq 0\} \cup \{(A, B) \mid B \leq 0\}$$

である。

ここで、 σ は常に $\sigma B > 0$ を満たし、また、 σA が正か負に応じて、実3次多項式は実数の critical point をもつか、複素共役な critical point をもつことを注意しておく。

3次多項式写像のモジュライ空間は、4個の異なる領域 $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ に分けられる。

定義 2 f を3次多項式とする。

f が real periodic point を1つしか持たないとき、 f は trivial class \mathcal{R}_0 に属するという。また、 I を f の periodic point をすべて含む最小の閉区間とする。このとき $f \in \mathcal{R}_n$ ($n \geq 1$) とは、 $I \times I$ で交わった f のグラフが n 個の異なった成分をもつこととする (Fig. 1 参照)。

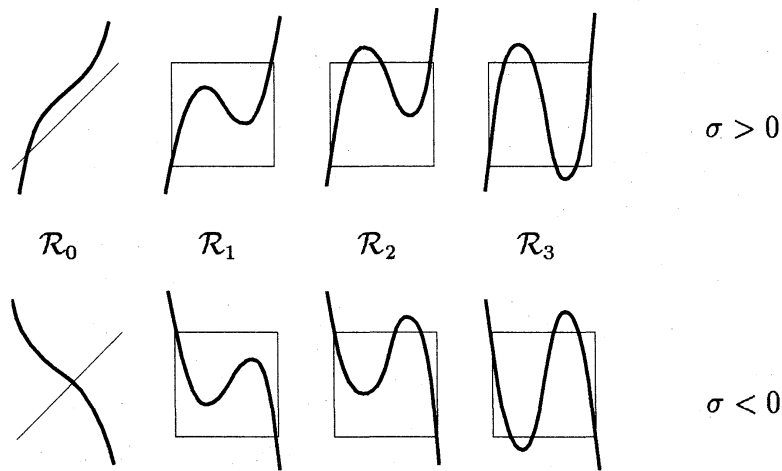


Fig. 1. $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ について

以後、3次多項式 $f(z)$ の n 回合成を $f^{o n}(z)$ と書く: ただし、

$$f^{o 0}(z) = z, \quad f^{o(n+1)}(z) = f^{o n}(f(z))$$

である。

$\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ は、モジュライ空間上の4つの代数曲線によって分類することができる。

$Per_p(\mu)$ を、eigenvalue が μ である周期 p の periodic cycle をもつ f に対する組 (A, B) とする。

$$Per_1(1) : B = 4\left(A + \frac{1}{3}\right)^3, \quad Per_2(1) : B = 4\left(A - \frac{2}{3}\right)^3$$

$Preper_{(t)p}$ を critical point $\pm a$ が preperiodic で、 $f^{o t}(a)$ が周期 $p \geq 1$ の periodic point になるような f に対する (A, B) とする。

$$Preper_{(1)1} : B = 4A(A-1)^2, \quad Preper_{(1)2} : B = -(1 \pm (2A+1)\sqrt{-A})^2$$

これらの曲線により、 $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ に分類される。上半平面は $Per_1(1)$ と $Preper_{(1)1}$ 、下半平面は $Per_2(1)$ と $Preper_{(1)2}$ によって、分類されている (Fig. 2 参照)。

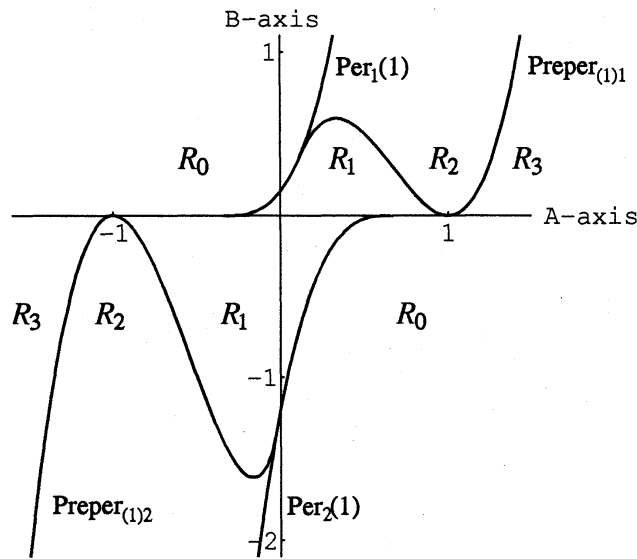


Fig. 2. パラメータ平面の大まかな分類

3. critical point の挙動

一般に、点の orbit は、有界と非有界に分類され、有界の場合にはさらに細かく、periodic と chaotic に分かれる。3次多項式は、重複度を含めて2つの critical points をもち、この2つの critical points の挙動は次のように分類することができる。

case A. Adjacent

$f(U) \cap U = \phi$ 、かつ $f^{op}(U) \subset U$ をみたす両方の critical point を含む連結開区間 U がある。周期 p をはっきりさせる場合、 A_p と書く。

case B. Bitransitive

$U = U_1 \cup U_2 \rightarrow U$ への first return map が定義され、smooth で、これらの2つの成分が交換可能な2つの critical point の近傍 U_1, U_2 が存在する。すなわち、 $f^{op}(U_1) \subset U_2$, $f^{oq}(U_2) \subset U_1$ 。この場合、 B_{p+q} と書く。

case C. Capture

first return map が U_1, U_2 とも U_2 にいくような2つの critical point の近傍 U_1, U_2 が存在する。すなわち、 $f^{op}(U_1) \subset U_2$, $f^{oq}(U_2) \subset U_2$ で、この場合、 $C_{(p)q}$ と書く。

case D. Disjoint periodic sinks

disjoint な近傍 U_1, U_2 が存在するが、この場合は first return map により、 $U_i \rightarrow U_i$ で $f^{op}(U_1) \subset U_1$, $f^{oq}(U_2) \subset U_2$ をみたす。この場合、 $D_{p,q}$ と書く。

case A ~ D については、Fig 3 を参照。パラメータ平面内での各タイプの位置については、Fig. 4 を参照。

定義 3 $f(x) = \sigma x^3 - 3Ax + \sqrt{|B|}$ において、上で分類したそれぞれの挙動を満足する

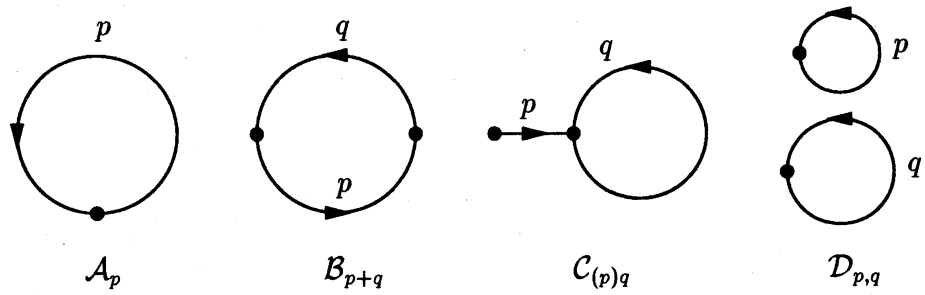


Fig. 3. case $A \sim D$ について

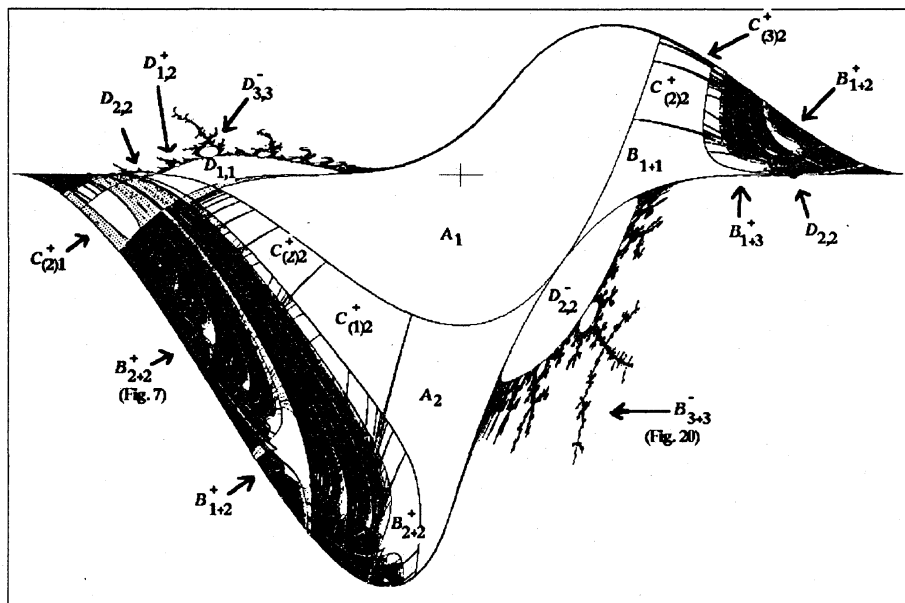


Fig. 4. パラメータ平面. 領域は $[-1.2, 1.2] \times [-1.85, .75]$

critical points $\pm\sqrt{|A|}$ をもつ、パラメータ (A, B) を求めることができる。この (A, B) をそのタイプの中心という。

例 1 $C_{(3)1}$ タイプの中心を求めるには、次の4つのタイプを考えればよい。

$$\bullet f(x) = x^3 - 3Ax + \sqrt{|B|}, \text{ すなわち上半平面のとき}$$

$$\begin{cases} f^{\circ 3}(\sqrt{|A|}) = -\sqrt{|A|} \\ f(-\sqrt{|A|}) = -\sqrt{|A|} \end{cases} \quad \begin{cases} f^{\circ 3}(-\sqrt{|A|}) = \sqrt{|A|} \\ f(\sqrt{|A|}) = \sqrt{|A|} \end{cases}$$

$$\bullet f(x) = -x^3 - 3Ax + \sqrt{|B|}, \text{ すなわち下半平面のとき}$$

$$\begin{cases} f^{\circ 3}(\sqrt{|A|}) = -\sqrt{|A|} \\ f(-\sqrt{|A|}) = -\sqrt{|A|} \end{cases} \quad \begin{cases} f^{\circ 3}(-\sqrt{|A|}) = \sqrt{|A|} \\ f(\sqrt{|A|}) = \sqrt{|A|} \end{cases}$$

数式処理システム MACSYMA を使って、これらの式を満足するパラメータ (A, B) は (但し、ここで $A, B \in \mathbb{R}$ であることに注意する)、上半平面には存在せず、下半平面に2つ存在する。

$$(A, B) = (-.74959, -.18679) \\ = (-.75040, -.18820)$$

他のタイプについても中心を求め、表にまとめた (Table 1 参照)。

4. Topological Entropy

次に述べる topological entropy の定義は、[3] を参照している。

定義 4 $f : I \rightarrow I$ が piecewise-monotone であるとは、 I の閉被覆 $I = \bigcup_{i=1}^l I_i$, $I_i = [c_{i-1}, c_i]$ があり、各 I_i において、 $f|_{I_i}$ は単調になる。

各 I_i として単調性をみたす最大の区間をとることにするとき、この I_i を f の lap という。また、lap の数 l を f の lap 数といい $l(f)$ で表す。 c_0, c_1, \dots, c_l は、局所的な意味での最大、最小となり、 c_1, \dots, c_{l-1} を turning point と呼ぶ。

補題 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} l(f^{\circ n})^{\frac{1}{n}}$ が存在し、

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} l(f^{\circ n})^{\frac{1}{n}} = \inf_n l(f^{\circ n})^{\frac{1}{n}}$$

となり、 s を f の growth number と呼ぶ。

定義 5 $\log s$ を f の topological entropy という。

$f^{\circ n}$ の lap の列

$$l(f^{\circ n}) \stackrel{\text{def}}{=} (l(f^{\circ 0}), l(f^{\circ 1}), l(f^{\circ 2}), \dots)$$

は f の位相共役類の不変量を表す。

定義 6 $x \in I$ の address を

$$A(x) \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} I_j & : x \in I_j \text{ で turning point でないとき} \\ c_j & : x \text{ が turning point } c_j \text{ のとき} \end{cases}$$

x の f に関する itinerary を

$$A(f^{o^*}(x)) \stackrel{\text{def}}{=} (A(x), A(f(x)), A(f^{o^2}(x)), \dots)$$

とする。

定義 7 $f(x)$ の 符号関数 (sign function)

$$\text{sign}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & : x \text{ が } f \text{ の単調増加区間に属しているとき} \\ -1 & : x \text{ が } f \text{ の単調減少区間に属しているとき} \end{cases}$$

但し、 x が turning point の場合には、 $\text{sign}(c_k) = 0$ と定義する。

この定義より、 $e_n := \prod_{i=0}^{n-1} \text{sign}(f^{oi}(x))$ は、 $f^{on}(x)$ の入っている区間が増加か減少かを示していることがわかる。

この符号関数を x の f に関する itinerary につけ加えた数列を

$$\theta^*(x) := (e_0 A(x), e_1 A(f(x)), \dots)$$

とする。

例 2 f を 3 次多項式とする。 $f \in \mathcal{R}_0$ のとき、十分大きな n に対し、 $l(f^{on}) = 1$ となり、 $s = 1$ となる。よって、topological entropy は、 $\log s = 0$ である。

例 3 f を 3 次多項式とする。 $f \in \mathcal{R}_3$ のとき、 $l(f^{on}) = 3^n$ となり、 $s = 3$ となる。よって、topological entropy は、 $\log 3$ である。

一般に、上の例のように、簡単に topological entropy を求めることはできない。これから、その求め方について述べていくことにする。

数列 $\theta^*(x)$ の第 n 項の元を t^{n-1} の係数としてもつ形式的べき級数

$$\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 t^2 + \dots$$

を点 x に対応する invariant coordinate とする。 $\theta(x)$ は有理係数のべき級数環 $\mathbb{Q}[[t]]$ の元であるが、それと同時に I_i ($1 \leq i \leq l$) を基底としてもつ自由加群でもある。ゆえに、

$$\Theta = \Theta_1 I_1 + \dots + \Theta_l I_l \quad \text{但し、} \Theta_j \text{ は有理係数をもつ形式的べき級数}$$

と書き換えることができる。

x に $\theta(x)$ を対応させる関数は単調増加で、各係数は有限個の値しかとれないことから、

$$\theta(x+) = \lim_{y \downarrow x} \theta(y)$$

が存在し、これを right hand limit と呼ぶ。同様に left hand limit $\theta(x-)$ も定義できる。

定義 8 turning point c_i ($1 \leq i \leq l$) において、

$$\begin{aligned} \nu_i &:= \theta(c_i+) - \theta(c_i-) \\ &= N_{i1}I_1 + N_{i2}I_2 + \cdots + N_{il}I_l \end{aligned}$$

を、 f の i 番目の kneading increment とする。また、kneading matrix を

$$[N_{ij}] := \begin{pmatrix} N_{11} & \cdots & N_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ N_{l1} & \cdots & N_{ll} \end{pmatrix} \quad \text{但し、} N_{ij} \in \mathbb{Z}[[t]]$$

と定義する。

$J = [a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とする。また、任意の $n \geq 0$ に対して、 J の内部で、 $f^{on}(x) - c_i$ が符号を変える回数を $\gamma_{in}(J)$ 、 $\gamma_i(J) = \sum_n \gamma_{in}(J)t^n$ とおく。

定理 1

$$\theta(b-) - \theta(a+) = \gamma_1(J)\nu_1 + \cdots + \gamma_{l-1}(J)\nu_{l-1}.$$

ここで、 $[N_{ij}]$ の 1 列を省くと正方行列になり、その逆行列 $[M_{jk}]$ が計算できる。

定理 1 と $[M_{jk}]$ によって、

$$\gamma_k(J) = \sum_{j=1}^{l-1} (\Theta_j(b-) - \Theta_j(a+)) M_{jk}$$

と計算される。これらによって次の定理が成立する。

定理 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = \frac{1 + \gamma_1(J) + \cdots + \gamma_{l-1}(J)}{1 - t}.$$

この定理によって、topological entropy が計算できる。

例 4 B_{1+2}^+ タイプの中心 $(A, B) = (0.71327, 0.12977)$ の topological entropy を求める。

$$\theta_*(C1+) = (I_2, -I_3, -I_2, I_2, -I_3, -I_3, -I_2, I_3, I_3, \dots)$$

$$\theta_*(C1-) = (I_1, I_3, I_2, -I_2, I_3, I_3, I_2, -I_3, -I_3, \dots)$$

$$\theta_*(C2+) = (I_3, I_2, -I_3, -I_3, -I_2, I_3, I_3, I_2, -I_3, \dots)$$

$$\theta_*(C2-) = (I_2, -I_2, I_3, I_3, I_2, -I_3, -I_3, -I_2, I_3, \dots)$$

invariant coordinate $\theta(x)$ は、

$$\begin{aligned}\theta(C1+) &= I2 - I3t - I2t^2 + I2t^3 - \dots \\ \theta(C1-) &= I1 + I3t + I2t^2 - I2t^3 + \dots \\ \theta(C2+) &= I3 + I2t - I3t^2 - I3t^3 - \dots \\ \theta(C2-) &= I2 - I2t + I3t^2 + I3t^3 + \dots\end{aligned}$$

kneading increment ν_i は、

$$\begin{aligned}\nu_1 &:= \theta(C1+) - \theta(C1-) \\ &= (I2 - I1) - 2I3t - 2I2t^2 + 2I3t^3 - \dots \\ &= -I1 + \frac{1 - 2t^2 + 3t^3 - 2t^5}{1 + t^3} I2 + \frac{-2t - 4t^4 - 2t^5}{1 + t^3} I3 \\ \nu_2 &:= \theta(C2+) - \theta(C2-) \\ &= (I3 - I2) + 2I2t - 2I3t^2 - 2I3t^3 - \dots \\ &= \frac{-t^3 + 2t - 1}{1 + t^3} I2 + \frac{-t^3 - 2t^2 + 1}{1 + t^3} I3\end{aligned}$$

となる。これより、kneading matrix $[N_{ij}]$ と、 $[N_{ij}]$ より導かれる $[M_{ij}]$ は、

$$\begin{aligned}[N_{ij}] &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{1 - 2t^2 + 3t^3 - 2t^5}{1 + t^3} & \frac{-2t - 4t^4 - 2t^5}{1 + t^3} \\ 0 & \frac{-t^3 + 2t - 1}{1 + t^3} & \frac{-t^3 - 2t^2 + 1}{1 + t^3} \end{pmatrix} \\ [M_{ij}] &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1 - 2t + 3t^3 - 2t^5}{1 + t^3} \\ 0 & \frac{1 - 2t + t^3}{1 - 2t + t^3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

十分大きな $K \in \mathbb{R}$ をとる。 $J = [-K, K]$ とする。

$$\begin{aligned}\theta_*(K) &= (I3, I3, I3, \dots) \\ \theta_*(-K) &= (I1, I1, I1, \dots)\end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned}\theta(K) - \theta(-K) &= (I3 - I1)(1 + t + t^2 + t^3 + \dots) \\ &= -\frac{1}{1-t} I1 + \frac{1}{1-t} I3,\end{aligned}$$

$$\Theta_1(K) - \Theta_1(K) = -\frac{1}{1-t}, \quad \Theta_2(K) - \Theta_2(K) = 0, \quad \Theta_3(K) - \Theta_3(K) = \frac{1}{1-t}$$

となる。また、 $\gamma_k(J)$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\gamma_1(J) &= -\frac{1}{1-t} \\ \gamma_2(J) &= \frac{-2t^4 - 2t^3 + t^2 + t - 1}{1 - 2t + t^3}\end{aligned}$$

となる。これらを使って、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} l(f^n|_J)t^{n-1} &= \frac{1}{1-t} \left(1 + \frac{1}{1-t} + \frac{-2t^4 - 2t^3 + t^2 + t - 1}{1 - 2t + t^3} \right) \\ &= \frac{3 - 2t - 2t^2 + 3t^3 + 2t^4}{(1-t)^2(1-t-t^2)} \\ &= -\sum_{m=0}^{\infty} p_m t^m \cdot \frac{1}{-1+t+t^2} \quad (p_m \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\frac{1}{-1+t+t^2}$ について考える。 $t^2+t-1=0$ の解を $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ とおく。

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^2-t-1} &= \frac{1}{(t-\alpha)(t-\beta)} \\ &= \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{\beta}\right)^l - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^l \right\} t^l\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(f^n|_J)t^{n-1} = \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} p_m t^m \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{\beta}\right)^l - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^l \right\} t^l$$

t^{n-1} の係数は、

$$l(f^n|_J) = \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha} \sum_{l+m=n-1} p_m \left\{ \left(\frac{1}{\beta}\right)^l - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^l \right\}$$

ここで、 $\frac{1}{\beta} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1}{\alpha} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 。よって、

$$l(f^n|_J)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = s$$

ゆえに、topological entropy は、

$$\log s = \log \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \quad \blacksquare$$

各タイプの中心について、topological entropy を求め、表にまとめている (Table 1 参照)。

最近、[3] の理論に基づいて、topological entropy を求めるアルゴリズム [1] が知られた。このアルゴリズムによって、equi-entropy line の図が書かれている ([2] の Fig. 15a。Fig. 5 参照)。

Table 1. type の欄の + は critical point が real であることを示す。

A	B	type	entropy	A	B	type	entropy
.47567	.33217	$C_{(2)2}^+$	0	0	-1	A_2	0
.49408	.45878	$C_{(3)2}^+$	0	-.13414	-1.37344	B_{2+2}^+	0
.62827	.04135	B_{1+3}^+	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{9}{16}$	$C_{(1)2}^+$	0
.71327	.12977	B_{1+2}^+	$\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	-.29022	-.72494	$C_{(1)4}^+$	0
.74463	.17825	B_{1+3}^+	0	-.36464	-1.09040	B_{1+2}^+	$\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$D_{2,2}$	0	-.39151	-1.24468	$C_{(1)4}^+$	$\log\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}-1}\right)$
$-\frac{1}{2}$	0	$D_{1,1}$	0	-.39736	-.31371	$C_{(2)2}^+$	0
0	0	A_1	0	-.55310	-.62882	B_{2+2}^+	$\log(1.83929)$
$\frac{1}{2}$	0	B_{1+1}	0	-.61688	-.03371	$D_{1,2}^+$	0
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$D_{2,2}$	0	-.68612	-.09508	$D_{1,4}^+$	0
				-.74959	-.18679	$C_{(3)1}^+$	0
				$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{16}$	$C_{(2)1}^+$	$\log(2)$
				-.75040	-.18820	$C_{(3)1}^+$	0
				-.77730	-.23908	$D_{1,3}^+$	0
				-.782063	-.248882	$C_{(4)1}^+$	$\log\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$
				-.9	-.4	—	$\log(1 + \sqrt{2})$

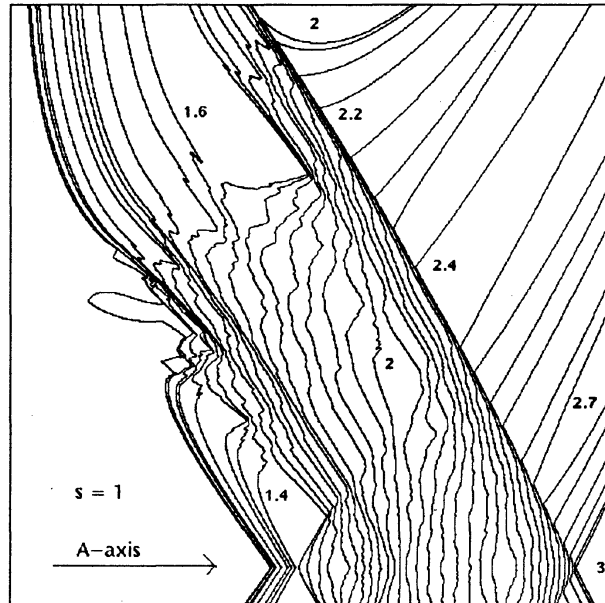


Fig. 5. Equi-entropy line の図. パラメータ平面内の $[.57, 1.03] \times [-.03, .43]$ の部分

参考文献

- [1] L. Block and J. Keesling. Computing the topological entropy of maps of the interval with three monotone pieces. *Journal of Statistical Physics*, 66:755-774, 1992.
- [2] J. Milnor. Remarks on iterated cubic maps. Preprint # 1990/6, SUNY StonyBrook.
- [3] J. Milnor and W. Thurston. On iterated maps of the interval. *L. N. Math.*, 1342, Springer-Verlag, 465-563, 1988.
- [4] A. Nojiri and K. Nishizawa. Moduli space of real cubic polynomials. *Sūshiki-shori*, 1, 56-59, 1992. to appear.