

対称 Hadamard 型 spin model

九大・理 山田美枝子 (Mieko Yamada)

1 Jones [8] は 1989 年に link の不変量を求めるために spin model の概念を導入した。その後 綿谷-宗政 [9] により、対称性をとり除いた spin model の一般化が行われた。最近、坂内-坂内 [2] は 綿谷-宗政 により一般化された spin model をさらに一般化した。

定義 [2] X を有限集合で $|X| = n = D^2$ とする。 $X \times X$ から \mathbb{C} への関数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ が次の条件をみたすとき $(X, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ は loop variable D をもつ generalized spin model という。

$$(1) \omega_1(\alpha, \beta) \omega_3(\beta, \alpha) = 1, \quad \omega_2(\alpha, \beta) \omega_4(\beta, \alpha) = 1 \quad \forall \alpha, \beta \in X$$

$$(2) \sum_{x \in X} \omega_1(\alpha, x) \omega_3(x, \beta) = n \delta_{\alpha, \beta}, \quad \sum_{x \in X} \omega_2(\alpha, x) \omega_4(x, \beta) = n \delta_{\alpha, \beta} \quad \forall \alpha, \beta \in X$$

$$(3a) \sum_{x \in X} \omega_1(\alpha, x) \omega_1(x, \beta) \omega_4(r, x) = D \omega_1(\alpha, \beta) \omega_4(r, \alpha) \omega_4(r, \beta)$$

$$(3b) \sum_{x \in X} \omega_1(x, \alpha) \omega_1(\beta, x) \omega_4(x, r) = D \omega_1(\beta, \alpha) \omega_4(\alpha, r) \omega_4(\beta, r)$$

$$\forall \alpha, \beta, r \in X$$

こうして定義された generalized generalized spin model から向き付き link の diagram の partition function が定義され link の不変量が与えられる。

2 行列 W_i ($i=1, 2, 3, 4$) を $W_i = (\omega_i(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in X}$ で定義する。

$W_1, W_2 \in \{W_\varepsilon, W_{\varepsilon'}^t\}$, $W_3, W_4 \in \{W_\varepsilon, W_{\varepsilon'}^t\}$ である generalized generalized spin model を Jones 型 generalized spin model,

$W_1, W_4 \in \{W_\varepsilon, W_{\varepsilon'}^t\}$, $W_2, W_3 \in \{W_{\varepsilon'}, W_{\varepsilon'}^t\}$ であるものを pseudo-Jones 型 generalized spin model, $W_1, W_3 \in \{W_\varepsilon, W_{\varepsilon'}^t\}$,

$W_2, W_4 \in \{W_{\varepsilon'}, W_{\varepsilon'}^t\}$ であるものを Hadamard 型 generalized spin model と呼ぶ。ただし $\{\varepsilon, \varepsilon'\} = \{+, -\}$, W^t は W の転置行列。

野村[10]は、任意の n 次 Hadamard 行列から loop variable $4\sqrt{n}$ をもつ Jones 型 spin model が構成できることを示した。

ここでは Hadamard 型の中で、特に対称 Hadamard 型と呼ばれるものを取り扱う。

定義[2] (X, ω_+, ω_-) が次の条件をみたすとき、対称 Hadamard 型 spin model とよぶ。

$$(0) \quad \omega_+(\alpha, \beta) = \omega_+(\beta, \alpha), \quad \omega_-(\alpha, \beta) = \omega_-(\beta, \alpha)$$

$$(1H) \quad W_+ \circ W_+ = J, \quad W_- \circ W_- = J, \quad \circ \text{ は Hadamard 積. } J \text{ は成分が } \alpha \approx 2 \text{ の正方形行列.}$$

$$(2H) \quad W_+^2 = nI, \quad W_-^2 = nI, \quad I \text{ は単位行列.}$$

$$(3a) \quad \sum_{x \in X} \omega_{\varepsilon'}(\alpha, x) \omega_{\varepsilon'}(x, \beta) \omega_{\varepsilon'}(x, \gamma) = D \omega_{\varepsilon'}(\alpha, \beta) \omega_{\varepsilon'}(\alpha, \gamma) \omega_{\varepsilon'}(\beta, \gamma)$$

$W_+ = W_-$ であれば Jones 型でも pseudo-Jones 型でもある。

3 定理 1 $H = (h_{ij})$ を n 次 Hadamard 行列とする。行列 $M = (m_{xy})$

$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ を次で定義する。

$$m_{xy} = h_{x_1 x_2} h_{y_1 y_2} h_{x_1 y_2} h_{y_1 x_2}$$

このとき、 M は n^2 次正則対称 Hadamard 行列である。

(証明) $Z = (z_1, z_2)$ とおく。

$$\begin{aligned} \sum_z m_{xz} m_{yz} &= \sum_{z_1, z_2} h_{x_1 x_2} h_{z_1 z_2} h_{x_1 z_2} h_{z_1 x_2} h_{y_1 y_2} h_{z_1 z_2} h_{y_1 z_2} h_{z_1 y_2} \\ &= h_{x_1 x_2} h_{y_1 y_2} \sum_{z_1} h_{z_1 x_2} h_{z_1 y_2} \sum_{z_2} h_{x_1 z_2} h_{y_1 z_2} \end{aligned}$$

$$\sum_{z_2} h_{x_1 z_2} h_{y_1 z_2} = \begin{cases} n & x_1 = y_1 \text{ のとき} \\ 0 & x_1 \neq y_1 \text{ のとき} \end{cases}, \quad \sum_{z_1} h_{z_1 x_2} h_{z_1 y_2} = \begin{cases} n & x_2 = y_2 \text{ のとき} \\ 0 & x_2 \neq y_2 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\text{から} \quad \sum_z m_{xz} m_{yz} = \begin{cases} n^2 & (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \text{ のとき} \\ 0 & (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2) \text{ のとき} \end{cases}$$

とより、 M は Hadamard 行列である。対称であることは定義より明らか。

明らか。

$$\begin{aligned} \sum_y m_{xy} &= \sum_{y_1, y_2} h_{x_1 x_2} h_{y_1 y_2} h_{x_1 y_2} h_{y_1 x_2} \\ &= h_{x_1 x_2} \sum_{y_1} h_{y_1 x_2} \sum_{y_2} h_{y_1 y_2} h_{x_1 y_2} \\ &= h_{x_1 x_2} \cdot h_{x_1 x_2} \cdot n \\ &= n \end{aligned}$$

正則である。

n 次 Hadamard 行列から n^2 次正則対称 Hadamard 行列を構成さ

れることは、すでに Goethals - Seidel [5] により証明されているが、定理1の構成法とは異なる。Ivanov - Chuvpava [6] によつて、任意の Hadamard 行列からつうす4の symmetric amorphous association scheme が得られることが示されたが、定理1の構成法から得られる Hadamard 行列は、この amorphous association scheme で relation R_1, R_2, R_3 を合併したつうす2の association scheme (strongly regular graph) に対応する。

4 $4n$ 次 Hadamard 行列 $H = (h_{ij})$ の成分1を0, -1を1に変えて $GF(2)$ の元として見たものを2進 Hadamard 行列 $B = (b_{ij})$ としよう。(1, -1) Hadamard 行列の直交性は、2進 Hadamard 行列では2つの行(列)ベクトルの Hamming 距離が $2n$ であることに対応する。

$\Omega = \{1, 2, \dots, 4n\}$ の4点部分集合 $I = (i_1, i_2, i_3, i_4)$ について

$$N_I = \sum_{j=1}^{4n} (b_{i_1 j} + b_{i_2 j} + b_{i_3 j} + b_{i_4 j}) \pmod{2}$$

とおく。 I を固定したとき N_I は列に関する Hadamard 変換により不変である。

次に

$$S_k = \#\{I = (i_1, i_2, i_3, i_4) ; N_I = k\}$$

$$C_k = S_k + S_{4n-k}$$

とおくと C_k は Hadamard 変換に対して不変である。

補助定理2 $B = (b_{ij})$ から相異なる3行 (i_1, i_2, i_3) をとりだ

して固定する。4点集合 (i_1, i_2, i_3, i_4) , $i_4 \neq i_1, i_2, i_3$ について

$N_I = 0$ または $4n$ となる行 i_4 が存在すれば唯一つである。

(証明) $N_I = 0$ または $4n$ となる行が2つ, x, y , 存在したとすると。

$x \neq y$ であるとする。 x 行と y 行の Hamming 距離は $2n$ に

ならない。

補助定理3 $B = (b_{ij})$ からとりだした任意の相異なる3行に

対し $N_I = 0$ または $4n$ となる行が必ず存在するならば

$$C_0 = \frac{1}{4} \binom{4n}{3}$$

である。逆も成り立つ。

(証明) $R = \{(i_1, i_2, i_3, i_4) ; N_I = 0 \text{ または } 4n\}$ とおく。 B の相異なる

3行に対し $N_I = 0$ または $4n$ となる行が必ず存在するとする。

仮定から、 R に含まれる4点集合から作られる3点集合はす

べて異なる。故に

$$4r = 4C_0 = \binom{4n}{3}.$$

逆に $C_0 = \frac{1}{4} \binom{4n}{3}$ とおくと、これは任意の相異なる3行に対

し $N_I = 0$ または $4n$ となる行が必ず1行あることを意味する。

5 定理4 $H = (h_{ij})$ と

$$(*) C_0 = \frac{1}{4} \binom{4n}{3}, C_{2n} = \binom{4n}{4} - \frac{1}{4} \binom{4n}{3}, C_l = 0 \quad l \neq 0, 2n \text{ のとき}$$

をみたす類に属する $4n$ 次 $(1, -1)$ Hadamard 行列とす。

このとき定理1によつて作られた $(4n)^2$ 次正則対称 Hadamard 行列 $W = W_+ = W_-$ は loop variable $4n$ をもつ generalized spin model に属する。

もし H と H^r の両方とも (4) を満たせば W も (4) を満たす類に属し、 H から loop variable $(4n)^{2l}$, l 正整数, をもつ generalized spin model の無限系列が得られる。

(証明) 条件 (4) は $(1, -1)$ Hadamard 行列において 2 は、相異なる 3 行 i_1, i_2, i_3 行, とりだし固定するとき

$$\sum_{j=1}^{4n} h_{i_1 j} \cdot h_{i_2 j} \cdot h_{i_3 j} \cdot h_{i_4 j}$$

が、ある行 i_4 について $\pm 4n$ とはり、それ以外の行については 0 となることを意味する。

定義の $(0), (1H), (2H)$ が成り立つことは明らか、(3a) で α, β, γ のうち、少くとも 2 つが一致するときは Hadamard 行列 W の正則性に帰着する。そこで α, β, γ は相異なると仮定する。

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \beta = (\beta_1, \beta_2), \gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ とおく。(3a) の右辺は

$$\begin{aligned} & D\omega(\alpha, \beta)\omega(\alpha, \gamma)\omega(\beta, \gamma) \\ &= (4n) h_{\alpha_1 \alpha_2} h_{\beta_1 \beta_2} h_{\alpha_1 \beta_2} h_{\beta_1 \alpha_2} h_{\alpha_1 \alpha_2} h_{\gamma_1 \gamma_2} h_{\beta_1 \gamma_2} h_{\alpha_1 \gamma_2} h_{\gamma_1 \gamma_2} h_{\beta_1 \beta_2} h_{\alpha_1 \beta_2} h_{\beta_1 \alpha_2} \\ &= (4n) h_{\alpha_1 \beta_2} h_{\beta_1 \alpha_2} h_{\beta_1 \gamma_2} h_{\gamma_1 \beta_2} h_{\alpha_1 \gamma_2} h_{\gamma_1 \alpha_2} \end{aligned}$$

となる。(3a) の左辺を計算する。

$$\begin{aligned} S &= \sum_{x \in X} \omega(\alpha, x)\omega(x, \beta)\omega(x, \gamma) \\ &= h_{\alpha_1 \alpha_2} h_{\beta_1 \beta_2} h_{\gamma_1 \gamma_2} \sum_{x_1} h_{x_1 \alpha_2} h_{x_1 \beta_2} h_{x_1 \gamma_2} \sum_{x_2} h_{x_2 \alpha_1} h_{\alpha_1 x_2} h_{\beta_1 x_2} h_{x_2 \gamma_1} \end{aligned}$$

$\sum_{x_2} h_{x_1 x_2} h_{\alpha, x_2} h_{\beta, x_2} h_{\gamma, x_2}$ はある行 $x_1 = \eta$ について $\pm 4n$ で他の行について
 2 は 0 であるから

$$S = h_{\alpha, \alpha_2} h_{\beta, \alpha_2} h_{\gamma, \alpha_2} h_{\eta, \alpha_2} h_{\eta, \beta_2} h_{\eta, \gamma_2} (\pm 4n)$$

とある。 $\sum_{x_2} h_{\eta, x_2} h_{\alpha, x_2} h_{\beta, x_2} h_{\gamma, x_2} = 4n$ (resp. $-4n$) のとき

$$h_{\eta, \alpha_2} h_{\alpha, \alpha_2} h_{\beta, \alpha_2} h_{\gamma, \alpha_2} = h_{\eta, \beta_2} h_{\alpha, \beta_2} h_{\beta, \beta_2} h_{\gamma, \beta_2} = h_{\eta, \gamma_2} h_{\alpha, \gamma_2} h_{\beta, \gamma_2} h_{\gamma, \gamma_2} = 1 \text{ (resp. } -1)$$

である。従って

$$S = 4n h_{\beta, \alpha_2} h_{\alpha, \beta_2} h_{\gamma, \alpha_2} h_{\alpha, \gamma_2} h_{\beta, \gamma_2} h_{\gamma, \beta_2}$$

とあり (3a) が成り立つ。

次に H と H^c の両方とも条件 (*) を満たす。 $Z = (z_1, z_2)$ と

おいて

$$\theta = \sum_Z \omega(\alpha, z) \omega(\beta, z) \omega(\gamma, z) \omega(x, z)$$

$$= h_{\alpha, \alpha_2} h_{\beta, \beta_2} h_{\gamma, \gamma_2} h_{x, x_2} \sum_{z_1} h_{z_1, \alpha_2} h_{z_1, \beta_2} h_{z_1, \gamma_2} h_{z_1, x_2} \sum_{z_2} h_{\alpha, z_2} h_{\beta, z_2} h_{\gamma, z_2} h_{x, z_2}$$

$\sum_{z_2} h_{\alpha, z_2} h_{\beta, z_2} h_{\gamma, z_2} h_{x, z_2}$ はある行 $x_1 = \xi$ について $\pm 4n$ である。また H^c は
 条件 (*) を満たすから $\sum_{z_1} h_{z_1, \alpha_2} h_{z_1, \beta_2} h_{z_1, \gamma_2} h_{z_1, x_2}$ もある列 $x_2 = \eta$ について
 $\pm 4n$ である。よって θ は (ξ, η) について

$$\theta = h_{\alpha, \alpha_2} h_{\beta, \beta_2} h_{\gamma, \gamma_2} h_{\xi, \eta} (\pm 4n)^2 (\pm 4n)^2 = \pm (4n)^2$$

で、他の (x_1, x_2) については 0 である。

$4n=8$ のときは同値類は 1 つであるが、(*) を満たす。 $4n=12$ のときも同値類は 1 つであるが (*) は満たさない。 $4n=16$ のときは Hall の分類でクラス I が (*) を満たす。

参考文献

- [1] E. Bannai and E. Bannai, Spin model on finite cyclic groups, preprint.
- [2] E. Bannai and E. Bannai, Generalized generalized spin models, preprint.
- [3] E. Bannai and T. Ito, Algebraic Combinatorics I: Association Schemes, Benjamin/Cummings, 1984.
- [4] A. Brouwer, A. M. Cohen and A. Neumaier, Distance Regular Graphs, Springer-Verlag, 1989.
- [5] J. M. Goethals and J. J. Seidel, Strongly regular graphs derived from combinatorial designs, Can. J. Math. 12 (1970), 597-614.
- [6] A. A. Ivanov and I. V. Chuvpova, Action of the group M_{12} on Hadamard matrices, Investigations in Algebraic Theory of Combinatorial Objects, VNIISI, Moscow, Institute for System Studies, 1985, 159-169 (in Russian).
- [7] F. Jaeger, Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomials, Geom. Dedicata 44 (1972), 23-52.
- [8] U. F. R. Jones, On knot invariants related to some statistical mechanical models, Pac. J. Math. 137 (1989), 311-334.
- [9] A. Munemasa and Y. Watatani, Generalized spin models, in preparation.
- [10] K. Nomura, Spin models constructed from Hadamard matrices, preprint.