数理解析研究所講究録
第 849 巻 1993 年 55-60



# Reflection-Extension of Fusion Algebras

名大・理　岡 田 聡 一　(Soichi Okada)

## §1. 定義と結果.

Fusion algebra は，数理物理学（共形場理論）において重要な役割を果たしている可換代数であるが，坂内 英一氏 [B1]（[B2] も見よ）によって純代数的に次のように定式化された.

**定義.**（代数的レベルでの fusion algebra）$\mathfrak{A} = < x_0, x_1, \ldots, x_d >$ を，$x_0, \ldots, x_d$ を基底とする $\mathbb{C}$ 上の線型空間 $\mathfrak{A}$ 上に，積 $x_i x_j = \sum_{k=0}^{d} N_{ij}^k x_k$ が定義された代数とする．これが次の条件を満たすとき，$\mathfrak{A}$ を代数的レベルでの **fusion algebra** と呼ぶ.

(1) $\mathfrak{A}$ は可換な結合的代数である.

(2) $N_{ij}^k \in \mathbb{R}$.

(3) $\{0, 1, \ldots, d\}$ から $\{0, 1, \ldots, d\}$ への全単射 $\hat{}: i \mapsto \hat{i}$ が存在して次の 3 条件を満たす.

　( a) $\hat{\hat{i}} = i$.

　( b) $N_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{k}} = N_{ij}^k$.

　( c) $N_{ijk} := N_{ij}^{\hat{k}}$ は $i, j, k$ に関して対称である.

(4) $N_{0j}^k = \delta_{jk}$.

(5) $\mathfrak{A}$ の 1 次元表現 $\Delta_{\mathfrak{A}}$ で $\Delta_{\mathfrak{A}}(x_i) = \sqrt{k_i}$ $(k_i > 0)$ $(i = 0, 1, \ldots, d)$ となるものが存在する.

また，$N_{ij}^k$ がすべて非負整数であるとき，$\mathfrak{A}$ は **integral** であるという.

ここで，次の状況を考える．$\mathfrak{A} = < x_0, \ldots, x_d >$, $\mathfrak{B} = < y_0, \ldots, y_{d'} >$ を代数的レベルでの fusion algebra，$F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ を環準同型とし，

$$F(x_j) = \sum_{i=0}^{d'} F_{ij} y_i$$

と表わす．このとき，次の条件が成り立つと仮定する.

(1.1) $F_{ij} \in \mathbb{R}$.

(1.2) $F$ は全射である.

(1.3) $F_{\hat{i}\hat{j}} = F_{ij}$.

(1.4) $\Delta_{\mathfrak{B}} \circ F = \Delta_{\mathfrak{A}}$.

例 1.1. 有限群 $G$ の複素数値類関数全体のなす空間 $C(G)$ は，基底として既約指標 $\chi_0 = 1_G, \chi_1, \ldots, \chi_d$ をとり，積を $\chi_i \otimes \chi_j = \sum_{k=0}^{d} N_{ij}^k \chi_k$ と定義することによって，integral な fusion algebra となる．$H$ を $G$ の部分群とし，$F = \mathrm{Res}_H^G : C(G) \to C(H)$ を $G$ 上の関数の $H$ への制限とすると，上の仮定 (1.1), (1.3), (1.4) が成り立つ．このとき，$F$ が全射となるための必要十分条件は，任意の $h \in H$ に対して，$h$ の $G$-共役類と $H$ との共通部分が 1 つの $H$-共役類となることである．

例 1.2. $\mathfrak{A}$ を任意の fusion algebra，$\mathfrak{B} = \mathbf{C}$ を 1 次元の fusion algebra とする．このとき，$F$ として，定義の条件 (5) に現われる $\Delta_{\mathfrak{A}}$ をとると，上の仮定 (1.1) - (1.4) が満たされる．

上の状況のもとで，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ の線型空間としての直和 $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ の上に可換な積を次のように定義する．$x, x' \in \mathfrak{A}$, $y, y' \in \mathfrak{B}$ に対して，

$$(x \oplus y)(x' \oplus y') = (xx' + F^*(yy')) \oplus (F(x)y' + yF(x') + FF^*(yy') - yy')$$

ここで，$F^*(y_i) = \sum_{j=0}^{d} F_{ij} x_j$ である．

定理 1.3. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $F$ が仮定 (1.1) - (1.4) を満たすとき，上のようにして定義した $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ 上の積は，結合的である．そして，$\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ は，基底 $\{x_i \oplus 0 : i = 0, \ldots, d\} \cup \{0 \oplus y_j : j = 0, \ldots, d'\}$ に関して fusion algebra となる．さらに，$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ が integral であり，$F_{ij}$ が全て非負整数であるならば，fusion algebra $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ も integral となる．

このようにしてできた fusion algebra $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ を $\mathfrak{E}(\mathfrak{A} \xrightarrow{F} \mathfrak{B})$ と表わす．

命題 1.4. $\widetilde{F} : \mathfrak{E}(\mathfrak{A} \xrightarrow{F} \mathfrak{B}) \to \mathfrak{A}$ を $\widetilde{F}(x \oplus y) = x + F^*(y)$ によって定義すると，$\widetilde{F}$ は環準同型となり，仮定 (1.1) - (1.4) を満たす．

従って，上の構成は次々と繰り返すことができる．

## §2. Differential poset.

R. Stanley **[S1]** は，differential poset と呼ばれる半順序集合のクラスを定義したが，このクラスの半順序集合はその chain の個数などに関して多くの興味深い性質を持っている．§.1 の fusion algebra の構成は，以下に述べる differential poset の reflection-extension による構成に示唆されたものである．

$P$ を半順序集合 (poset = partially ordered set) とする．$x, y \in P$ に対して，$x > y$ であり $x > z > y$ となる元 $z$ が存在しないとき，$x$ は $y$ を覆う (cover) といい，$x \triangleright y$ と表わす．そして，

$$C^+(x) = \{y \in P : y \triangleright x\}, \quad C^-(x) = \{y \in P : y \triangleleft x\}$$

とおく．半順序集合 $P$ が $P = \coprod_{n \geq 0} P_n$ と部分集合 $P_n$ の disjoint union に分割され，$x \in P_n, x \triangleright y \Longrightarrow y \in P_{n-1}$ が成り立つとき，$P$ は graded poset であるという．また，$P$ の任意の区間 $[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$ が有限集合であるとき，$P$ は locally finite であるという．

**定義．** ([**S1**]) $r$ を正整数とする．半順序集合 $P$ は次の条件を満たすとき，**$r$-differential poset** であるという．

(D1) $P$ は locally finite な graded poset であり，最小元 $\hat{0}$ を持つ．

(D2) $x, y \in P$ に対して，$x \neq y$ ならば，$\#(C^-(x) \cap C^-(y)) = \#(C^+(x) \cap C^+(y))$

(D3) $x \in P$ に対して，$\#C^+(x) = r + \#C^-(x)$.

$P$ を locally finite poset とし，各 $x \in P$ に対して $C^+(x)$ が有限集合であるとする．$\mathbb{C}P$ を $P$ の元を基底とする $\mathbb{C}$ 線型空間とする．$\mathbb{C}P$ 上の線型変換 $U$, $D$ を

$$Ux = \sum_{y \triangleright x} y, \quad Dx = \sum_{y \triangleleft x} y$$

によって定義する．このとき，$r$-differential poset の定義は次のように言い替えることができる．

**命題 2.1.** $P$ が $r$-differential poset の条件 (D1) を満たし，各 $P_n$ が有限集合であるとする．このとき，次は同値である．

(1) $P$ は $r$-differential poset である．

(2) $DU - UD = rI$.

この関係式を用いることによって，differential poset に関する数え上げ問題を解くことができる．特に，

**命題 2.2.** $P$ を $r$-differential poset とする．$x \in P_n$ に対して，

$$e(x) = \#\{(x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) : x^{(0)} = \hat{0}, x^{(n)} = x, x^{(i+1)} \triangleright x^{(i)} (i = 0, \ldots, n-1)\}$$

とおくと，

(1) $\sum_{x \in P_n} e(x)^2 = r^n n!$.

(2) $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{x \in P_n} e(x)\right) t^n / n! = \exp(rt + rt^2/2)$.

さて，1-differential poset の典型的な例は，分割全体が Young 図形の包含関係に関してなす Young 束 $\mathbf{Y}$ である．Young 束の場合，$\mathbb{C}\mathbf{Y}$, $U$, $D$ は次のように表現論な意味を持っている．$n$ の分割 $\lambda \in \mathbb{C}\mathbf{Y}_n$ と $\lambda$ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の既約指標 $\chi^\lambda \in C(\mathfrak{S}_n)$ を同一視することによって，$\mathbb{C}\mathbf{Y}_n$ は $C(\mathfrak{S}_n)$ と同一視され，fusion algebra の構造が入る．このとき，$D : \mathbb{C}\mathbf{Y}_n \to \mathbb{C}\mathbf{Y}_{n-1}$ は制限写像 $\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-1}} : C(\mathfrak{S}_n) \to C(\mathfrak{S}_{n-1})$ と対応し，環準同型となり，$U : \mathbb{C}\mathbf{Y}_n \to \mathbb{C}\mathbf{Y}_{n+1}$ は誘導写像 $\mathrm{Ind}^{\mathfrak{S}_{n+1}}_{\mathfrak{S}_n}$ となる．よって次の問題が考えられる．

**問題．** 1-differential poset $P$ に対して，各 $\mathbb{C}P_n$ に $D|_{\mathbb{C}P_n}$ が環準同型となるような fusion algebra の構造が入るか？

1-differential poset を作り出す方法として，次の reflection-extension がある．( [**S1**, §6] を見よ．) $P = \coprod_{i=0}^n P_i$ を graded poset とし，$0 \leq i \leq n-1$ に対して，$(DU - UD)|_{\mathbb{C}P_i} = I_{\mathbb{C}P_i}$ を満たしているとする．このとき，

$$P_{n+1} = \{(1, x) : x \in P_n\} \cup \{(2, y) : y \in P_{n-1}\}$$

とおき，$P_n$ と $P_{n+1}$ の間の半順序を

$$C^-(1, x) = \{x\}, \quad C^-(2, y) = C^+(y) \qquad (x \in P_n, y \in P_{n-1})$$

によって定義する．すると，$E(P) = P \coprod P_{n+1}$ は，$0 \leq i \leq n+1$ に対して，$(DU - UD)|_{\mathbb{C}P_i} = I_{\mathbb{C}P_i}$ を満たす graded poset となる．よって，これを繰り返し $E^0(P) = P$, $E^{k+1}(P) = E(E^k(P))$ と定義すると，

$$E^\infty(P) = \lim_{n \to \infty} E^n(P)$$

は 1-differential poset となる．

§1 の fusion algebra の構成はこの differential poset の構成と対応している．つまり，fusion algebra $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ がそれぞれ $P_n$, $P_{n-1}$ の元と対応した基底を持ち，$\mathfrak{A} = \mathbb{C}P_n$, $\mathfrak{B} = \mathbb{C}P_{n-1}$ と同一視するとき，$F = D|_{\mathbb{C}P_n}$ が仮定 (1.1)-(1.4) を満たしているとする．このとき，$\mathfrak{C}(\mathfrak{A} \xrightarrow{F} \mathfrak{B})$ は $P_{n+1}$ の元と対応した基底を持ち，$\mathfrak{C}(\mathfrak{A} \xrightarrow{F} \mathfrak{B}) = \mathbb{C}P_{n+1}$ と思うと，命題 1.4 の $\widetilde{F}$ は $D|_{\mathbb{C}P_{n+1}}$ と一致する．

## §3. Association scheme.

可換な association scheme があると，2 通りの方法で代数的レベルでの fusion algebra が得られる．$\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \le i \le d})$ を可換な association scheme とし，$A_i$ を $R_i$ に対応する隣接行列とする．このとき，$\mathcal{X}$ の Bose-Mesner algebra $\mathfrak{A} = < A_0, A_1, \ldots, A_d >$ は行列の通常の積と基底 $A_i/\sqrt{k_i}$ ( $k_i$ は $R_i$ の valency ) に関して，fusion algebra となる．この fusion algebra を $\mathfrak{A}(\mathcal{X})$ と表わす．また，$\mathfrak{A}$ は行列の Hadamard 積と基底 $nE_i/\sqrt{m_i}$ ( $n = |X|$ であり，$E_i$ は $\mathfrak{A}$ の原始巾等元，$m_i = \operatorname{rank} E_i$) に関しても fusion algebra となる．この fusion algebra を $\mathfrak{A}^*(\mathcal{X})$ と表わす．

一般に，$\mathfrak{A} = C(G)$, $\mathfrak{B} = C(H)$, $F = \operatorname{Res}_H^G$ のときでも，§1 で構成した fusion algebra $\mathfrak{C}(C(G) \overset{\mathrm{Res}}{\to} C(H))$ は association scheme に対応しているとは限らない．しかし，$\mathfrak{A}$ が association scheme $\mathcal{X}$ に対応しているとき，例 1.2 の状況からできる $\mathfrak{C}(\mathfrak{A} \to \mathbb{C})$ は次のように association scheme と対応している．まず，$\mathfrak{C}(\mathfrak{A}(\mathcal{X}) \to \mathbb{C})$ は，

$$\begin{aligned}\widetilde{A_i} &= A_i \otimes I_{n+1} \quad (i = 0, \ldots, d)\\ \widetilde{A_{d+1}} &= J_n \otimes (J_{n+1} - I_{n+1})\end{aligned}$$

を隣接行列とする association scheme $\widetilde{\mathcal{X}}$ からできる fusion algebra となる:

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{A}(\mathcal{X}) \to \mathbb{C}) \cong \mathfrak{A}(\widetilde{\mathcal{X}})$$

また，$\mathfrak{C}(\mathfrak{A}^*(\mathcal{X}) \to \mathbb{C})$ は，

$$\begin{aligned}\widehat{A_0} &= A_0 \otimes I_{n+1}\\ \widehat{A_i} &= A_i \otimes J_{n+1} \quad (i = 1, \ldots, d)\\ \widehat{A_{d+1}} &= A_0 \otimes (J_{n+1} - I_{n+1})\end{aligned}$$

を隣接行列とする association scheme $\widehat{\mathcal{X}}$ ([M]) によって,

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{A}^*(\mathcal{X}) \to \mathbf{C}) \cong \mathfrak{A}^*(\widehat{\mathcal{X}})$$

となる.

## References


**[B1]** E. Bannai, *Association schemes and fusion algebras (an introduction)*, preprint.

**[B2]** ———, 代数的組合せ論 －アソシエーションスキームの最近の話題 －, 数学 **45** (1993), 55–75.

**[M]** A. Munemasa, *On nonsymmetric P- and Q-polynomial association schemes*, J. Combin. Theory Ser. B **51** (1991), 314–328.

**[O1]** S. Okada, *Algebras associated to the Young-Fibonacci lattice*, preprint.

**[O2]** ———, *Reflection-extension of fusion algebras*, in preparation.

**[S1]** R. P. Stanley, *Differential posets*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 919–961.

**[S2]** ———, *Variations on differential posets*, in “Invariant Theory and Tableaux (D. Stanton ed.),” The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications 19, Springer, New York, 1988, pp. 145–165.