

## 一様剪断乱流の発達のカテゴリ

京大・理 田中満 (Mitsuru Tanaka)  
京大・数理研 木田重雄 (Shigeo Kida)

### 1. はじめに

直接数値計算によって得られたデータを用いて、一様剪断乱流の発達過程のカテゴリを行なう。一般に、乱流は剪断流において励起されるが、乱流エネルギーを生成する”乱れと平均剪断流の相互作用”は乱流力学の最も基本的な問題の一つである。この乱れと平均流の相互作用が存在する中で最も簡単な速度分布をもつものが一様剪断乱流である。一様剪断乱流のさまざまな状況での発達を知ることは乱流モデルの検証に役立つとともに、乱流境界層など実際の剪断流における乱流の発達過程を知る上でも重要である。

Rose<sup>1</sup> に始まり、いくつかの一様剪断流の実験が行なわれてきた。Champagne *et al.*<sup>2</sup> (CHC)、Rose<sup>3</sup>、Mulhearn and Luxton<sup>4</sup> (ML) などにより得られた主な結果は、(i) 下流に行くに従って積分距離とテイラー長は成長し続ける、(ii) レイノルズ応力テンソル、速度相関、エネルギースペクトルなどが相似的に発達する、(iii) 乱流強度は減少しながらある値に漸近する、などである。Harris *et al.*<sup>5</sup> (HGC) は、さらに長時間の乱流の発達の様子を観測し、エネルギーは初期に最小値をとった後、下流に行くにつれて線形に増加することを発見した。また、この実験結果が主流が流れ方向によらず一定という仮定から導き出せる結果と一致することを示した。さらに、積分距離は単調に増加するものの、テイラー長はほぼ一定であるとの結果を得た。他方、Tavoularis and Corrsin<sup>6</sup> (TC) は、時間に関してエネルギーは2乗で、積分距離は線形に増加することを発見した。Tavoularis<sup>7</sup> は同じ TC のデータや Karnik and Tavoularis<sup>8</sup> (KT) のデータを指数関数と比較し、彼の準解析理論の予想と一致していることを示した。Rohr *et al.*<sup>9</sup> は、水槽実験によりエネルギーが時間の2乗で増加することを示し、主流の中央での値を用いて規格化するとその発達の様子が剪断の強さによらず普遍的であることを発見した。Tavoularis and Karnik<sup>10</sup> (TK) は、エネル

ギーが指数的に増加するものとはほぼ一定のもの2種類の乱流状態があることを示した。

一方、一様剪断流の直接数値計算は Rogallo<sup>11</sup> によって初めて行なわれた。Rogers and Moin<sup>12</sup> (RM) は、比較的剪断の弱い場合の計算を行ない、ヘアピン状の渦構造が一様剪断流中に現れることを示した。Lee *et al.*<sup>13</sup> (LKM) は、乱流の非等方性は剪断が強いほど大きく、壁乱流の対数境界層での値と同程度の強い剪断がある場合には、壁がなくても剪断の効果のみによりストリーク構造が現れることを発見した。

本研究では、一様剪断乱流の時間発展の様子を、剪断の強さや、乱流強度を使って分類することを試みる。また、剪断、乱流強度と非等方的性質との関係についても調べる。

## 2. 数値シミュレーション

### 2.1 基礎方程式

一様剪断乱流の時間発展の剪断の強さや乱流強度に対する依存性を調べる。ここでは、平均速度場は  $x_1$ - 方向を向き、 $x_2$ - 方向に勾配があるとする。つまり、

$$U = (Sx_2, 0, 0) \quad (2.1)$$

の形で与えられるとする。ここで、 $S$  は剪断の強さを表す量であり、また、平均流の渦度は  $(0, 0, -S)$  である。以後、速度場の平均流からのゆらぎの  $x_1, x_2, x_3$  成分をそれぞれ、 $u_1, u_2, u_3$  と書く。このとき、ナビエ-ストークス方程式と連続の式は、

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2a, b)$$

と書ける。ここで、 $\partial_t = \partial/\partial t$ 、 $p$  は圧力、 $\nu$  は流体の動粘性率である。ただし、流体の密度を1とした。(2.2a) の左辺の第2項、第3項は、それぞれ平均流によるゆらぎの場の移流の効果、平均流からゆらぎの場へのエネルギーの流入を表す項である。平均流 (2.1) に対して (2.2a, b) は、

$$\partial_t u_i + Sx_2 \partial_1 u_i + Su_2 \delta_{i1} + (u_k \partial_k) u_i = -\partial_i p + \nu \nabla^2 u_i, \quad \partial_k u_k = 0 \quad (2.3a, b)$$

と書き換えられる。ここに、 $\partial_i = \partial/\partial x_i$  である。

方程式 (2.3) には、座標が陽に現れるが、それを消去するために平均剪断流とともに動く座標系  $(x^*, t^*)$ 、

$$x_1^* = x_1 - Stx_2, \quad x_2^* = x_2, \quad x_3^* = x_3, \quad t^* = t \quad (2.4)$$

を導入する。そして、この座標上で周期境界条件を課して方程式を解く。<sup>11</sup> このとき、新旧座標系での微分演算子には

$$\partial_1 = \partial_1^*, \quad \partial_2 = \partial_2^* - St\partial_1^*, \quad \partial_3 = \partial_3^*, \quad \partial_t = \partial_t^* - Sx_2\partial_1^* \quad (2.5)$$

の関係がある。ここで、 $\partial_i^* = \partial/\partial x_i^*$  および  $\partial_t^* = \partial/\partial t^*$  である。このため、この動く座標系と元の座標系でのフーリエ波数の間には、元の座標系での波数を  $k$ 、動く座標系での波数を  $k^*$  として、(2.5) より

$$\mathbf{k}(t) = (k_1^*, k_2^* - Stk_1^*, k_3^*) \quad (2.6)$$

の関係がある。動く座標系での波数  $k^*$  を時間と独立にとっても、元の座標系での波数  $k$  は上式からわかるように時間とともに変化する量である。これは、主流による移流の効果を表している。

## 2.2 長さスケール、時間スケール、支配パラメター

非一様な剪断流では、乱流の振舞を規定する長さスケール、つまり積分距離は、局所的な速度勾配など流れの幾何学的な構造によって決まる。一様剪断流においては、初期のエネルギースペクトルがその後の積分距離の時間発展を決める。ここでは、その他に次の3つの長さスケール

$$l_S \equiv \left(\frac{\nu}{S}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda \equiv \frac{u'}{\omega'}, \quad l_K \equiv \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\nu}{\omega'}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7a, b, c)$$

を考える。ここで、 $u'$ 、 $\omega'$  は、それぞれ、速度場、渦度場のゆらぎの大きさ、 $\epsilon$  はエネルギー散逸率を表す。 $l_S$  は、剪断の影響と粘性の効果のつりあいを決める長さスケールであり、乱流境界層理論での粘性長に相当する。また、 $\lambda$  はテイラー長、 $l_K$  はコルモゴロフ長である。

一方、剪断の強さから決まる時間スケール、渦回転時間、コルモゴロフ時間スケールは、それぞれ、

$$\tau_S \equiv \frac{1}{S}, \quad \tau \equiv \frac{u'^2}{\epsilon}, \quad \tau_K \equiv \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\omega'} \quad (2.8a, b, c)$$

のように書き表される。これらの長さスケール、時間スケールから組み立てられる量として、レイノルズ数と剪断率パラメターを、それぞれ、以下のように定義する。

$$R_\lambda = \frac{\lambda u'}{\nu} = \frac{u'^2}{\nu \omega'} = \frac{\lambda^2}{l_K^2} = \frac{\tau}{\tau_K} \quad (2.9)$$

$$S^* = \frac{Su'^2}{\epsilon} = \frac{S}{\nu} \frac{u'^2}{\omega'^2} = \frac{\lambda^2}{l_S^2} = \frac{\tau}{\tau_S}. \quad (2.10)$$

このレイノルズ数は、テイラー長とコルモゴロフ長の比の2乗、もしくは、渦回転時間  $u'^2/\epsilon$  とコルモゴロフ時間の比の意味を持っている。一方、剪断率パラメーターは、テイラー長と粘性長の比の2乗、もしくは、渦回転時間  $u'^2/\epsilon$  と剪断の時間スケールとの比であると解釈できる。これは、実効的な剪断の強さを表す量として、Lee *et al.*<sup>13</sup> によって導入された。

### 2.3 エネルギーの時間発展

運動方程式(2.3)よりレイノルズ応力テンソルの各成分の時間発展は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle u_1^2 \rangle &= -2S \langle u_1 u_2 \rangle + \Pi_{11} - \epsilon_{11} \\ \frac{d}{dt} \langle u_2^2 \rangle &= \Pi_{22} - \epsilon_{22} \\ \frac{d}{dt} \langle u_3^2 \rangle &= \Pi_{33} - \epsilon_{33} \\ \frac{d}{dt} \langle u_1 u_2 \rangle &= -S \langle u_2^2 \rangle + \Pi_{12} - \epsilon_{12} \end{aligned} \quad (2.11a, b, c, d)$$

のように記述できる。ここで、 $\Pi_{ij} = \langle p(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \rangle$ 、 $\epsilon_{ij} = 2\nu \langle (\partial_k u_i) \partial_k u_j \rangle$  は、それぞれ、圧力-ひずみ速度相関テンソル、エネルギー散逸率テンソルである。また、 $\langle \rangle$  は空間平均を表す。(2.11)よりエネルギーは

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E} = -S \langle u_1 u_2 \rangle - \epsilon \quad (2.12)$$

のように時間発展することがわかる。ここで、 $\mathcal{E} = \frac{1}{2}u'^2$  である。(2.11d) 右辺の中で第一項が支配的であれば、 $\langle u_1 u_2 \rangle$  は負となり、(2.12)の右辺第一項はエネルギー流入を表す。なお、(2.11a)より速度場の第一成分に主流からの直接のエネルギー流入があることがわかる。剪断率で無次元化したエネルギーの成長率は、

$$\sigma \equiv \frac{1}{\mathcal{E}} \frac{d}{d(St)} \mathcal{E} = 2 \left( \frac{-\langle u_1 u_2 \rangle}{u'^2} - \frac{1}{S^*} \right) \quad (2.13)$$

のように、規格化したレイノルズ剪断応力と剪断率パラメーターによって表すことができる。(2.13)の右辺が時間によらずに一定ならば乱流強度は指数的に増加する (Tavoularis の予想)。<sup>7</sup>

### 2.4 計算スキームと初期条件

方程式 (2.3) の直接数値シミュレーションを空間微分にはスペクトル法 ( $128^3$  モード)、時間積分にはルンゲ-クッタ-ジル法を用いて行なう。計算領域の大きさは  $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$ 、 $4\pi \times 2\pi \times 2\pi$ 、 $8\pi \times 2\pi \times 2\pi$  のいずれかである。 $4\pi \times 2\pi \times 2\pi$ 、 $8\pi \times 2\pi \times 2\pi$  の場合には、それぞれ、 $x_1$  方向の格子間隔を他の 2 方向の 2 倍、4 倍にする。初期条件としては、速度のフーリエ係数の振幅をエネルギースペクトルが

$$E(k) = ck^4 \exp[-2k^2/k_0^2] \quad (2.14)$$

( $c, k_0 > 0$  は定数) となるように等方的に与える。また、フーリエ係数の位相はランダムに与える。我々は、レイノルズ数、剪断率パラメーターの初期値をいろいろと変えて数多くの数値実験を行なった。それぞれの計算における領域の大きさ、 $S, \nu, k_0, c$  の値、 $R_\lambda, S^*$  の初期値を表 1 にまとめる。

### 3. 結果

#### 3.0 相図

一様剪断乱流のパラメーター  $R_\lambda, S^*$  の時間発展を調べた。図 1 は、初期条件に対して  $R_\lambda$  と  $S^*$  の時間発展を両対数グラフ上にプロットしたものである。図 1 (a) は、 $R_\lambda \rightarrow 0$  の振舞を見るために線形化した方程式を解いた (Rapid Distortion Theory) 結果である。ただし、このときには速度ゆらぎの大きさは重要でないので、 $u'^2/\nu\omega'$  の初期値が 1 となるようにした。図 1 (b) に示したように、 $u', \omega'$  が一定となる線は、それぞれ、傾き 2、傾き 1 の直線である。図の右下にいくほど  $u', \omega'$  は大きい。 $S$  は主流の渦度の大きさを表すので、図の  $\omega' = S$  の直線上では非線形項と線形項がほぼつりあっていると考えられる。

○ のついた曲線が今回我々が行なった数値計算の結果である。● は初期の値を示し ○ は  $St = 1, 2, 3, \dots$  となる点を示す。RM、LKM と記したものは、それぞれ、Rogers and Moin、<sup>12</sup> Lee, Kim, and Moin<sup>13</sup> の数値計算の結果である。RM については、 $St = 0$  から  $St = 16$  まで、LKM については、 $St = 0$  から  $St = 12$  までの時間発展を示す。(それぞれ、 $St = 0, 2, 4, \dots$ 、 $St = 0, 4, 8, 12$  に  $\Delta$  を付けた。) CHC、TC、TK(A-P) は、それぞれ Champagne *et al.*、<sup>2</sup> Tavoularis and Corrsin、<sup>6</sup> Tavoularis and Karnik<sup>10</sup> の実験結果である。TC の 3 つの + は、それぞれ、 $St = 8.6, 10.9, 12.7$  での値である。TK の (A-P) で示される点は、実験の最終段階での値でその時刻は、 $St = 2 \sim 28$  である (TK の図 2 参照)。

#### 3.1 概要

ここでは、図 1 に示された  $R_\lambda, S^*$  の時間発展の様子を簡単にまとめる。(2.10) からわかるように、剪断率パラメーターは乱流スケール  $\lambda$  の粘性スケール  $l_S$  に対する

比の2乗である。 $S^*$  が大きいことは乱流スケールが粘性スケールより大きいこと、つまり、剪断の効果が粘性の効果と比べて大きいことと同等である。そこで、まず、剪断の効果と粘性の効果のみに注目するため、線形化した場合を調べ、次に、非線形項が加わったことによる振舞の変化を見ることにする。

(i) 線形理論 — Rapid Distortion Theory (RDT)

非粘性の場合には、エンストロフィーの増加率がエネルギーの増加率を上回り、乱流スケール  $\lambda$  は単調に減少する。粘性が加わっても、粘性の効果が比較的小さい  $S^*(0) > 8$  では、非粘性の場合と同様に初期に  $S^*(\lambda)$  は減少する。しかし、その後  $S^*(\lambda)$  は上昇に転じる。乱流スケールが小さくなることにより粘性の影響を受けるようになるためである。これに対して  $S^*(0) < 8$  では  $S^*$  は初期から増大する。これは初めから粘性の影響を強く受けていることを意味する。乱流エネルギーの時間発展は、図2のように  $S^*$  の初期値に依存し、 $S^*(0)$  が大きいほど激しく増加する。非粘性の場合には、 $St \rightarrow \infty$  で時間とともに線形に増加することが知られている。<sup>14</sup> しかし、粘性がある場合には、 $St \rightarrow \infty$  で乱流は減衰する。 $S^*(0)$  がかなり小さい場合 ( $S^*(0) \leq 4$ )、エネルギーは単調に減少する。 $S^*$  がある程度大きい場合も、エネルギーは初期に減少した後いったん増加に転じるが最終的には再び減少する。

(ii) 非線形性

図1 (b) からわかるように、RDTの場合と同様に  $S^*$  の初期値が小さい場合には  $S^*$  は増加し、大きい場合には  $S^*$  は減少する。初期のレイノルズ数が同じ計算の軌道と比較すると、それぞれが  $S^* = 10$  ぐらいに向かって集中していくように見える。 $S^*(0)$  が小さい場合には、レイノルズ数が大きくなるか、剪断率パラメーターが小さくなるにつれて、初期の  $S^*$  と  $R_\lambda$  の減少が激しくなっていることがわかる。これは、初期のエンストロフィーの値が大きいほど非線形自己相互作用が活発で、小スケールの運動が急速に励起されたことを意味する。 $S^*(0)$  が大きい場合には、平均流との相互作用が  $S^*$  を減少させていたが、非線形の効果に加わることにより  $S^*$  の減少は加速される。 $S^*(0)$  が大きいほど、初期のレイノルズ数減少の割合は小さい。その後、 $S^*(0)$  によらず、レイノルズ数は激しく上昇する。相図曲線はRDTの場合と異なり上に凸、つまり、時計回りに回転している。 $S^*$  はレイノルズ数が十分高いときには、横ばい、もしくは、減少に転じ、実験値に漸近するようにも見える。 $S^*$  が減少する傾向は、 $S^*$  が比較的大きいTCの実験においても見られる。

### 3.2 エネルギースペクトルとの関係

剪断率パラメーター  $S^*$  が大きい場合と小さい場合のそれぞれの乱流の振舞をもう少し詳しく調べる。 $S^*$  が大きい例として  $R_\lambda(0) = 16, S^*(0) = 32$ 、 $S^*$  が小さい例として  $R_\lambda(0) = 16, S^*(0) = 4$  の計算を用いる。 $\lambda$  の時間発展はスペクトルの形状

の変化と密接に関係している。主流による移流の効果により式(2.6)に従って  $k_2$  方向の高波数モードが励起されることに注意しておくことが必要である。

(i) 剪断率が大きい場合

初期 ( $St = 0 \sim 3$ ) には、レイノルズ数はほとんど変化せず、 $S^*$  は減少する。その後、 $S^*$  は緩やかな増加に転じ、レイノルズ数は急速に増大する。さらに時間が経つと  $S^*$  の増え方はさらに緩やかになり、再び減少に向かう。図3に、エネルギースペクトルの時間発展を示す。(a)、(b)、(c) は、それぞれ、球殻上で積分したスペクトル、ならびに、 $k_1$ 、 $k_2$  方向の一次元スペクトル

$$E(k_1) = \sum_{k_2, k_3} E(\mathbf{k}), \quad E(k_2) = \sum_{k_3, k_1} E(\mathbf{k})$$

を示す。ここで、 $E(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} |\mathbf{u}(\mathbf{k})|^2$  はエネルギースペクトル密度である。図の実線、破線、一点鎖線、二点鎖線、三点鎖線は、それぞれ、 $St = 0, 2, 4, 8, 12$  のスペクトルを剪断の強さ  $S$  と粘性率  $\nu$  で規格化したものである。図3 (a) より初期の段階で高波数へとスペクトルが伸びていることがわかる。これは、上に述べたように主流による移流の効果により高波数が励起されたためであり、 $S^*$  の初期の減少と対応している。このことは、 $k_2$  方向のスペクトルより確認できる (図3 c)。また、 $k_1$  方向のスペクトルは高波数へ伸びるといふよりはむしろ低波数側に縮んでいる (図3 b、横軸のスケールに注意)。その後の  $S^*$  が緩やかに変化する時間帯では、スペクトルはほぼ相似的に変化する。一方、シミュレーションを通して低波数側のモードは成長を続け、スペクトルのピークに対応する波数は単調に減少する。この計算と LKM の数値計算とでは、初期のレイノルズ数、剪断率パラメータの値はほぼ同じであるがその後の振舞には大きな違いが出る (図1)。これは、初期のスペクトルの形が両者において異なるからである。我々は、(2.14) のように特定の波数にエネルギーが集中する形のスペクトルを用いているが、LKM は初期条件として等方乱流のデータを用いている。そのため、初期のスペクトルが高波数まで伸びている LKM の計算の方が、初めから粘性の影響を大きく受け、初期の  $S^*$  の減少の程度が小さい。

(ii) 剪断率が小さい場合

ごく初期 ( $St = 0 \sim 1$ ) には、レイノルズ数  $R_\lambda$ 、剪断率パラメータ  $S^*$  ともに減少する。この間には、等方減衰乱流の場合と同様のことが起こっている。つまり、非線形効果により小スケールの運動が励起され、それによりエネルギー散逸が活発となり、ついには、乱流は減衰しレイノルズ数が減少する。しかし、剪断流の場合には主流からのエネルギー流入があるため再び乱流が活発になる。その後  $S^*$  は急激に増加し、 $R_\lambda$ - $S^*$  曲線の軌道は時計回りに回転するような軌道を描く。これは次のような乱流の時間発展と対応している。主流からのエネルギーの流入は低波数帯に集中してい

る。初めのうちはエネルギーは低波数側に溜る一方であり、乱流スケールは大きくなり続ける。時間が経つにつれてエネルギーの増加（レイノルズ数の上昇）により、再び非線形項によるエネルギー伝達が活発になり高波数側のモードも急速に成長し始める。よって、乱流スケール  $\lambda (\propto S^{*1/2})$  の成長の速度は鈍化し、エンストロフィーの成長率がエネルギーのそれを上回る場合には減少に転じる。実験では、テイラー長は初期にかなり増大した後、緩やかに減少しその後ほぼ一定値を保つことが知られている。<sup>9</sup> 図3に対応するスペクトルの時間発展を図4に示す。図4(a)よりこの時間帯を通して低波数のモードが勢い良く成長しているのがわかる。また、 $St = 8$  から12にかけては高波数のモードも励起されていることがわかる。図4(c)より  $k_2$  方向のスペクトルは、初期と比べてほとんど高波数へと広がらず、その後は、ほぼ定常を維持することがわかる。 $k_1$  方向のスペクトルは、剪断率が大きい場合と比べると高波数まで励起されている（図4 b）。この計算はRMの数値計算の結果とほぼ一致している。

### 3.3 乱流エネルギーの時間発展

図2は、RDTの場合には  $S^*$  が大きいほどエネルギーが増加する傾向にあることを示しているが、その傾向は非線形性が加わっても変わらない。図5は、エネルギーの時間発展の様子を  $S^*$  の初期の値は8に固定しておき初期のレイノルズ数  $R_\lambda(0)$  を0（線形）、4、8、16、32と変えて比較したものである。図5(a)では、エネルギーは初期の値で規格化してある。 $R_\lambda(0)$  が4の計算では、 $St = 5$ 以降、そのエネルギーの値がRDTを上回ることがわかる。 $R_\lambda(0)$  が8になると、その増加の仕方は激しくなる。16になると初期 ( $St < 2$ ) のエネルギーの減少がRDTなどと比べて大きくなる。32の計算ではなお顕著である。これは、非線形効果によって散逸が促進されるためである。多くの実験において、 $St = 4$  ぐらいまでのエネルギーの減少が報告されている。その後エネルギーは、Tavoularis<sup>7</sup> の予想やTKなどの実験結果と同様、ほぼ指数的に増加する。なお、 $R_\lambda(0) = 32$  の計算のエネルギーの増加の仕方は16のものに比べ緩慢である。図5(b)は、図5(a)を片対数グラフで見たものである。ただし、エネルギーの値を剪断率  $S$  と粘性率  $\nu$  を使い  $\varepsilon/S\nu$  のように規格化している。 $St = 5$ 以降のエネルギーの増加率は、 $R_\lambda(0)$  を4、8、16と上げるにつれて上昇していく。 $R_\lambda(0) = 32$  になると逆に減少することがわかる。

エネルギー増加率は(2.13)からわかるように  $-\langle u_1 u_2 \rangle / u'^2$  と  $1/S^*$  の2つの量の差から決まり、これが一定ならばエネルギーは指数的に増加する。図5(a)に示したものと同一計算に対する  $-\langle u_1 u_2 \rangle / u'^2$  の時間発展の様子を図6に示す。レイノルズ数が低い場合には、計算の時間の範囲内では単調減少する。一方、 $R_\lambda(0)$  が16や32の場合には、0.16前後に漸近していくように見える。一般に、レイノルズ数が比較的高い場合には、初期のパラメーターの値によらず0.15 ~ 0.17に落ち着く（表2）。



$1/S^*$  が  $R_\lambda(0)$  とともに増加する (図 1) ことを考えると、レイノルズ数  $R_\lambda(0)$  を 0 から 16 へと大きくしていくにつれて、エネルギー増加率が上昇するのは、剪断からのエネルギー流入  $-\langle u_1 u_2 \rangle / u'^2$  の平衡値が  $R_\lambda(0)$  とともに上昇することと対応していることがわかる。しかし、レイノルズ数が十分に大きくなると、さらにレイノルズ数を大きくしても  $-\langle u_1 u_2 \rangle / u'^2$  の平衡値はほとんど変化しない。このため、 $1/S^*$  の増加 (これは、粘性がより強く働いていることを意味する) によって、エネルギー増加率が逆に減少する。なお、実験においては、主流の中央での値を用いて乱流強度を規格化すると剪断の強さによらずにその時間発展のグラフが一致することが知られている。<sup>9</sup>

### 3.4 相似則

実験においても、 $-\langle u_1 u_2 \rangle / u'^2$  の値は時間発展においてほとんど一定で、TK の表 1 にあるように 0.14 ~ 0.18 である。よって、 $-\langle u_1 u_2 \rangle / u'^2$  は剪断の強さや、レイノルズ数によらず 0.16 前後である。そこで、エネルギーの増幅率は十分レイノルズ数が高い時には唯一つのパラメーター  $S^*$  のみにより決定されると仮定する。 $S^*$  の実験値はテイラー長の時間発展から推測すると  $St = 10$  以降ほぼ一定である。我々の計算においてもその傾向は見える。そこで、さらに、 $S^*$  が一定であるとすると、エネルギーは指数的に増加し、同時にエンストロフィーやレイノルズ数も指数的に増加する。このとき、図 1 (b) の相図上での振舞は、 $S^*$  が一定の直線上での等速運動となる。エネルギー成長率の大きさは、 $R_\lambda(0) \geq 16$  では、 $\sigma = 0.12 \sim 0.18$  である (表 2)。 $-\langle u_1 u_2 \rangle / u'^2 = 0.16$  とすると、 $S^* > 6.25$  でエネルギー (あるいはレイノルズ数) は増加し  $S^* < 6.25$  で減少する。TK の図 2 には、乱流エネルギーの時間発展が示されている。この図の (a) ( $S^* = 8.3 \sim 8.4$ )、(b) ( $S^* = 8.5 \sim 9.6$ ) では、エネルギーは指数的に増加している。彼らは、エネルギー成長率は 0.1 前後で剪断の強さなどによらずに一定であると主張しているが、実際には  $S^*$  の値によって多少違い、(a) では  $\sigma = 0.09$  (b)  $\sigma = 0.11 \sim 0.13$  である。一方、TK の図 2 (c) ( $S^* = 6.5$ ) のときにはエネルギーはほぼ一定の値をとる。図 2 (d) ( $S^* = 5.6$ ) は、Tavoularis の仮説が成り立っていれば指数的にエネルギーが減少するはずであるが、 $St = 1$  ぐらいまでは減少するもののそれ以後はほぼ一定のように見える。(ただし、観測された時間があまりにも短いのでそれ以上のことは何もいえないようである。) 我々の計算では、レイノルズ数が高くなってくると  $S^*$  が急激に減少に転じるものも見られるが、このなかには計算領域の十分に大きくないことによる影響が含まれている。つまり、渦が計算領域の大きさまで成長するとそれ以上成長できなくなり、乱流スケール  $\lambda$ 、ならびに、 $S^*$  を減少させる方向に働く可能性があるのである。

### 3.5 非等方性

ここでは、2つの非等方性について考える。1つは、レイノルズ応力テンソルについてであり、もう1つは、エネルギースペクトルの変形の度合である。

#### (i) レイノルズ応力テンソル

式(2.11)から、速度ベクトルの第一成分が他の成分よりも大きくなることが予想される。レイノルズ応力テンソルの非等方の度合は、 $K^* \equiv 2\langle u_1^2 \rangle / (\langle u_2^2 \rangle + \langle u_3^2 \rangle)$  という量で表すことができる。<sup>13</sup> 図7(a)では、 $S^*$ の初期値を8に固定してこの量の時間発展の $R_\lambda$ 依存性を調べた。レイノルズ数が大きいほど非等方の度合は低下することがわかる。また、 $R_\lambda(0) = 16$ の計算からわかるようにこの量はある時刻で最大値をとり、その時刻は $R_\lambda(0)$ が大きいほど早くなることがわかる。なお、非粘性のRDTでは、 $St \rightarrow \infty$ のとき $K^* \rightarrow \infty$ である。<sup>14</sup> 図7(b)では初期レイノルズ数を16に止めて $S^*$ の初期値に対する依存性を調べた。一般に、 $S^*$ が大きいほど非等方の度合も大きくなるが、 $S^*(0) = 4$ と $S^*(0) = 8$ の計算を比較すると、ほとんど差がないことがわかる。(図1からわかるように相図上で両者はほぼ同じ曲線を描く。)この量の最大値 $K_{max}^*$ とその値をとる時刻 $St_{K_{max}^*}$ を表2にまとめる。実験値は、CHCが1.8、TCが2.3、TKの図2では(a)2.4 ~ 2.9、(b)2.3 ~ 2.8、(c)2.2 ~ 2.7、(d)1.6などである。非等方性のピークに対応する時間は相図上で考えると $S^*$ が減少し始める寸前に位置する。我々の計算、実験値を比較するとTKの値が他のものよりも大きめであることがわかる。計算領域の大きさの影響や実験での主流の非一様性に関係していることも考えられる。

#### (ii) スペクトル

エネルギースペクトルの形は、主流による移流の効果により変形されるがその変形の度合は、レイノルズ応力テンソルの非等方性の度合とほぼ対応している。ただ、低波数側よりも高波数側の方が、非線形項が支配的であるためやや球形に近い形をしている。また、比較的波数の大きいところでは、レイノルズ数が上昇するほど球形に近づく傾向がある。 $k_1, k_2$ 平面でのスペクトルの断面をとり、その等値線(ほぼ楕円状)を考える。その長軸と短軸の比は、どの等値線をとるか、また、どの時刻をとるかによって多少変わってくるが、そのおおよその値を表2の右端の行にまとめる。

## 4. 結語

今回得られた結果を簡単にまとめる。 $S^*$ の初期の減少は、小スケールの運動が励起されるために起こる。 $S^*$ の初期値が大きい場合には、(2.6)で表される主流による移流の効果がその主因であり、小さい場合には、非線形項の効果が主因である。その後の $S^*$ の上昇は、低波数に主流からのエネルギー流入が集中することによる。実際、 $-Su_1u_2$ のスペクトルのピークは、常にエネルギースペクトルのピークよりも低波数側に位置する。レイノルズ数が上昇し非線形項によるエネルギー伝達が活発化すると

$S^*$  の増加の仕方は鈍り、横ばい、もしくは、減少に転じる。

その後の時間発展については、数値計算では計算領域の大きさが十分大きくとれないため、残念ながら決定的なことはいえないが、次の2つの可能性があるように思われる。1つは、レイノルズ数の上昇とともに  $S^*$  がある値に収束する可能性であり、もう1つは、さまざまな  $S^*$  の値に対して、それに対応する準平衡状態が存在する可能性である。乱流モデルの中には、方程式系が非等方テンソル  $b_{ij} = \langle u_i u_j \rangle / u'^2$  と  $S^*$  だけで閉じたものがある<sup>15</sup>。このようなモデルでは、一般に、 $b_{ij}$  と  $S^*$  の安定な平衡値が1つだけ存在し、すべての初期値がこの値に収束する。

図3や図4では、 $S$  と  $\nu$  で規格化したスペクトルを示したがコルモゴロフスケールで規格化したスペクトルは、レイノルズ数が同じであれば、 $S^*$  の値によらずに一致する。これは、 $S^*$  の値によってスペクトルの三次元的な形が大きく異なっていることを考えると自明なことではない。レイノルズ数を大きくしていくと、低波数側にも高波数側にもより広がった形に変わっていく。つまり、積分距離が大きくなると同時に、より小さいスケールが生まれている。一方、テイラー長 ( $\propto S^{*1/2}$ ) は2つのスケールにはさまれる形になっているので、変動が少ないことが想像される。

## 参考文献

- <sup>1</sup> W.G. Rose, "Results of an attempt to generate a homogeneous turbulent shear flow", J. Fluid Mech. **25** (1966) 97.
- <sup>2</sup> F.H. Champagne, V.G. Harris, and S. Corrsin, "Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow", J. Fluid Mech. **41** (1970) 81.
- <sup>3</sup> W.G. Rose, "Interaction of grid turbulence with a uniform mean shear", J. Fluid Mech. **44** (1970) 767.
- <sup>4</sup> P.J. Mulhearn and R.E. Luxton, "The development of turbulent structure in a uniform shear flow", J. Fluid Mech. **68** (1975) 577.
- <sup>5</sup> V.G. Harris, A.A. Graham, and S. Corrsin, "Further experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow", J. Fluid Mech. **81** (1977) 657.
- <sup>6</sup> S. Tavoularis and S. Corrsin, "Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flows with a uniform mean temperature gradient", Part I, J. Fluid Mech. **104** (1981) 311.
- <sup>7</sup> S. Tavoularis, "Asymptotic laws for transversely homogeneous turbulent shear flows", Phys. Fluids **28** (1985) 999.
- <sup>8</sup> V. Karnik and S. Tavoularis, "The asymptotic development of nearly homogeneous turbulent shear flow", in Turbulent Shear Flow 4 (edited by L.J.S. Bradbury,

F. Durst, B.E. Launder, F.W. Schmidt, and J.H. Whitelaw ), 14.18 (Springer-Verlag, New York, 1983).

<sup>9</sup> J.J. Rohr, E.C. Itsweire, K.N. Helland and C.W. Van Atta, "An investigation of the growth of turbulence in a uniform-mean-shear flow", *J. Fluid Mech.* **187** (1988) 1.

<sup>10</sup> S. Tavoularis and U. Karnik, "Further experiments on the evolution of turbulent stresses and scales in uniformly sheared turbulence", *J. Fluid Mech.* **204** (1989) 457.

<sup>11</sup> R.S. Rogallo, "Numerical experiments in homogeneous turbulence", NASA Tech. Memo. 81315 (1981).

<sup>12</sup> M.M. Rogers and P. Moin, "The structure of the vorticity field in homogeneous turbulence flows", *J. Fluid Mech.* **176** (1987) 33.

<sup>13</sup> M.J. Lee, J. Kim, and P. Moin, "Structure of turbulence at high shear rate", *J. Fluid Mech.* **216** (1990) 561.

<sup>14</sup> M.M. Rogers, "The structure of a passive scalar field with a uniform mean gradient in rapidly sheared homogeneous turbulent flow", *Phys. Fluids* **A3** (1991) 144.

<sup>15</sup> C.G. Speziale, T.B. Gatski, and S. Sarkar, "On testing models for the pressure-strain correlation of turbulence using direct simulation", *Phys. Fluids* **A4** (1992) 2887.

$R_\lambda(0)$	$S^*(0)$	計算領域	$S$	$\nu$	$k_0$	$c$	$\mathcal{E}(0)$	$\omega'(0)$
4	8	$4\pi \times 2\pi \times 2\pi$	10	0.005	$\sqrt{200}$	$7.54 \times 10^{-7}$	0.0450	4.97
8	2	$2\pi \times 2\pi \times 2\pi$	10	0.01	20	$4.26 \times 10^{-6}$	1.60	39.8
8	4	$2\pi \times 2\pi \times 2\pi$	10	0.005	20	$1.07 \times 10^{-6}$	0.401	20.0
8	8	$4\pi \times 2\pi \times 2\pi$	10	0.01	10	$3.41 \times 10^{-5}$	0.401	10.0
8	16	$4\pi \times 2\pi \times 2\pi$	10	0.005	10	$8.53 \times 10^{-6}$	0.100	4.97
8	32	$8\pi \times 2\pi \times 2\pi$	10	0.005	$\sqrt{50}$	$2.41 \times 10^{-5}$	0.0499	2.49
16	2	$2\pi \times 2\pi \times 2\pi$	10	0.01	20	$1.70 \times 10^{-5}$	6.41	80.1
16	4	$2\pi \times 2\pi \times 2\pi$	10	0.005	20	$8.51 \times 10^{-6}$	3.20	40.0
16	8	$2\pi \times 2\pi \times 2\pi$	10	0.005	$\sqrt{200}$	$1.21 \times 10^{-5}$	0.801	20.0
16	16	$4\pi \times 2\pi \times 2\pi$	10	0.01	$\sqrt{50}$	$3.86 \times 10^{-4}$	0.801	10.0
16	32	$4\pi \times 2\pi \times 2\pi$	10	0.005	$\sqrt{50}$	$9.63 \times 10^{-5}$	0.200	5.00
32	8	$2\pi \times 2\pi \times 2\pi$	10	0.01	10	$5.46 \times 10^{-4}$	6.41	40.0
32	16	$2\pi \times 2\pi \times 2\pi$	10	0.005	10	$1.36 \times 10^{-4}$	1.60	20.0
32	32	$4\pi \times 2\pi \times 2\pi$	10	0.01	5	$4.36 \times 10^{-3}$	1.60	10.0

表1 パラメーター

$R_\lambda(0)$	$S^*(0)$	$-\langle u_1 u_2 \rangle / u'^2$	$\sigma$	$K_{max}^*$	$St_{K^*max}$	—
4	8	0.08 ↘	0.04 ↘	11 ↗	15.0	—
8	2	0.12 ↘	0.09 ↗	6.5 ↗	15.0	—
8	4	0.13 ↘	0.11 ↗	6.0	14.5	—
8	8	0.11 ↘	0.09	7.2 ↗	15.0	4.0
8	16	0.10	0.10 ↗	10 ↗	15.0	—
8	32	0.08 ↘	0.08 ↘	14 ↗	15.0	—
16	4	0.16	0.15	2.75	11.3	2.1
16	8	0.15-0.16	0.15	2.7	9.5	2.0
16	16	0.15-0.16	0.15	3.6	9.4	3.0
16	32	0.12	0.14	6.6	12.8	4.5
32	8	0.16	0.12	1.8	7.8	1.4
32	16	0.17	0.14?	2.0	6.9	1.5
32	32	0.15	0.18?	2.8	6.8	1.9

表2 統計量 ↗、↘はそれぞれ、計算の最終時刻で増加、減少を続けていることを示す。

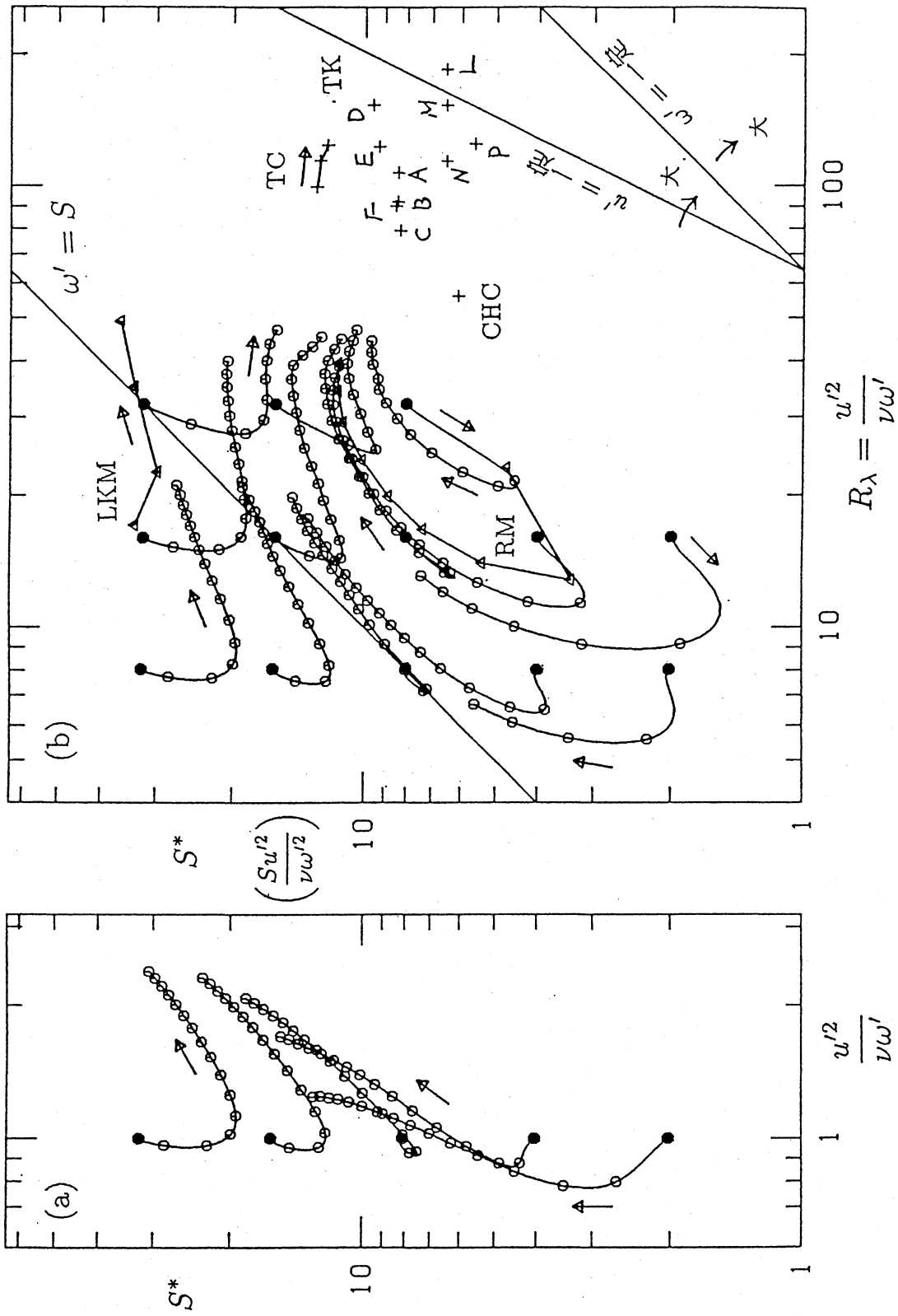


図1  $R_\lambda$ - $S^*$ 相図 (a) 線形理論、(b) 非線形 本文 3.0 を参照。

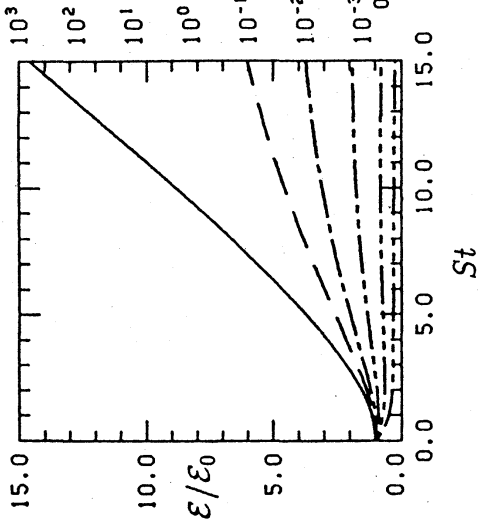


図2 エネルギーの時間発展 (線形理論) 上から、 $S^*(0) = \infty, 32, 16, 8, 4, 2$ 。

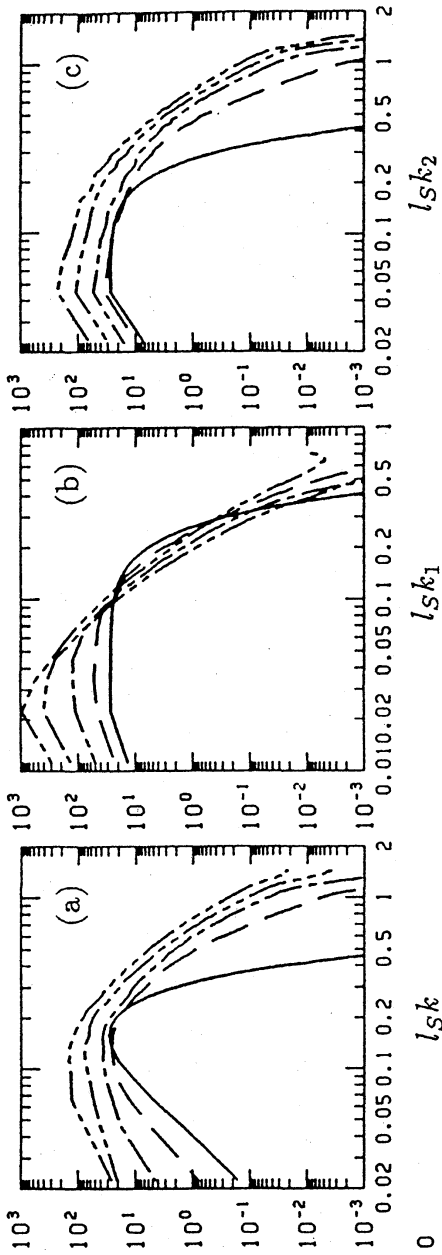


図3 エネルギースペクトル ( $R_\lambda(0) = 16, S^*(0) = 32$ )。(a) 球殻上で積分したスペクトル、(b)  $k_1$  方向のスペクトル、(c)  $k_2$  方向のスペクトル。実線、破線、一点鎖線、二点鎖線、三点鎖線は、それぞれ、 $St = 0, 2, 4, 8, 12$  に対応。

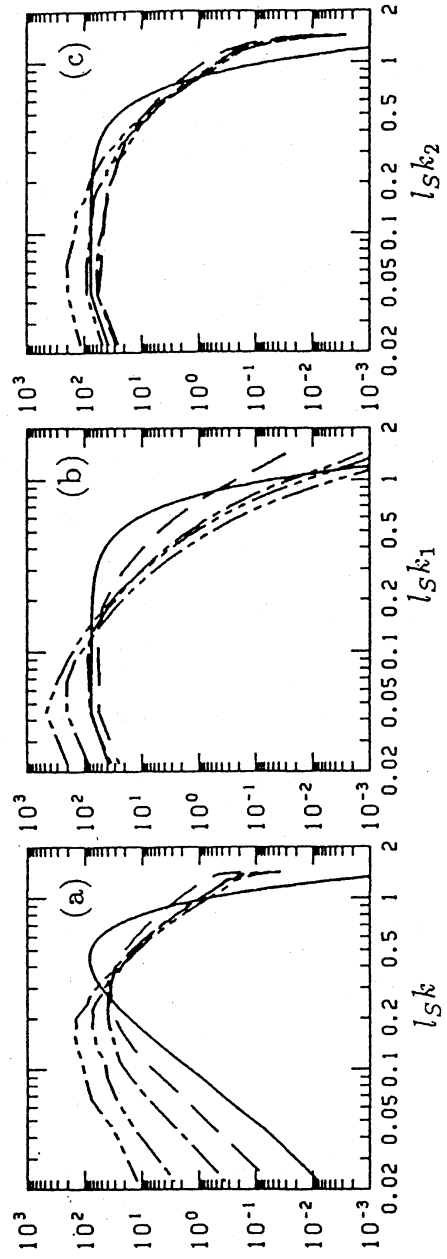


図4 エネルギースペクトル ( $R_\lambda(0) = 16, S^*(0) = 4$ )。その他、図3と同じ。

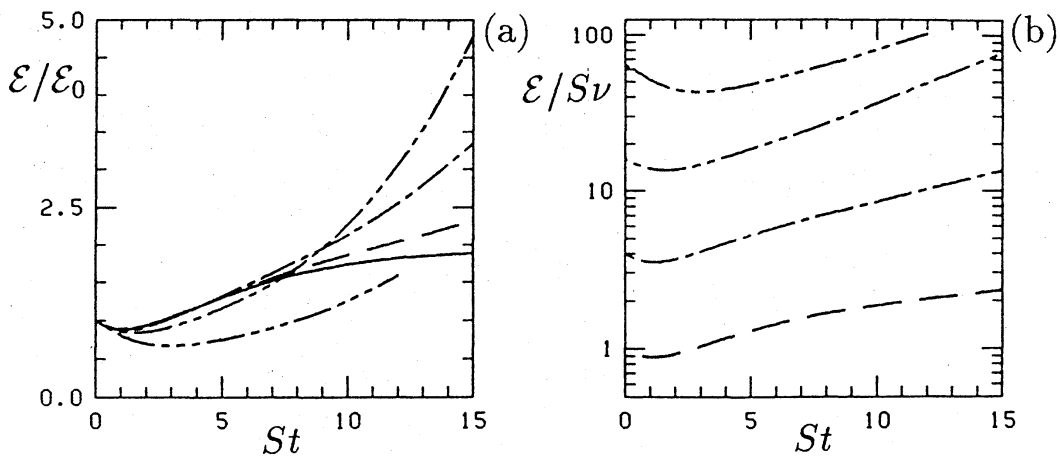


図5 エネルギーの時間発展 ( $S^*(0) = 8$ )。 (a) 実線、破線、一点鎖線、二点鎖線、三点鎖線は、それぞれ、 $R_\lambda(0) = 0$  (線形) , 4, 8, 16, 32 に対応。 (b) 片対数グラフ。  $R_\lambda(0) = 4, 8, 16, 32$ 。

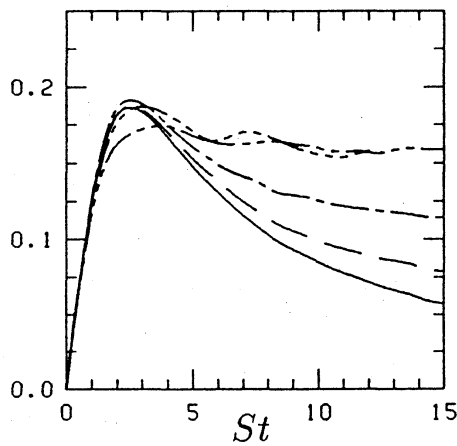


図6  $-\langle u_1 u_2 \rangle / u^2$  の時間発展。それぞれの線は図5 (a) の各線と対応。

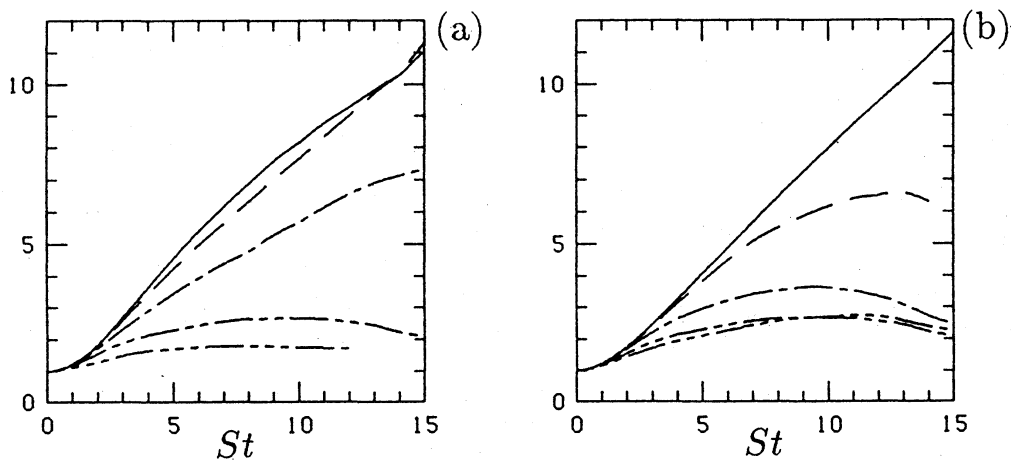


図7 非等方性  $K^*$  の時間発展。 (a)  $S^*(0) = 8$ 。実線、破線、一点鎖線、二点鎖線、三点鎖線は、それぞれ、 $R_\lambda(0) = 0$  (線形) , 4, 8, 16, 32 に対応。 (b)  $R_\lambda(0) = 16$ 。実線、破線、一点鎖線、二点鎖線、三点鎖線は、それぞれ、線形 (非粘性) ,  $S^*(0) = 32, 16, 8, 4$  に対応。