

## 1962 Kolmogorov Hypothesis の検証

電通大 細川 巖 (Iwao Hosokawa)

航技研 山本稀義 (Kiyoshi Yamamoto)

### 1. 序論

1962年、Kolmogorov<sup>1</sup>は等方性乱流の中の intermittency 効果を説明するために、refined similarity hypothesis (RSH) を導入した。scale  $r$  の eddy の速度 scale の指標として直径  $r$  の球面上の相対する 2 点での流れの速度差の、2 点をつな

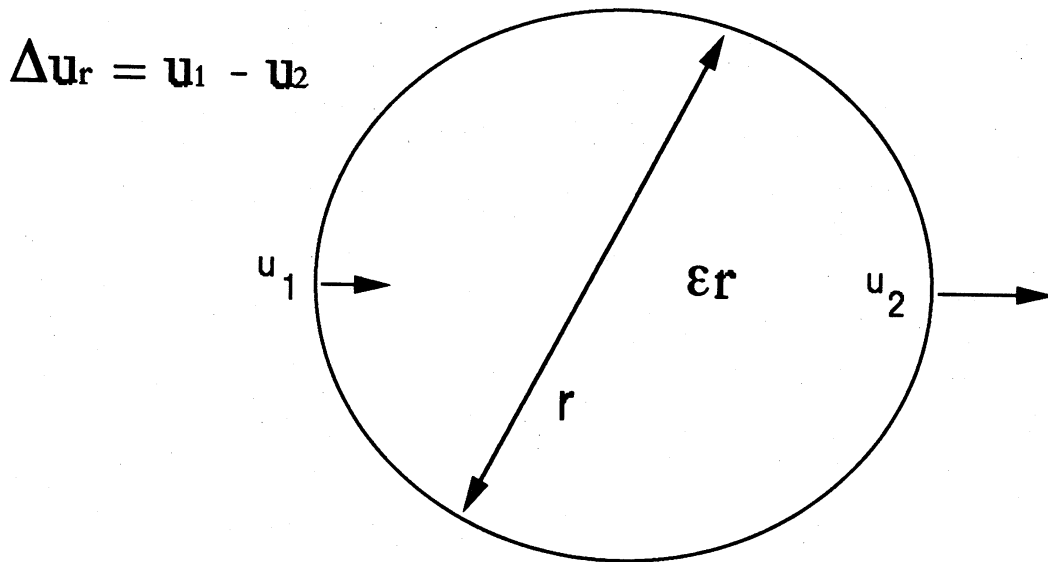


Fig. 1

ぐベクトル方向の成分を、 $\Delta u_r$  とし、球内でのエネルギー散逸率の平均を $\varepsilon_r$ とし、両者をつぎのように関係させる。

$$\Delta u_r = v(r\varepsilon_r)^{1/3} \quad \dots\dots(\text{Kolmogorov RSH})\dots \quad (1)$$

ここに、 $v$ は普遍的な或る確率変数とし、Kolmogorovはその分布については言及しなかった。しかし、この関係によって速度構造関数の詳しい議論が可能になり、乱流理論でもつその意味は大きい。

これに対し、かつて著者らは否定的な DNS の結果を公表した<sup>2</sup>。 $\Delta u_r$  と  $\varepsilon_r$  の相関はほとんどないというのが主要な結論であったが、これは国外の有数の学者を刺激し、Thoroddsen & Van Atta<sup>3</sup>, Praskovsky<sup>4</sup>, Stolovitzky et al<sup>5</sup>, S-Y. Chen<sup>6</sup> より、反対の結果が寄せられた。前の3者は実験、後者はDNSであるが、 $\varepsilon_r$ を1次元surrogate  $\varepsilon_r'$  ( $=v(\partial u/\partial x)^2$ )におきかえているので、(1)に対する正確な研究になっているかどうかは問題である。 $\Delta u_r$  と  $\varepsilon_r'$  の相関係数は、いずれも0.5に近い数字が報告されている。そこで、著者らは前の結果を再検討し、scatter plot にbugのあるのを発見したので、ここに訂正された結果を次のように述べる。

確かに相関は存在するが、 $\Delta u_r$  と  $\varepsilon_r$  の相関係数は0.28であり、 $\Delta u_r$  と  $\varepsilon_r'$  の相関係数は0.49である。(1)で $v$ について平均したものの (conditional mean) は

$$\langle \Delta u_r \rangle (v) \propto (r\epsilon_r)^{1/3} \quad (2)$$

となるが、これは確かに  $(r\epsilon_r)^{1/3}$  が相対的に小さいときに成立しているが、大きいところでは成り立っていない。scatter plot の訂正を含めてこれらの結果は Ref. 7 に公表したので興味のある読者はそれを参照されたい。

ここでは、上に述べた RSH の不完全な部分が  $\Delta u_r$  の構造関数や分布関数にどのように影響するかということ考察したい。

## 2. RSH の確率的表現

一般に、 $\Delta u_r$  の確率密度関数(pdf)を

$$p_3(\Delta u_r) = \int p_1(\Delta u_r; x) p_2(x) dx \quad (3)$$

と書く。ここに  $x = (r\epsilon_r)^{1/3}$  である。  $p_1$  は条件つき確率である。(1)により、

$$P(v) = \int p_1(vx; x) x p_2(x) dx \quad (4)$$

として、 $v$  の pdf が得られるが、もし Kolmogorov の RSH が完全に正しければ  $v$  の分布は  $x$  に依らない筈であるから、条件つき確率  $p_1(vx; x)x$  は  $x$  の関数ではない。したがって

$$P(v) = p_1(vx; x) x . \quad (5)$$

これが RSH の意味するものである。

Thoroddsen & Van Atta の実験で、ある程度これの証明が

得られている<sup>8</sup>。さらに、 $P(v)$  が nearly Gaussian であることも最近分かってきた<sup>5,8</sup>。このように  $P(v)$  が既知で普遍的であるなら、(4) は

$$p_3(\Delta u_r) = \int P(\Delta u_r/x)/x p_2(x) dx \quad (6)$$

として計算できる。

$p_2(x)$  を 3D Cantor set model<sup>9</sup>, p model<sup>10</sup>, random  $\beta$  model<sup>11</sup>, lognormal model<sup>1</sup> などで与え、 $p_3(\Delta u_r)$  を吟味することは Ref. 12 で行ったので、それを参照して頂きたい。いろいろな  $r$  に対して、少なくとも定性的には予想以上に実験と DNS に合う  $p_3(\Delta u_r)$  が得られている。しかし定量的にはどうか。

### 3. RSH の欠陥

実際の  $p_3(\Delta u_r)$  は  $r$  に応じて skewness をもっている。したがって、(6) において、 $P(v)$  が Gaussian であるだけではこれを説明できない。r-dependence の skewness をもった  $P(v; r)$  が必要なのである。ところがこのことは、 $P(v)$  が  $r$  にも  $\varepsilon_r$  にも依存しない普遍確率であるとした Kolmogorov の仮設に原則的に違反する。

さらによく調べると、広い範囲の  $r$  の  $p_3(\Delta u_r)$  を導くには、Gaussian 以上の kurtosis をもった  $P(v; r)$  が必要になること

が分かる。 $r$  が小さいほどこの傾向は大きい。 $r$  が小さいときは大きい  $\varepsilon_r$  を生じうるので、これは大きい  $x$  に対応すると考えられ、第1節で述べた RSH の問題点がここに反映していると見るのは自然であろう。

$P(v; r)$  の概念はもはや RSH を逸脱するので、Modified RSH (MRSH) と呼ぶ。これは Gaussian の  $P(v)$  に  $r$  に依存する Gram-Charlier の項を追加して実現しうる。

最近、慣性領域を越えて  $r \rightarrow \eta$  (Kolmogorov length) まで (6) を拡張適用して  $\partial u / \partial x (= \Delta u_r / r|_{r=\eta})$  の one-point statistics を議論しようという動き<sup>12,13</sup>があるので、このことは極めて重要である。 $r \rightarrow \eta$  で 3D Cantor set model がどれほど事実を描き得るかを Fig. 2 で DNS と比較して示した。これは Taylor の Reynolds 数  $R_\lambda =$  約100 のときで  $\eta = 2^{-7}$  であり、統計的類似性は期待以上に良好である。

具体的に kurtosis の例を挙げる。3D Cantor set model を使って上記の  $\eta = 2^{-7}$  で RSH は kurtosis 4.8 を与えるが、われわれの DNS では、 $\partial u / \partial x$  のそれは 6 に近い。また、 $R_\lambda =$  約165000 のとき  $\eta = 2^{-23}$  で RSH は kurtosis 10.02 を与えるが、Van Atta & Antonia<sup>14</sup> の資料によると、 $\partial u / \partial x$  のそれは 60 - 70 に達するのである。

## 4. 結論

Kolmogorov の RSH は定性的には正しい傾向を示すが、定量的には不完全である。もし、確率表現(6)における関数  $P(v)$  が  $P(v; r)$  に modify されるなら、広範囲の  $r$  で妥当な  $p_3(\Delta u_r)$  が得られる可能性がある。そうなると、RSH から導かれる良く知られた関係：

$$\zeta_p = p/3 - \mu_p/3 \quad (7)$$

( $\zeta_p$  は速度構造関数の指数、 $\mu_q$  は間欠指数) がそのまま保存されるかどうかは疑問である。これらの研究結果はこのつぎの機会に発表したい。

## References

1. A. N. Kolmogorov: J. Fluid Mech. 13 (1962) 82.
2. I. Hosokawa and K. Yamamoto: J. Phys. Soc. Jpn. 60 (1991) 1852; Phys. Fluids A 4 (1992) 457.
3. S. T. Thoroddsen and C. W. Van Atta: Phys. Fluids A 4 (1992) 2592.
4. A. A. Praskovsky: Phys Fluids A 4 (1992) 2589.
5. G. Stolovitzky, P. Kailasnath and K. R. Sreenivasan: Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 1178.
6. S. Chen, G. D. Doolen, R. H. Kraichnan and Z-S. She:

- Phys. Fluids A 5 (1993) 458.
7. I. Hosokawa and K. Yamamoto: J. Phys. Soc. Jpn. 62 (1993) 380.
  8. I. Hosokawa, C. W. Van Atta and S. T. Thoroddsen, Phys. Fluids A, submitted.
  9. I. Hosokawa: Phys. Rev. Lett. 66 (1991) 1054.
  10. C. Meneveau and K. R. Sreenivasan: Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 1424.
  11. R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi and A. Vulpiani: J. Phys. A 17 (1984) 3521.
  12. R. Benzi, L. Biferale, G. Paladin, A. Vulpiani and M. Vergassola: Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 2299.
  13. P. Kailasnath, K. R. Sreenivasan and G. Stolovitzky: Phys. Rev. Lett. 68 (1992) 2766.
  14. C. W. Van Atta and R. A. Antonia: Phys. Fluids 23 (1980) 252.
  15. I. Hosokawa and K. Yamamoto: J. Phys. Soc. Jpn. 58 (1989) 20.

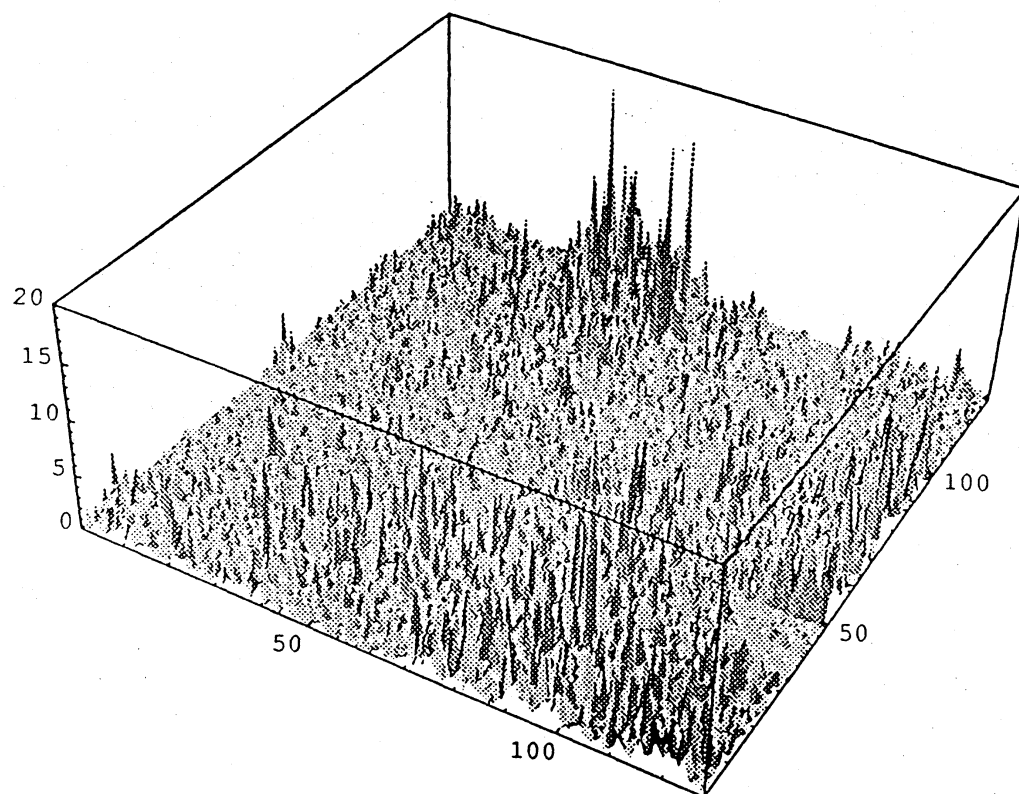


FIG. 2 (a)

A 2D CUT OF DISSIPATION-RATE DISTRIBUTION IN  
TURBULENCE BY THE 3D CANTOR SET MODEL



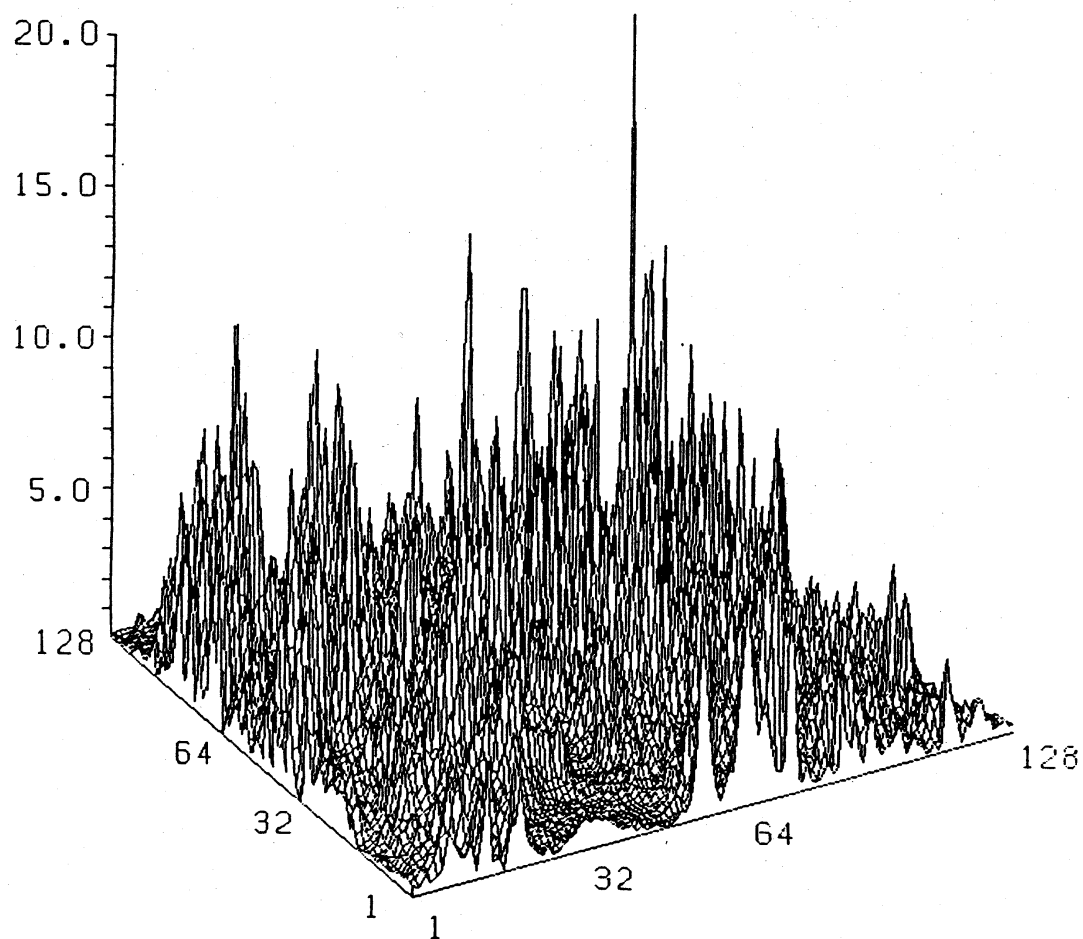


FIG. 2 (b)

A 2D CUT OF DISSIPATION-RATE DISTRIBUTION IN TURBULENCE  
BY DNS AT THE FULLY-DEVELOPED STATE (REF. 15)