

複製部数に制限のある Arborescence-Net 上の file transfer が最適であるための必要十分条件

A Necessary and Sufficient Condition for a File
Transfer to be Optimal on an Arborescence-Net
with Node Supply Limit

† 金子 美博 † 篠田 庄司 † 堀内 和夫
Yoshihiro Kaneko Shoji Shinoda Kazuo Horiuchi

† 〒169 東京都新宿区大久保3-4-1 早大・理工
‡ 〒112 東京都文京区春日1-13-27 中央大・理工
E-mail kaneko@horiuchi.comm.waseda.ac.jp

1. はじめに

ファイル転送ネットワーク N 上の最適な file transfer を求める問題とは、必要不可欠なコストが最小となるように、ある情報を持った複製可能なファイル J を、 N の適当な点で複製しながら、ある点から各点に提供する問題である。これまで、各点で複製できる J の部数に対する制限のない N が考察対象であった。[1], [2]

本報告では、各点において複製できる J の部数が限られていて、arborescence の構造をしたファイル転送ネットワーク (Arborescence-Net) を考察対象とし、file transfer と 1 対 1 対応する準 file transfer を用いて、file transfer が最適であるための必要十分条件を示す。

2. 準備

ここでは、最適な file transfer の問題を定式化する上で必要な用語を定義する。グラフ理論に関する基本的な用語は文献 [3] を参照されたい。以下、非負整数の集合を Z で表す。

考察の対象となる Arborescence-Net $N = (V, A, c_v, d, U_b, c_a)$ とは、点集合を V 、枝集合を A とし、点 v_1 を根とする arborescence の構造で、点 u 及び枝 e のコストをそれぞれ $c_v(u)$ 及び $c_a(e)$ 、点 u の需要値及び供給上限をそれぞれ $d(u)$ 及び $U_b(u)$ とする。 J は、 N において必要とされる情報が書かれているファイルである。点 u のコスト (copying cost) $c_v(u)$ は、 u において J を 1 部コピーするのに要するコストであ

り, $c_v(u) \in \mathbb{Z}$ とする. 枝 e のコスト (transmission cost) $c_a(e)$ は, 枝 e を通して, J の コピー - を 1 部送るのに要するコストであり, $c_a(e) \in \mathbb{Z}$ とする. 以降では, 簡単のため枝 (x, y) のコストを $c_a((x, y))$ の代わりに $c_a(x, y)$ で表す. u の需要値 (copy demand) $d(u)$ は, u が必要とする J の コピー - の部数を意味し, $d(u) \in \mathbb{Z}$ とする.

V の各点 v に対して, 枝集合 $A(v)$ を $A(v) \equiv \{e \in A \mid e = (v, w), w \in V\}$ とし, $A(w) = \emptyset$ である点 w を端点と呼ぶ. V の根以外の点 v に対して, $fa(v)$ は, $(fa(v), v) \in A$ を満たす点である. N 上の u から v へのパスを単に $u-v$ パスと呼ぶ. $u-v$ パス P に対して, $c_{u,v}$ は P 上の全ての枝のコストの総和を表す. 枝 e が P 上にあるならば, $e \in P$ で表す. V の端点以外の点 x に対して, x の子孫 $De(x)$ を, $De(x) \equiv \{y \in V \mid x-y \text{ パスが } N \text{ 上に存在する}\}$ とする. ただし, $x \in De(x)$ とする.

N 上で必要とされる情報を持ったファイル J のオリジナルが 1 部, N の外から根 v_1 に与えられるものとする. 以下で定義する file transfer を通して, v_1 から V 上の各点 u へ $d(u)$ 部の J のオリジナルまたは コピー - が提供される. ただし, オリジナルと コピー - の相違による不都合はないものとし, 以降では, オリジナル自体も J の 1 部の “コピー -” として扱われるものとする.

[定義 1] N に対して, $\psi: V \rightarrow \mathbb{Z}$ 及び $f: A \rightarrow \mathbb{Z} - \{0\}$ である 2 個の関数 ψ 及び f が

$$(C1) \quad f((fa(v), v)) + \psi(v) = \sum_{e \in A(v)} f(e) + d(v) \quad (v \in V - \{v_1\}),$$

$$1 + \psi(v_1) = \sum_{e \in A(v_1)} f(e) + d(v_1),$$

$$(C2) \quad \psi(v) \leq Ub(v) \quad (v \in V),$$

を満たすならば, $D = (\psi, f)$ を N 上の file transfer と呼ぶ. N 上の file transfer $D = (\psi, f)$ のコスト $C(D)$ を,

$$C(D) = \sum_{u \in V} c_v(u) \cdot \psi(u) + \sum_{e \in A} c_a(e) \cdot f(e)$$

とする. N のある file transfer D が, N の他の任意の file transfer D' に対して, $C(D) \leq C(D')$ ならば, D を N の最適な file transfer と呼ぶ. \square

ここで, $\psi(v)$ は, 点 v で コピー - される J の部数を表し, $f(e)$ は枝 e を通して送られる J の コピー - の部数を表している. 条件 (C1) は, 各点で J の部数が保存されていることを示し, 条件 (C2) は, 各点で コピー - できる部数に限りがあることを示している.

端点 w の需要値 $d(w)$ は全て, $d(w) \in \mathbb{Z} - \{0\}$ とする. な

ぜならば、もしそうでなければ、 N から需要値が 0 である端点を全て除去(端点に入る枝も除去)したものを N' とすれば、 N 上での最適な file transfer は、 N の代わりに、 N' 上での最適な file transfer を考えれば十分であるからである。

3. 需要値変更と準 file transfer

この章では、Arborescence-Net N 上の各点の需要値を、ある規則の下で変更させて、別の Arborescence-Net N' を作る。 N 上の file transfer と 1 対 1 対応するような、 N' 上の準 file transfer というものを定義する。この変更は、次節以降において、最適な file transfer を求める問題を線形計画問題に帰着させる際その他に有効となる。

[定義 2] Arborescence-Net $N = (V, A, c_v, d, U_b, c_a)$ に対して、 V 上の各点 v の需要値 $d'(v)$ を

$$d'(v) \equiv d(v) + \delta(v) - 1, \quad (1)$$

とする。ただし、 $\delta(v)$ は N において v から出る枝の本数を表す。 N と同じ構造で、各点のコスト及び供給上限並びに各枝のコストが N 上のそれらと同じであり、各点 v の需要値が $d'(v)$ である Arborescence-Net $N' = (V, A, c_v, d', U_b, c_a)$ を、 N に対して需要値変更を行なった Arborescence-Net と呼ぶ。 N' において、 $\psi: V \rightarrow \mathbb{Z}$ 及び $f: A \rightarrow \mathbb{Z} - \{0\}$ 、である 2 個の関数 ψ 及び f が、以下の (C1') 並びに (C2') を満たすならば、 ψ 及び f の組 $D = (\psi, f)$ を N' 上の準 file transfer と呼ぶ。

$$(C1') \quad f((fa(v), v)) + \psi(v) = \sum_{e \in A(v)} f(e) + d'(v) \quad (v \in V - \{v_1\}),$$

$$\psi(v_1) = \sum_{e \in A(v_1)} f(e) + d'(v_1)$$

$$(C2') \quad \psi(v) \leq U_b(v) \quad (v \in V).$$

また、 N' 上の準 file transfer $D = (\psi, f)$ に対して、

$$C(D) = \sum_{u \in V} c_v(u) \cdot \psi(u) + \sum_{e \in A} c_a(e) \cdot f(e)$$

を D のコストと呼ぶ。 N' において、コストが最小である準 file transfer を、 N' の最適な準 file transfer と呼ぶ。□

N 上の file transfer と N に対して需要値変更を行なった N' 上の準 file transfer との間には、次のような 1 対 1 対応関係が存在する。

[命題 1] Arborescence-Net $N = (V, A, c_v, d, U_b, c_a)$ に

対して, 需要値変更を行なった Arborescence-Net を $N' = (V, A, c_v, d', Ub, c_a)$ とする. N 上の file transfer $D = (\psi, f)$ に対して,

$$f'(e) = f(e) - 1 \quad (e \in A), \quad (2)$$

とすると, $D' = (\psi, f')$ は, N' 上の準 file transfer である. 逆に, N' 上の準 file transfer $D = (\psi, f)$ に対し,

$$f'(e) = f(e) + 1 \quad (e \in A),$$

とすると, $D' = (\psi, f')$ は N 上の file transfer である. (証明) 前半部分. N 上の file transfer $D = (\psi, f)$ において, 定義 1 より, $f: A \rightarrow \mathbb{Z} - \{0\}$ であるため, 式 (2) より $f': A \rightarrow \mathbb{Z}$ である. (C2) より明らかに, ψ は (C2') を満たす残りは, f' 及び ψ が (C1') を満たすことを示せばよい. v_1 以外の V の任意の点 v に対して, (C1) の左辺に式 (2) を代入すると,

$$\begin{aligned} f((fa(v), v)) + \psi(v) \\ = f'((fa(v), v)) + 1 + \psi(v), \end{aligned}$$

である. (C1) の右辺に式 (1) 及び式 (2) を代入すると

$$\begin{aligned} \sum_{e \in A(v)} f(e) + d(v) \\ = \sum_{e \in A(v)} \{f'(e) + 1\} + d'(v) - \delta(v) + 1 \\ = \sum_{e \in A(v)} f'(e) + d'(v) + 1, \end{aligned}$$

である. 従って,

$$f'((fa(v), v)) + \psi(v) = \sum_{e \in A(v)} f'(e) + d'(v),$$

となり, ψ 及び f' が (C1') を満たすことがわかる. v_1 に対しても同様に示せる.

後半部分も前半部分と同様に証明できる. \square

[命題 2] Arborescence-Net $N = (V, A, c_v, d, Ub, c_a)$ に対して, 需要値変更を行なった Arborescence-Net を $N' = (V, A, c_v, d', Ub, c_a)$ とする. N 上の file transfer D に対して, 式 (2) により, D から得られる N' 上の準 file transfer を D' とすると,

$$C(D') = C(D) - \sum_{e \in A} c_a(e),$$

である.

(証明) 定義 1, 2 及び式 (2) より, 容易に示せる. \square

命題 1, 2 より, N で最適な file transfer を求める問題は, N に対して需要値の変更を行なった N' 上で最適な準 file transfer を求める問題に帰着される. 以降では, 他に断りのない限り, 単に Arborescence-Net N とい

えば, 式(1)による需要値変更を既に行ったものとし, N において最適な file transfer を求める代わりに, N' において最適な準 file transfer を求めることを考察対象とする.

4. 線形計画問題と相補定理

N の点集合 V 及び枝集合 A が, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ とする. 任意の行列 \mathbb{P} に対して, 行列 \mathbb{P}^t は \mathbb{P} の転置行列を表すものとする. 定数行列 C 及び変数行列 x をそれぞれ,

$$C = [c_v(v_1), c_v(v_2), \dots, c_v(v_n), c_a(e_1), c_a(e_2), \dots, c_a(e_{n-1})].$$

$$x = [\psi(v_1), \psi(v_2), \dots, \psi(v_n), f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_{n-1})]^t,$$

とすると, N 上で最適な準 file transfer を求める問題は, 以下のような線形計画問題 P として定式化できる.

(問題 P)

$$\psi(v_1) - \sum_{e \in A(v_1)} f(e) = d(v_1),$$

$$\psi(v_i) + f(e_{i-1}) - \sum_{e \in A(v_i)} f(e) = d(v_i) \quad (i = 2, 3, \dots, n-1),$$

$$-\psi(v_i) \geq -Ub(v_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$\psi(v_i) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$f(e_i) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

のもとで, $C \cdot x$ を最小にせよ. \square

ここで, 定数行列 b 及び変数行列 y をそれぞれ,

$$b = [d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n), -Ub(v_1), -Ub(v_2), \dots, -Ub(v_n)]^t,$$

$$y = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n],$$

とすると, P に対する双対問題は次のようになる.

(双対問題 P')

$$c_v(v_i) - \pi_i + \gamma_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

$$c_a(e) + \pi_i - \pi_j \geq 0 \quad (e = (v_i, v_j) \in A), \quad (4)$$

$$\gamma_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

のもとで, $b \cdot y$ を最大にせよ. \square

ここで, N 上の準 file transfer において, ψ 並びに f の値域が整数であることを考えると, 問題 P では, x の各要素が整数であるという条件が付帯されるべきである. しかし, この条件は必要ではない. なぜならば, 問題 P のある整数解に対応して, 双対問題 P' の最適解が存

在することが、後出の命題3によって示され、Pの最適解の中に整数解が存在することが保証されているためである。相補定理^[4]より、次の補題が容易に導ける。

[補題1] x 及び y がそれぞれ問題P及びその双対問題P'の最適解であるための必要十分条件は、Pの解 x 及びP'の解 y の要素が

$$\psi(v_i) \cdot (c_v(v_i) - \pi_i + \gamma_i) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

$$f(e) \cdot (c_a(e) + \pi_i - \pi_j) = 0 \quad (e=(v_i, v_j) \in A), \quad (7)$$

$$\gamma_i \cdot (Ub(v_i) - \psi(v_i)) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (8)$$

を満たすことである。□

次の定義は、準file transferが最適であるための条件を導く上で非常に役に立つ。

[定義3] N 上の各点 x に対して、 $\Delta(x)$ を

$$\Delta(x) \equiv c_{v_1, x} - c_v(x),$$

とする。 N 上の準file transfer $D=(\psi, f)$ に対して、

$$V_r \equiv \{v \in V \mid f(fa(v), v) = 0\} \cup \{v_1\},$$

とする。 V_r 上の各点 x に対して、 $De(x)$ の部分集合を

$$De_+(x) \equiv \{y \in De(x) \mid P_{x, y} \text{上の全ての枝 } e \text{ が } f(e) > 0\},$$

とする。ただし、 $x \in De_+(x)$ とする。この $De_+(x)$ を用いて、

$$De(D, x) \equiv \{y \in De_+(x) \mid \psi(y) < Ub(y)\},$$

とする。これらの点集合を用いて、

$$\Delta_m(x) \equiv \min\{\Delta(y) \mid y \in De(x), \psi(y) > 0\}, \quad (9)$$

$$\Delta(D, x) \equiv \begin{cases} \max\{\Delta(y) \mid y \in De(D, x)\} & (De(D, x) \neq \phi), \\ \min\{\Delta(y) \mid y \in V\} & (De(D, x) = \phi), \end{cases}$$

とする。□

定義3に関連して、以下の4個の補題が成り立つ。

[補題2] N 上の準file transfer $D=(\psi, f)$ において、

(2-1) $\psi(u) < Ub(u)$ ならば、 $\Delta(D, u) \geq \Delta(u)$ である。

(2-2) $v \in De_+(u)$ ならば、 $\Delta(D, u) \geq \Delta(D, v)$ である。

(証明) 前半部分。 $\psi(u) < Ub(u)$ ならば、 $De(D, u) \neq \phi$ であるため、明らかに $\Delta(D, u) \geq \Delta(u)$ である。

後半部分。 $De_+(u)$ 上の全ての点 v が、 $\psi(v) = Ub(v)$ ならば、定義3より、 $\Delta(D, u) = \Delta(D, v) = \min\{\Delta(y) \mid y \in V\}$ である。 $\psi(v) < Ub(v)$ である点 v が $De_+(u)$ 上に存在するならば、 $De(D, u) \supseteq De(D, v) \neq \phi$ であるため、定義3より明らかに、 $\Delta(D, u) \geq \Delta(D, v)$ である。□

[補題3] N 上の準file transfer $D=(\psi, f)$ において、

(3-1) $v \in De_+(u)$,

$$(3-2) \quad \psi(u) = Ub(u), \quad 0 \leq \psi(v) < Ub(v),$$

(3-3) $\psi(w) > 0$ である点 w は, $v_1-w \wedge'$ 上の点 w' に対して, $\Delta(w) \geq \Delta(D, w')$ を満たす.

ならば, $\Delta_m(u) \geq \Delta(v)$ が成り立つ. 更に,

$$(3-4) \quad \psi(v) > 0,$$

ならば, $\Delta_m(u) = \Delta(v)$ が成り立つ.

(証明) $De(v)$ 上の点 w が, $\psi(w) > 0$ ならば, (3-3) 及び補題 2 より, $\Delta(w) \geq \Delta(D, v) \geq \Delta(v)$. $u-v \wedge'$ 上の点 w' が, $\psi(w') > 0$ ならば, (3-3), 補題 2 より, $\Delta(w') \geq \Delta(D, w') \geq \Delta(D, v) \geq \Delta(v)$. 式 (9) より, $\Delta_m(u) = \min\{\Delta(w), \Delta(w')\} \geq \Delta(v)$. よって, 前半が成り立つ. また, $\psi(v) > 0$ ならば, 式 (9) より, $\Delta_m(u) \leq \Delta(v)$ である. 従って, 前半部分より $\Delta_m(u) \geq \Delta(v)$ であるため, 後半部分が成り立つ. \square

[補題 4] N 上の準 file transfer $D = (\psi, f)$ において,

$$(4-1) \quad v \in De(u), \quad u \neq v,$$

$$(4-2) \quad 0 \leq \psi(u) < Ub(u), \quad 0 < \psi(v) \leq Ub(v)$$

(4-3) $\psi(w) > 0$ である点 w は, $v_1-w \wedge'$ 上の点 w' に対して, $\Delta(w) \geq \Delta(D, w')$ を満たす.

ならば, $\Delta(v) \geq \Delta_m(v) \geq \Delta(u)$ が成り立ち, 更に,

$$(4-4) \quad v \in De_+(u), \quad \psi(u) > 0, \quad \psi(v) < Ub(v)$$

ならば, $\Delta(v) = \Delta(u)$ である.

(証明) $\psi(v) > 0$ 及び式 (9) より, $\Delta(v) \geq \Delta_m(v)$ である. $De(v)$ 上の点 w が, $\psi(w) > 0$, $\Delta(w) = \Delta_m(v)$ とすると, (4-1) ~ (4-3) 及び補題 2 より, $\Delta_m(v) = \Delta(w) \geq \Delta(D, u) \geq \Delta(u)$ である. 以上より, 前半部分が成り立つ. 補題 2, (4-3), (4-4) より, $\Delta(u) \geq \Delta(D, u) \geq \Delta(D, v) \geq \Delta(v)$ である. 従って, 前半部分より, $\Delta(v) \geq \Delta(u)$ であるため, 後半部分が成り立つ. \square

[補題 5] N 上の準 file transfer $D = (\psi, f)$ において,

$$(5-1) \quad v \in De_+(u),$$

$$(5-2) \quad 0 < \psi(u) < Ub(u), \quad \psi(v) = 0,$$

$$(5-3) \quad \Delta(u) \geq \Delta(D, u),$$

ならば, $\Delta(u) \geq \Delta(v)$ が成り立つ.

(証明) 補題 2 及び (5-3) より,

$$\Delta(u) \geq \Delta(D, u) \geq \Delta(D, v) \geq \Delta(v). \quad \square$$

補題 2 ~ 5 より, N 上の準 file transfer が最適であるための十分条件を示す.

[命題 3] N 上の準 file transfer $D = (\psi, f)$ において,

全ての点 v に対して, $\psi(v) = 0$ であるか, または $\psi(v) > 0$ である全ての点 v が, $v_1 - v \in \lambda$ 上の全ての点 u に対して,

$$\Delta(v) \geq \Delta(D, u) \quad (10)$$

が成り立つならば, D は最適である.

(証明) 式 (10) を満たす N 上の準 file transfer $D = (\psi, f)$ に対して, 式 (3) ~ 式 (8) を満たす変数 $\pi_i, \gamma_i (i = 1, 2, \dots, n)$ が存在することを証明すれば十分である. また, 式 (10) が成り立てば, 補題 3 ~ 5 の条件 (3-3), (4-3), (5-3) が成り立つことに注意.

D 上で全ての点 v_i が, $\psi(v_i) = 0$ ならば, 全ての枝 e は, $f(e) = 0$ であるため, 式 (7) が成り立つ. 各点 v_i に対して, $\gamma_i = 0$ とする. 明らかに, ψ 及び γ は, 式 (5), 式 (6), 式 (8) を満たす. また, 各点 v_i に対して, $\pi_i = c_{v_1, v_i} - \max\{\Delta(v) \mid v \in V\}$ とすると, π が式 (4) を満たすのは, 明らか. 更に, $c_v(v_i) - \pi_i + \gamma_i = \max\{\Delta(v) \mid v \in V\} - \Delta(v_i) \geq 0$ であり, 式 (3) が成り立つ. 以上より, $D = (\psi, f)$ 上の全ての点 v が, $\psi(v) = 0$ ならば, D は最適である.

次に, 準 file transfer $D = (\psi, f)$ において, $\psi(v) > 0$ である点 v が存在する場合を考える. 定義 3 で定義される V_r 上の点 v_i が $\psi(v_i) = Ub(v_i)$ の場合, $De_+(v_i)$ 上の各点 v_j に対して,

$$\pi_j = c_{v_1, v_j} - \Delta_m(v_i), \quad (11)$$

とする. V_r 上の点 v_i が $0 < \psi(v_i) < Ub(v_i)$ の場合, $De_+(v_i)$ 上の各点 v_j に対して,

$$\pi_j = c_v(v_i) + c_{v_1, v_j}, \quad (12)$$

とする. V_r 上の点 v_i が $\psi(v_i) = 0$ ならば, $v_k = fa(v_i)$ に対して,

$$\pi_i = \begin{cases} \min\{\pi_k + c_a(v_k, v_i), c_v(v_i)\} & (v_i \in V_r - \{v_i\}), \\ -\Delta_m(v_i) & (v_i = v_i), \end{cases} \quad (13)$$

とする. ここで, V 上の各点 v_j は, V_r 上のある点 v_i に対して, $v_j = v_i$ の場合も含めて, $v_j \in De_+(v_i)$ である. 従って, $V = \bigcup_{v_i \in V_r} De(v_i)$, $De_+(u) \cap De_+(v) \neq \emptyset (u \neq v, u, v \in V_r)$,

であるため, 上記のような π の割り当ては, V 上の全ての点に対して重複することなく割り当てられていることに注意. 次に, $\psi(v_i) = Ub(v_i)$ を満たす各点 v_i に対して,

$$\gamma_i = \pi_i - c_v(v_i), \quad (14)$$

とすると, 式 (3) 及び式 (6) が成り立つ. また, $\psi(v_i) < Ub(v_i)$ を満たす各点 v_i に対して,

$$\gamma_i = 0, \quad (15)$$

とすると、式(5)が成り立つ。また、式(15)により、全ての γ に対して、式(8)が成り立つことに注意。従って、以下では、 $\psi(v_i) = Ub(v_i)$ ならば、式(5)が成り立ち、 $0 < \psi(v_j) < Ub(v_j)$ ならば、

$$c_v(v_j) - \pi_j + \gamma_j = 0, \quad (16)$$

が成り立ち、 $\psi(v_j) = 0$ ならば、式(3)が成り立つことを証明すればよい。また、以下では、 V 上の点 v_j に対して、 $v_i = fa(v_j)$ とし、 V_r 上の点 u が、 $u = v_i$ の場合も含め、 $v_i \in De_+(u)$ を満たすものとする。 v_j と V_r の関係によって場合分けして考える。

Case 1. $v_j \notin V_r$, 即ち、 $f(v_i, v_j) > 0$ の場合、式(11)、式(12)より、明らかに式(4)及び式(7)が成り立つ。

Case 1-1. $\psi(u) = Ub(u)$ の場合、 $\psi(v_j) = Ub(v_j)$ ならば、 $v_j \in De_+(u)$ であるため、式(9)より、 $\Delta(v_j) \geq \Delta_m(u)$ である。式(11)、式(14)より、 $\gamma_j = \Delta(v_j) - \Delta_m(u) \geq 0$ 。次に、 $\psi(v_j) < Ub(v_j)$ ならば、式(11)及び式(15)より、

$$c_v(v_j) - \pi_j + \gamma_j = \Delta_m(u) - \Delta(v_j). \quad (17)$$

$0 < \psi(v_j) < Ub(v_j)$ ならば、式(10)より、補題3が成り立ち、 $\Delta_m(u) = \Delta(v_j)$ であり、式(16)を満たす。 $\psi(v_j) = 0$ ならば、式(10)より、補題3が成り立ち、 $\Delta_m(u) \geq \Delta(v_j)$ であるため、式(17)より、式(3)が成り立つ。

Case 1-2. $0 < \psi(u) < Ub(u)$ の場合、まず、 $\psi(v_j) = Ub(v_j)$ ならば、式(10)より、補題4が成り立ち、 $\Delta(v_j) \geq \Delta(u)$ である。従って、式(12)、式(14)より、 $\gamma_j = \Delta(v_j) - \Delta(u) \geq 0$ 。次に、 $\psi(v_j) < Ub(v_j)$ ならば、式(12)、式(15)より、

$$c_v(v_j) - \pi_j + \gamma_j = \Delta(u) - \Delta(v_j), \quad (18)$$

である。 $0 < \psi(v_j) < Ub(v_j)$ ならば、式(10)より、補題4が成り立ち、 $\Delta(u) = \Delta(v_j)$ であるため、式(18)より、式(16)が成り立つ。 $\psi(v_j) = 0$ ならば、式(10)より、補題5が成り立ち、 $\Delta(u) \geq \Delta(v_j)$ であるため、式(18)より、式(3)が成り立つ。

Case 2. $v_j \in V_r$, 即ち、 $f(v_i, v_j) = 0$ の場合、まず、 $\psi(v_j) = Ub(v_j)$ ならば、式(9)、式(11)、式(14)より、 $\gamma_j = \Delta(v_j) - \Delta_m(v_j) \geq 0$ となり、式(5)が成り立つ。 $0 < \psi(v_j) < Ub(v_j)$ ならば、式(12)より、 $c_v(v_j) - \pi_j + \gamma_j = 0$ となり、式(16)が成り立つ。 $\psi(v_j) = 0$ ならば、式(13)より、 $\pi_j \leq c_v(v_j)$ であるため、式(3)が成り立つ。以上より、式(4)及び式(7)以外は全て成り立つことが証明された。Case 2 では、 $f(v_i, v_j) = 0$ であるため、式(7)が成り立つ。また、 $\psi(v_j) = 0$ ならば、式(13)より、 $\pi_j \leq$

$\pi_i + c_a(v_i, v_j)$ であるため, 式(4)が成り立つ. 従って, 以下では, $\psi(v_j) > 0$ である (v_i, v_j) に対して, 式(4)が成り立つことを示せばよい.

式(11)~式(13)より, $v_1 - v_1 \wedge \lambda$ 上の点 v_x に対して,

$$\pi_i = \pi_x + c_{v_x, v_1}, \quad (19)$$

となり, $\pi_x = c_v(v_x)$ または, $\pi_x = c_{v_1, v_x} - \Delta_m(v_x)$ である.

Case2-1 $\pi_x = c_{v_1, v_x} - \Delta_m(v_x)$ の場合. 式(11)~式(13)より, $\psi(v_x) = Ub(v_x)$ である. $\psi(v_j) = Ub(v_j)$ ならば, $v_j \in De(v_x)$ であるため, 式(9)より, $\Delta_m(v_j) \geq \Delta_m(v_x)$ である. 式(11)より, $c_a(v_i, v_j) + \pi_i - \pi_j = \Delta_m(v_j) - \Delta_m(v_x) \geq 0$ である. $0 < \psi(v_j) < Ub(v_j)$ ならば, 式(9)より, 明らかに $\Delta(v_j) \geq \Delta_m(v_x)$ である. 従って, 式(11), 式(12)より, $c_a(v_i, v_j) + \pi_i - \pi_j = \Delta(v_j) - \Delta_m(v_x) \geq 0$. よって $\psi(v_j) > 0$ である (v_i, v_j) に対して, 式(4)が成り立つ.

Case2-2 $\pi_x = c_v(v_x)$ の場合. 式(11)~式(13)より, $\psi(v_x) < Ub(v_x)$ である. 式(15)より, 補題4が成り立つため, $\Delta(v_j) \geq \Delta_m(v_j) \geq \Delta(v_x)$ である. $\psi(v_j) = Ub(v_j)$ ならば, 式(11), 式(19)より, $c_a(v_i, v_j) + \pi_i - \pi_j = \Delta_m(v_j) - \Delta(v_x) \geq 0$ である. $0 < \psi(v_j) < Ub(v_j)$ ならば, $c_a(v_i, v_j) + \pi_i - \pi_j = \Delta(v_j) - \Delta(v_x) \geq 0$ である. よって $\psi(v_j) > 0$ である (v_i, v_j) に対して, 式(4)が成り立つ. \square

5. 最適な準 file transfer であるための必要十分条件

この章では, N 上の準 file transfer が最適であるための必要十分条件を示す. まず, 与えられた準 file transfer に対する, 点 x から点 y への transfer change を定義する.

[定義4] N 上の準 file transfer $D = (\psi, f)$ に対して, 点 x , 点 y , 及び x, y の関係が以下の条件を満たすとす.

$$(TC1) \quad \psi(x) < Ub(x), \quad \psi(y) > 0,$$

$$(TC2) \quad y \in De(x) \text{ か, または, } v_1 - y \wedge \lambda \text{ 上のある点 } z \text{ に対して, } x \in De_+(z).$$

このとき, 以下の操作により, D から $D' = (\psi', f')$ を得ることを, D に対する, x から y への transfer change と呼ぶ.

(I) $y \in De(x)$ の場合

$$\delta_1 \equiv \min \{ Ub(x) - \psi(x), \psi(y) \},$$

とし, V 上の関数 ψ' 並びに A' 上の関数 f' を

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= \psi(x) + \delta_1, \\
\psi'(y) &= \psi(y) - \delta_1, \\
\psi'(v) &= \psi(v) \quad (v \in V - \{x, y\}), \\
f'(e) &= f(e) + \delta_1 \quad (e \in P_{x, y}), \\
f'(e) &= f(e) \quad (\text{otherwise}).
\end{aligned}$$

とする.

(II) $y \notin De(x)$ の場合,

$\delta_2 \equiv \min \{ Ub(x) - \psi(x), \psi(y), \min \{ f(e) \mid e \in P_{z, x} \} \}$,
とし, V 上の関数 ψ' 並びに A' 上の関数 f' を

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= \psi(x) + \delta_2, \\
\psi'(y) &= \psi(y) - \delta_2, \\
\psi'(v) &= \psi(v) \quad (v \in V - \{x, y\}), \\
f'(e) &= f(e) - \delta_2 \quad (e \in P_{z, x}), \\
f'(e) &= f(e) + \delta_2 \quad (e \in P_{z, y}), \\
f'(e) &= f(e) \quad (\text{otherwise}). \quad \square
\end{aligned}$$

[命題 4] N 上の準 file transfer $D = (\psi, f)$ において, 2 点 x 及び y が定義 4 の (TC1) 及び (TC2) の条件を満たすとする. このとき D に対して, x から y への transfer change を行った結果得られる $D' = (\psi', f')$ は N 上の準 file transfer であり, 定義 4 の $\delta_i (i \in \{1, 2\})$ は, $\delta_i > 0$ を満たし, かつ,

$$C(D') - C(D) = \delta_i \{ \Delta(y) - \Delta(x) \},$$

が成り立つ.

(証明) 定義 4 において ψ' が V 上の任意の点 v に対して, $\psi'(v) \leq Ub(v)$, $\psi'(v) \in \mathbb{Z}$ であり, (TC2) より, A 上の任意の枝 e に対して, $f'(e) \in \mathbb{Z}$ である. また, ψ' 並びに f' が (C1') を満たすことは明らか. 従って, $D' = (\psi', f')$ は N 上の準 file transfer である. 明らかに, (TC1) 及び (TC2) より, $\delta_i > 0 (i \in \{1, 2\})$ が成り立つ. 更に, $y \in De(x)$ の場合, 定義 3, 4 より,

$$\begin{aligned}
C(D') - C(D) &= c_v(x) \cdot \{ \psi'(x) - \psi(x) \} \\
&\quad + c_v(y) \cdot \{ \psi'(y) - \psi(y) \} \\
&\quad + \sum_{e \in P_{x, y}} c_a(e) \cdot \{ f'(e) - f(e) \} \\
&= \delta_1 \cdot \{ c_v(x) - c_v(y) + c_{x, y} \} \\
&= \delta_1 \cdot \{ \Delta(y) - \Delta(x) \},
\end{aligned}$$

である. $y \notin De(x)$ の場合も同様に証明できる. \square

以上を基に, N 上の準 file transfer が最適であるための必要十分条件が求められる.

[定理] Arborescence-Net N において, 準 file

transfer $D = (\psi, f)$ が最適であるための必要十分条件は, $\psi(v) > 0$ である全ての点 v が $v_1 - v \wedge \lambda$ 上の全ての点 u に対して,

$$\Delta(v) \geq \Delta(D, u), \tag{20}$$

が成り立つことである.

(証明) 十分性は命題 3 より, 明らかであるため, ここでは必要性のみ証明する. 式 (20) が成り立たない, 即ち, $\psi(v) > 0$ である点 v に対して,

$$\Delta(D, u) > \Delta(v), \tag{21}$$

である点 u が $v_1 - v \wedge \lambda$ 上に存在すると仮定し,

$$\Delta(w) = \Delta(D, u), \tag{22}$$

とする. 式 (21) を満たす v が存在するため, 定義 3 より, $\psi(v) < Ub(v)$ である. w と v の関係により, w が $v_1 - v \wedge \lambda$ 上に存在する場合と存在しない場合とに分けられるが, いずれの場合も, w 及び v は (TC1) 及び (TC2) を満たす. 命題 4 より, D に対して, w から v への transfer change を行なえば, N 上の準 file transfer D' が得られ,

$C(D') - C(D) = \delta_i \{ \Delta(v) - \Delta(w) \}$ ($i \in \{1, 2\}$),
 が成り立つ. 式 (21), 式 (22) より, $\Delta(v) < \Delta(w)$ である. また, 命題 4 より, $\delta_i > 0$ であるため, 結局, $C(D') < C(D)$ である. 従って, 必要性は証明された. \square

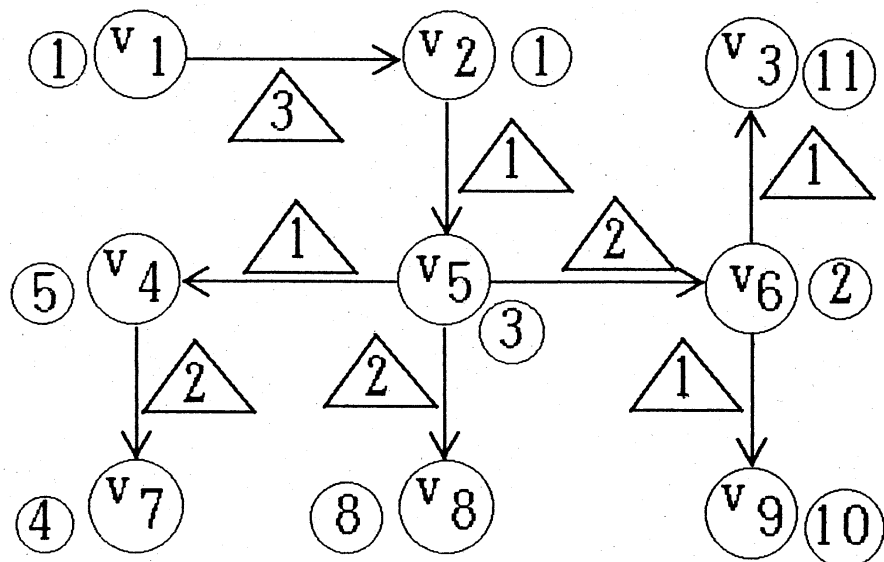


図 1-1. Arborescence-Net N (点のリスト, 枝のリスト)

6. 図例

図例を示す. 図 1 の Arborescence-Net N において, \circ , Δ , \square , ∇ で囲まれた値はそれぞれ付近の点のリスト, 枝のリスト, 点の需要値, 及び点の供給上限を示す. この N に対

して、需要値変更を行なった結果、各点の需要値は、
 $d'(v_1) = 1, d'(v_2) = 1, d'(v_3) = 2, d'(v_4) = 2,$
 $d'(v_5) = 3, d'(v_6) = 2, d'(v_7) = 2, d'(v_8) = 2,$
 $d'(v_9) = 1,$

になる。また、各点の Δ は以下の通りである。

$$\Delta(v_1) = -1, \Delta(v_2) = 2, \Delta(v_3) = -4, \Delta(v_4) = 0,$$

$$\Delta(v_5) = 1, \Delta(v_6) = 4, \Delta(v_7) = 3, \Delta(v_8) = -2,$$

$$\Delta(v_9) = -3,$$

である。

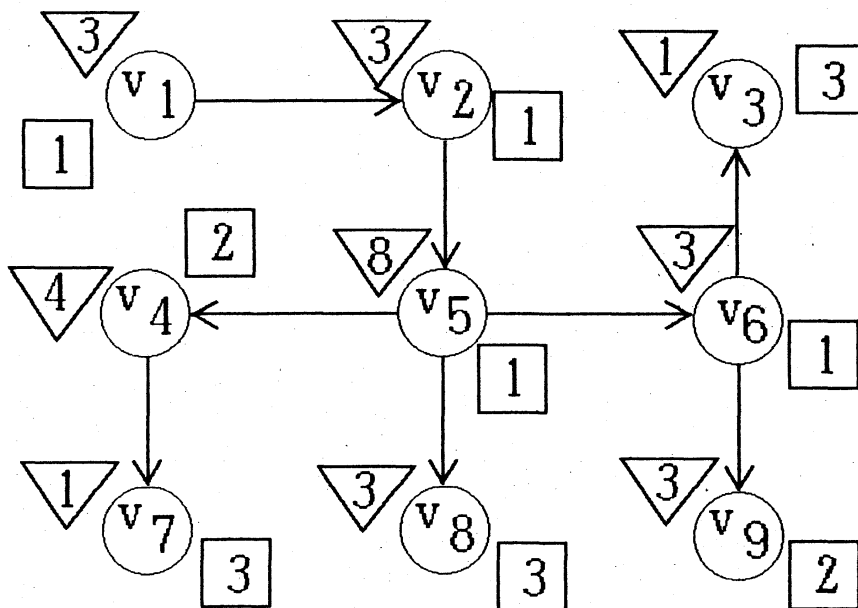


図 1-2. Arborescence-Net N (点の需要値及び供給上限)

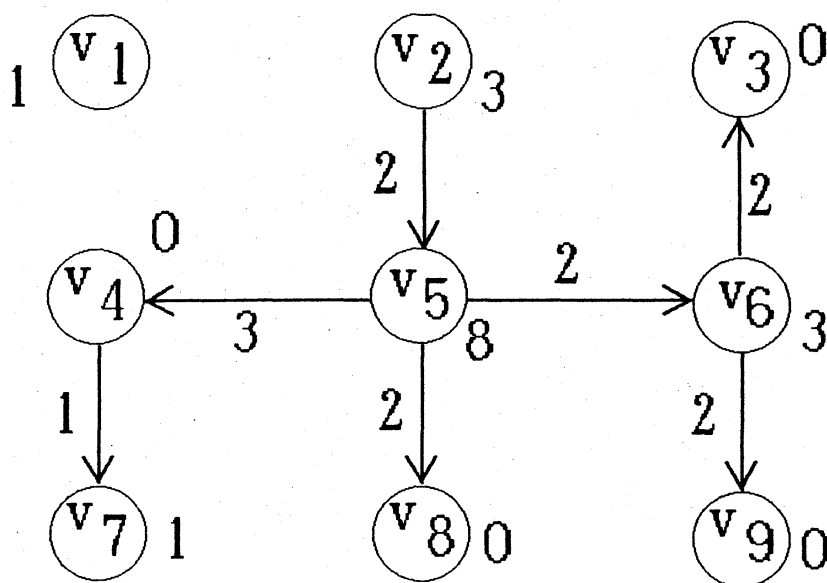


図 2. N 上の準 file transfer $D = (\psi, f)$

図2のようなN上の準file transfer $D = (\psi, f)$ を考える. 図2において点 v 付近の値は $\psi(v)$ を示し, 枝 e 付近の値は $f(e)$ を示す. ただし, A上の枝 e が $f(e) = 0$ ならば, e は図2においては存在しない. この D に対して,

$$\Delta(D, v_1) = -1, \Delta(D, v_2) = 0, \Delta(D, v_3) = -4,$$

$$\Delta(D, v_4) = 0, \Delta(D, v_5) = 0, \Delta(D, v_6) = -3,$$

$$\Delta(D, v_7) = -4, \Delta(D, v_8) = -2, \Delta(D, v_9) = -3,$$

である. ここで, $\psi(v) > 0$ である点 v は, v_1, v_2, v_5, v_6, v_7 である. v_1 に対して,

$$\Delta(v_1) = \Delta(D, v_1).$$

$v_1 - v_2$ の上では, $\psi(v_1) > 0, \psi(v_2) > 0$ であり,

$$\Delta(v_2) > \Delta(D, v_1), \Delta(v_2) > \Delta(D, v_2).$$

$v_1 - v_5$ の上では, $\psi(v_1) > 0, \psi(v_2) > 0, \psi(v_5) > 0$ であり,

$$\Delta(v_5) > \Delta(D, v_1), \Delta(v_5) > \Delta(D, v_2),$$

$$\Delta(v_5) > \Delta(D, v_5).$$

$v_1 - v_6$ の上では, $\psi(v_1) > 0, \psi(v_2) > 0, \psi(v_5) > 0,$

$\psi(v_6) > 0$ であり,

$$\Delta(v_6) > \Delta(D, v_1), \Delta(v_6) > \Delta(D, v_2),$$

$$\Delta(v_6) > \Delta(D, v_5), \Delta(v_6) > \Delta(D, v_6).$$

$v_1 - v_7$ の上では, $\psi(v_1) > 0, \psi(v_2) > 0, \psi(v_4) > 0,$

$\psi(v_5) > 0, \psi(v_7) > 0$ であり,

$$\Delta(v_7) > \Delta(D, v_1), \Delta(v_7) > \Delta(D, v_2),$$

$$\Delta(v_7) > \Delta(D, v_4), \Delta(v_7) > \Delta(D, v_5),$$

$$\Delta(v_7) > \Delta(D, v_7).$$

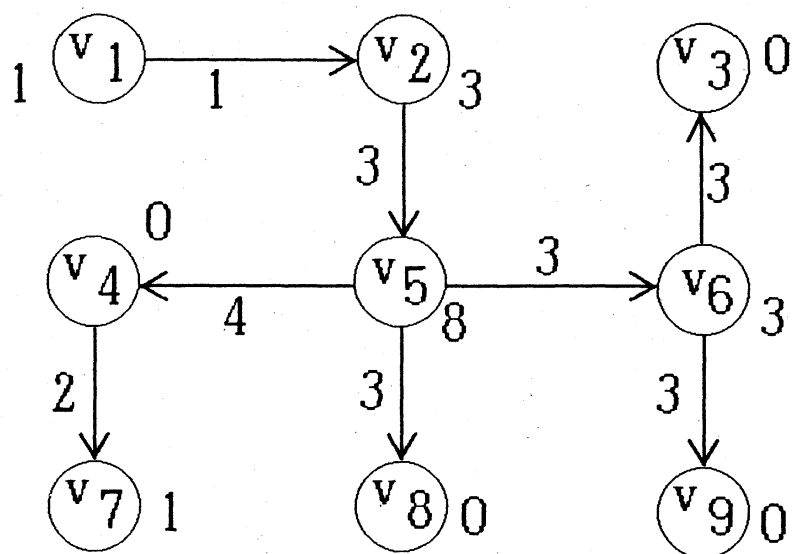


図3. N上の最適なfile transfer $D' = (\psi, f')$

以上より, この D は, 式 (20) を満足するため, 定理より, D は N 上で最適である. 式 (2) を用いると, 図 2 より, 最適な file transfer $D' = (\psi, f')$ は図 3 のようになる. ただし, 図 4 において点 v 付近の値は $\psi(v)$ を示し, 枝 e 付近の値は $f'(e)$ を示す.

7. むすび

本報告では, 点に, コスト, 需要値, 供給上限を持ち, 枝にコストを持つ arborescence の構造のファイル転送ネットワーク (Arborescence-Net) N において, N の根から, 複製可能なファイル J のコピーを, 定義する file transfer を通して, 各点に提供する問題を考察対象とした. file transfer D を通して, 各点において J をコピーするのに要するコストと, J のコピーを各枝を通して送るのに要するコストとの和を D のコストと定義し, N において, コストが最小となる file transfer を N 上の最適な file transfer と定義し, 最適な file transfer を求めることを目的とした. 考察の結果, file transfer と 1 対 1 対応する準 file transfer を用いて, N において, file transfer が最適であるための必要十分条件を明らかにした.

今後の課題として, この必要十分条件を基に, 実際に最適な file transfer を求めるアルゴリズムを構築することが挙げられる.

参考文献

- [1] Kaneko Y., Tashiro R., Shinoda S., & Horiuchi K. "A linear-time algorithm for designing an optimal file transfer through an arborescence-net," IEICE Trans. E75-A, 7, pp. 901-904, Jul. 1992.
- [2] Kaneko Y., Shinoda S., & Horiuchi K. "A synthesis of an optimal file transfer on a file transmission net," IEICE Trans. E76-A, 3, pp. 377-386, Mar. 1993.
- [3] 伊理正夫, 白川功, 梶谷洋司, 篠田庄司: 演習グラフ理論, コロナ社 (1983).
- [4] 古林隆: 線形計画法入門, 産業図書 (1980).
- [5] 金子美博, 篠田庄司, 堀内和夫, "複製部数に制限のある Arborescence-Net 上の最適な file transfer の構成について," 電子情報通信学会 1993 年秋季大会 (1993.9).