数理解析研究所講究録
853巻 1993年 176-182


# Weighing行列の構成

愛媛大 教育　大森博之(Hiroyuki Ohmori)

位数$n$, 重さ$k$の Weighing行列($W$)とは、成分が$0$, $+1$, $-1$で$W{}^tW=kI_n$のときをいう。ただし、${}^tW$は$W$の転置行列である。特に$k=n$のときは、位数$n$の Hadamard行列と呼ばれている。

今、同一な位数および重さを持つ2つのWeighing行列が与えられているとき、一方の行列の行および列の適当な置換、さらに行および列に適当に$-1$をかけることにより他方の行列に一致させることができるとき、2つの行列は同値であるとする。この同値関係により分類が完成されているものは、現在のところ以下の通りである([1],[3])。

(i) 重さ$k$が5以下の場合ですべての位数$n$について。

(ii) 位数が13以下の場合ですべての重さについて。

(iii) 位数が28以下のHadamard行列について。

筆者は、重さ6のWeighing行列の分類を試みているが、未だ完成されていない。今回も、その中間報告である。

任意の位数の、重さ6のWeighing行列が与えられたとき、最初の6×6行列は一般性を失うことなく次下の形をしている。

$$(*)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & & & \\ 1 & & & & & \\ 1 & & & a_{ij} & & \\ 1 & & & & & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix}$$

$a_{ij}$ は 0, ±1 で A の 2〜6 行および 2〜6 列は才一行および才一列に直交している。

今、(*)の条件をみたす 6×6 行列を実行可能な行列と呼ぶことにする。また、実行可能な2つの行列が与えられたとき、一方の行列またはその転置行列の行および列の適当な入れ換えさらに行および列に適当に −1 をかけて他方の実行可能な行列に一致させることが出来るとき、2つの行列は同値であるとする。このとき次のことがいえる。

命題 1　同値でない実行可能な行列は 25 個ある。

その内の一つに、(*)の成分が $a_{ij} = -\delta_{ij}$（クロネッカーデルタ）のものがある。前回の報告でこのタイプに属する行列は、「同値性を除いて一意である」と主張したが、これは誤りである事が判明した。以下その訂正と若干の新しい結果を述べる。尚、上述のタイプに属する行列を SBP 型であるとする（そのような行列 W が存在するとすると W*W : W の Hadamard 積は Semi-bi plane の結合行列となっている）。

命題２　位数 $2^{k+1}$，重さ $k$ の SBP 型 Weighing 行列が任意の正整数 $k$ に対して存在する。

（略証）行列 $X\,(l\times m)$，$Y\,(l'\times m')$（ただし $l>l'$）に対し

$$X \oplus Y = \left[\begin{array}{c|c} X & O_{(l-l')\times m'} \\ \cline{2-2} & Y \end{array}\right]$$ とする。

また

$S_d^{(1)} = [\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{d}]$ を level 1, size $d$ の

S－行列という。

帰納的に，level $i+1$, size $d$ の S－行列を

$$S_d^{(i+1)} = \begin{bmatrix} S_{d-1}^{(i)} \\ (-1)^i I_{C(d-1,i)} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} S_{d-2}^{(i)} \\ (-1)^i I_{C(d-2,i)} \end{bmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{bmatrix} S_i^{(i)} \\ (-1)^i I_{C(i,i)} \end{bmatrix}$$

によって定義する。ただし，$d \geqq i+1 \geqq 2$，

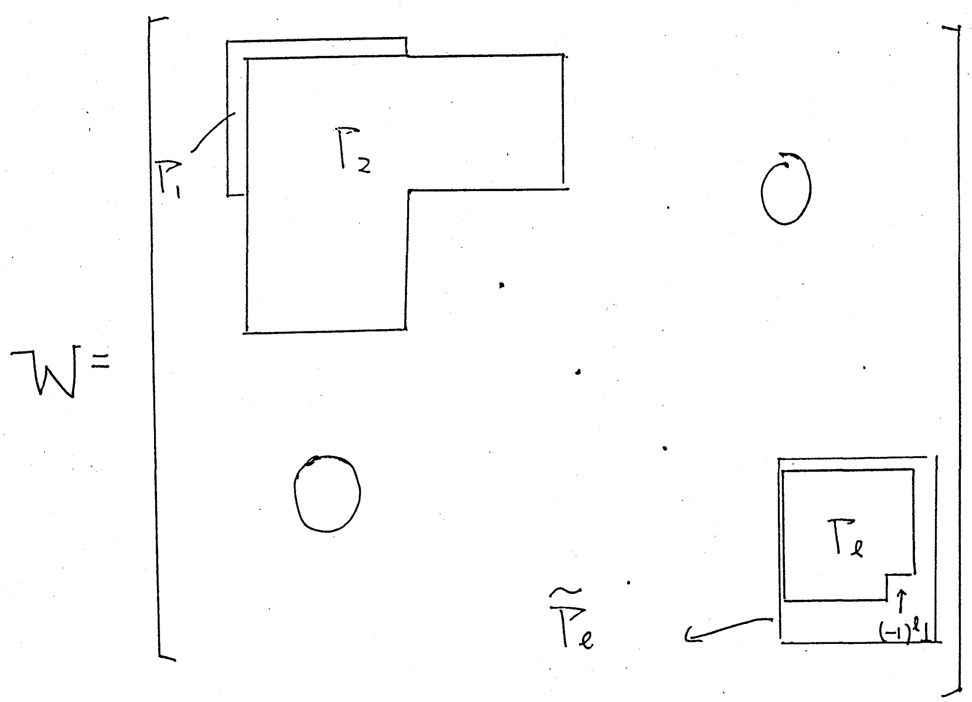
$I_r$ は位数 $r$ の単位行列，また $C(d,j) = {}_dC_j$

構成　$\Gamma_i = \left[\begin{array}{c|c} (-1)^{i-1} I_{C(l,i-1)} & S_l^{(i)} \\ \hline (S_l^{(i)})^t & \end{array}\right]$ とおく。

ただし，$k = l-1$，$1 \leqq i \leqq l$

$W = \mathrm{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_{l-1}, \tilde{\Gamma}_l)$ が求めるもの。

ここに $\mathrm{diag}(\cdot, \cdot, \cdots, \cdot)$ は




(注1) 行列 $H_2$ を位数2のHadamard行列とする。$W_k$ $(k \geqq 3)$ を帰納的に

$$W_k = \begin{bmatrix} W_{k-1} & I_{k-1} \\ I_{k-1} & -W_{k-1} \end{bmatrix} \quad (W_2 = H_2)$$

とすると $W_k$ は位数 $2^{k-1}$, 重さ $k$ のSBP型のWeighing行列となる。$k=3,4,5,6$ に対して $W$ と $W_k$ は同値となるが、一般の $k$ に対しても同型と思われる。

(注2) 重さ $k$ のSBP型のWeighing行列の位数を $n$ とすると、

$$(**) \qquad {}_kC_2 + 1 \leqq n \leqq 2^{k-1}$$

と思われるが証明は出来ていない(ただし、行列は既約とする)。

以下、$k=5,6$ に対して、$(**)$ の等号を満さない行列の存在を示す。

[Ⅰ] $k=5$ のときのSBP型のWeighing行列

この場合行列の位数 $n$ は $n=11, 12, 16$ である。しかし、$n=11$ の場合、balanced weighing design となり存在しない事が知られている。

一方、$k$ が5以下の場合のWeighing行列の分類は完成されているとされていた(1.(11))。しかし、その分類には無い新しい行列を構成することが出来た。構成方法は[Ⅱ]で示す。

命題3　位数12,重さ5のSBP型のWeighing行列が一意に存在する(F1)。

[Ⅱ] $k=6$ のときのSBP型のWeighing行列

この場合、もしこの型の行列が存在するとすれば $n=16, 20, 24, 28$ である。$n=16, 28$ は不等式(**)で等号が成立する。この節で、$n=16$ の場合(balanced weighing design)は不存在である事及び $n=20$ の場合の一構成法を示す。

命題4　位数16,重さ6のSBP型のWeighing行列は存在しない。

(略証) もしそのような行列 $W$ が存在したとすると $W*W$ は 2-(16, 6, 2) デザインとなる。そのようなデザインは同値を除くと3個存在

する(2)。その中の一つは F2と同型である。Weighing行列を構成する際、一般性を失うことなく F3としてよい。F3の $S$ を決定するのに F2に従って ±1 を入れてゆくと、すぐに直交性が失われてゆくことがわかる。他の2つのデザインについても同様である。従って balanced Weighing design (16,6,2)は存在しない。

次に F3において、$S$ が第1行〜第6行及び第1列〜第6列に直交する為の条件は F4における 5つの模様からなる 5種類の 4×4行列を作る時、各々の行列は Signed permutation matrix でなくてはならない。計算機によると、$S$を含めた F3の同値でない行列は 715個出来る。その各々に対して、更に4行4列を加えて構成したものの一つが F5である。その他にもたくさん、行列が構成できるが、その分類は終っていない。

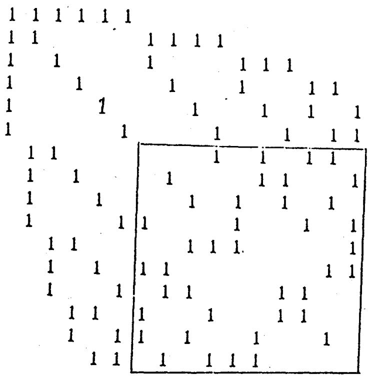
(注3) 上の手法で構成したものが F1である。また、$n=20$ の場合の構成法は 上述の715個の行列を基として、$n=24, 28$ の場合も同様に(もし存在すれば)適用できると思われる。

F1:

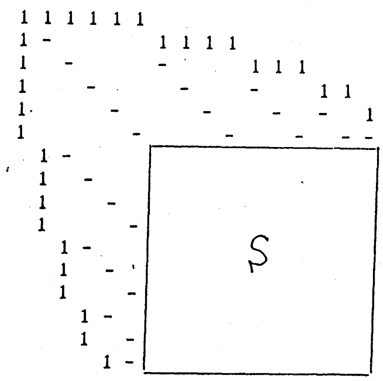
$$
\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & \\
1 & - & & & & 1 & 1 & 1 & & & & \\
1 & & - & & & - & & & 1 & 1 & & \\
1 & & & - & & & - & & - & & 1 & \\
1 & & & & - & & & - & & - & - & \\
 & 1 & - & & & & & 1 & & - & & 1 \\
 & 1 & & - & & 1 & & & 1 & & & - \\
 & 1 & & & - & & 1 & & - & 1 & & \\
 & & 1 & - & & - & & 1 & & & - & \\
 & & 1 & & - & & & & 1 & & 1 & 1 \\
 & & & 1 & - & & - & 1 & & & & - \\
 & & & & & 1 & - & & & 1 & - & 1
\end{array}
$$

(ーは−1を 空白は0を表す)

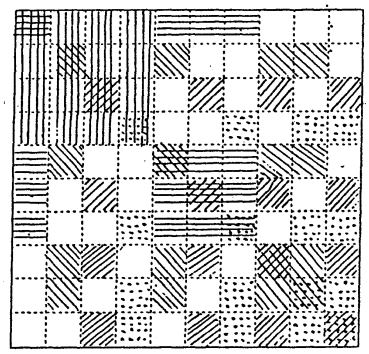
以下同様



F2 : D(16,6,2)

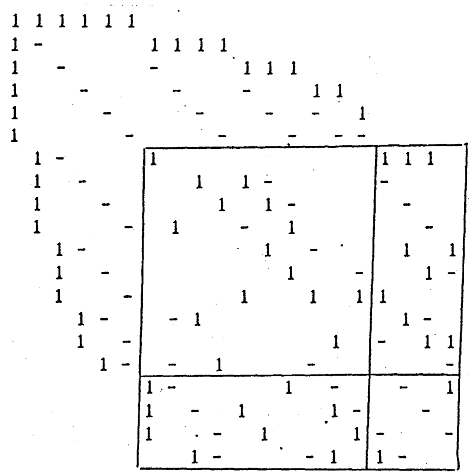


F3



F4

F5:



(SBP型の W(20,6))

# 参考文献

(1) H.C. Chan, et. al., "On equivalent weighing matrices", ARS Combinatoria (1986)

(2) N. Hamada, "On the p-Rank of the Incidence Matrix of a Balanced or Partially Balanced Incomplete Block design and its Applications to Error Correcting Codes", Hiroshima Mathematical Journal (1973)

(3) H. Ohmori, "Classification of weighing matrices of small orders", Hiroshima Mathematical Journal (1992)