数理解析研究所講究録
第 853 巻 1993 年 148-161


# 新しい $2^m$ 型直交計画の特徴づけ

国際自然研 山本 純恭 (Sumiyasu Yamamoto)
岡山理大·国際自然研 藤井 淑夫 (Yoshio Fujii)
岡山理大·国際自然研 兵頭 義史 (Yoshifumi Hyodo)
岡山理大(院) 弓場 弘 (Hiromu Yumiba)

従来知られている $2^m$ 型直交計画では, 大きさ $n$ が 2 ベキで, 最大制約数をもついわゆる直交表(特定の強さ 2 の直交配列) の $m$ 個の列を選定して得られる直交配列の各列に順次因子を割り付け, 行を処理組合せとして実験を供用することがなされている. この場合には, run の数 $n$ は, 8, 16, 32 さらに 64 と急速に増大し, 実用的でなくなる. ところが次の (i), (ii) で述べる直交配列を用いると, さらに多様な直交計画の存在が期待される:

(i) 大きさ $n$ が 2 ベキの場合のみならず 4 の倍数のとき, 最大制約数 $n-1$ をもつ直交配列が実用的な範囲で数多く存在する. これは, 位数 $n=4\lambda$ のアダマール行列の存在と同値である.

(ii) $n \geq 16$ の場合には、因子および水準の置換に関して非同型な最大制約数 $n-1$ をもつ直交配列が複数存在する. 非同型な類の数は, $n=16$ のとき 5, $n=20$ のとき 3 である (Yamamoto et al. (1992a,b)).

本報告の目的は, 次の (1) ~ (3) である:

(1) 大きさ 16 の 5 種の代表直交配列から導かれる 16-run の可能なすべての $2^5$ および $2^6$ 型直交計画を類別 (因子および水準の置換) し, 各類の代表計画とその特性ベクトルを列挙する.

(2) 大きさ 20 の 3 種の代表直交配列から導かれる 20-run の可能なすべての $2^5$ 型直交計画を類別し, 各類の代表計画とその特性ベクトルを列挙する.

(3) 新しい $2^m$ 型直交計画を例示し, その特徴づけを行う.

$2^m$ 型要因計画の因子を $F(1), F(2), \ldots, F(m)$ とし, $\theta(\phi), \theta\{t_1\}$ および$\theta(K), K=\{t_1, \ldots, t_k\}$ をそれぞれ一般平均, $F(t_1)$ の主効果および $F(t_1), \ldots, F(t_k)$ の $k$ 因子交互作用とする. $n \times m$ (0,1)-配列 $T$ および $n$ 次元列ベクトル $\boldsymbol{y}(T)$ をそれぞれ $n$-run の $2^m$ 型要因計画およびその観測値ベクトルとし, その線形模型を $\boldsymbol{y}(T)=E(T)\Theta+\boldsymbol{e}$ とする. ここに $E(T)$ は $(\alpha, \theta(K))$ 要素が, $\prod_{i\in K} d(j_i^{(\alpha)})$ である計画行列, $\Theta$ はすべての要因効果のベクトル, $\boldsymbol{e}$ は誤差ベクトルで$\boldsymbol{e} \sim (\boldsymbol{0}, \sigma^2 I_n)$ とする. ただし, $d(j)=-1, 1$ $(j=0,1)$. 観測値の平均は,

$$\mathcal{E}[y(j_1^{(\alpha)}, \ldots, j_m^{(\alpha)})] = \sum_{u=0}^{m} \sum_{U\in\Omega(u)} \prod_{i\in U} d(j_i^{(\alpha)})\theta(U) \qquad (\alpha=1,2,\ldots,n)$$

で与えられる. ここに $\Omega(u)$ は $\Omega = \{1, 2, \ldots, m\}$ の $u$ 点部分集合の全体である.

**定義 1.** $\theta(K)$ に対応する $E(T)$ の列ベクトル $\boldsymbol{d}(K)$ を $\theta(K)$ の **loading ベクトル**といい, その成分の総和 $\|\boldsymbol{d}(K)\| = \gamma(K)$ を **loading 係数**という.

2 つの loading ベクトルの Schur 積 $(*)$ は $\boldsymbol{d}(U) * \boldsymbol{d}(V) = \boldsymbol{d}(U \triangle V)$ を満たす. ここに $A \triangle B$ は集合 $A$, $B$ の対称差を表す. 情報行列 $M(T) = E(T)'E(T)$ の $(\theta(U), \theta(V))$ 要素は,

$$\varepsilon(U, V) = \|\boldsymbol{d}(U) * \boldsymbol{d}(V)\| = \|\boldsymbol{d}(U \triangle V)\| = \gamma(U \triangle V)$$

で与えられる.

**定義 2.** 情報行列 $M(T)$ の第 1 行である行ベクトル $\boldsymbol{\gamma}(T)$ を $M(T)$ の**特性ベクトル**という.

$n$-run の $2^m$ 型要因計画 $T$ を与えることは, 主効果の loading ベクトルを与えることと同値である. このことからすべての要因効果の loading ベクトル, loading 係数ひいては計画行列 $E(T)$, さらに特性ベクトル $\boldsymbol{\gamma}(T)$ および情報行列 $M(T)$ が定まる.

正規方程式 $M(T)\Theta = E(T)'\boldsymbol{y}(T)$ の $\theta(\phi)$ に対応する項は,

$$n\theta(\phi) + \sum_{u=1}^{m} \sum_{U \in \Omega(u)} \gamma(U)\theta(U) = \|\boldsymbol{d}(\phi) * \boldsymbol{y}(T)\| \tag{1}$$

で与えられ, $\theta(K)$ $(|K| = k)$ に対応する項は,

$$n\theta(K) + \sum_{u=0}^{m} \sum_{K \neq U \in \Omega(u)} \gamma(K \triangle U)\theta(U) = \|\boldsymbol{d}(K) * \boldsymbol{y}(T)\| \tag{2}$$

で与えられる. (1) および (2) の左辺は, 具体例で示すようにそれぞれ Box and Hunter (1961a,b) による**定義対比**および **derived relation** の一般化に相当する. 記号演算 $\theta(K) \odot \theta(U) = \theta(K \triangle U)$ を用いると, (1) から (2) が容易に導かれる. また逆も成り立つ.

**定義 3.** 線形方程式 (2) を $\theta(K)$ を推定するための**主方程式**とよぶ.

**定義 4.** 特性ベクトル $\boldsymbol{\gamma}(T)$ をもつ $n$-run の $2^m$ 型要因計画 $T$ において, 要因効果 $\theta(U)$ は,

(a) $\gamma(K\triangle U)=0$ ならば $\theta(K)$ と**直交**する,

(b) $|\gamma(K\triangle U)|=n$ ならば $\theta(K)$ と**完全に交絡**する,

(c) $0<|\gamma(K\triangle U)|<n$ ならば $\theta(K)$ と**部分的に交絡**する,

という. $|\gamma(K\triangle U)|/n$ を $\theta(K)$ に対する$\theta(U)$ の **交絡率**という.

## 1. 16-run の $2^5$ および $2^6$ 型直交計画の類別

大きさ 16, 最大制約数 15 をもつ強さ 2 の 直交配列 2-**OA**$(t=2,m=15,\lambda=4)$ の 5 種の代表配列 [I]~[V] (Appendix の表 A1 を参照) から導かれる 16-run の可能なすべての $2^5$ および $2^6$ 型直交計画は, 容易に類別 (因子および水準の置換) できる. それらの代表計画を与える直交配列と列番号および特性ベクトルは, 次の表 1 および表 2 で与えられる. 以下表中の '.' は '0' を表す.

**表 1.** 2-**OA**(2, 15, 4) の 5 種の代表配列から導かれる 16-run の可能なすべての $2^5$ 型直交計画の同型類とそれらの代表計画の特性ベクトル

| 同型類 | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] | [6] | [7] | [8] | [9] | [10] | [11] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 代 #[I] | ○ | ○ | ○ | ○ | × | × | × | × | × | × | × |
| 表 [II] | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | × |
| 配 [III] | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| 列 [IV] | ○ | ○ | ○ | × | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| [V] | ○ | ○ | ○ | × | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |

#: 従来の直交配列,
○: 可能, ×: 不可能を表す.

特性ベクトル $\gamma$(T)

| 代表計画 | 直交配列 | 列番号 | $\phi$ | 123 | 124 | 125 | 134 | 135 | 145 | 234 | 235 | 245 | 345 | 1234 | 1235 | 1245 | 1345 | 2345 | 12345 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [ 1] | [I] | 1 2 3 4 5 | 16 | 16 | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | 16 | . |
| [ 2] | [I] | 1 2 3 4 8 | 16 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| [ 3] | [I] | 1 2 4 7 8 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . |
| [ 4] | [I] | 1 2 4 8 15 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 16 |
| [ 5] | [II] | 1 2 4 8 12 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 8 | . | . | . | 8 | 8 | -8 |
| [ 6] | [II] | 1 4 5 8 12 | 16 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | 8 | 8 | . | . | 8 | 8 | . | . |
| [ 7] | [II] | 1 4 6 8 12 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | 8 | 8 | . | . | 8 | -8 | . | . |
| [ 8] | [II] | 4 5 6 8 12 | 16 | . | . | . | . | . | 8 | . | . | 8 | 8 | . | . | . | . | . | -8 |
| [ 9] | [II] | 4 5 8 9 12 | 16 | . | . | . | . | 8 | 8 | . | 8 | 8 | . | 16 | . | . | . | . | . |
| [10] | [II] | 4 5 8 10 12 | 16 | . | . | . | . | 8 | 8 | . | 8 | -8 | . | . | . | . | . | . | . |
| [11] | [III] | 2 4 8 10 12 | 16 | . | . | . | 8 | . | 8 | 8 | 8 | . | . | . | 8 | 8 | . | . | . |

(主効果および 2 因子交互作用に対応する $\gamma$(K) は 0 であるから省略)

**表 2.** 2-**OA**$(2,15,4)$ の 5 種の代表配列から導かれる 16-run の可能なすべての $2^6$ 型直交計画の同型類とそれらの代表計画の特性ベクトル

| 同型類 | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] | [6] | [7] | [8] | [9] | [10] | [11] | [12] | [13] | [14] | [15] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 代 #[I] | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × |
| 表 [II] | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| 配 [III] | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| 列 [IV] | ○ | ○ | × | × | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | × | ○ | ○ | × | ○ | ○ |
| [V] | × | ○ | × | × | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | × | ○ | ○ |

| | [16] | [17] | [18] | [19] | [20] | [21] | [22] | [23] | [24] | [25] | [26] | [27] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × |
| | ○ | ○ | ○ | × | × | × | × | × | × | × | × | × |
| | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | × |
| | × | ○ | × | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | × |
| | ○ | ○ | × | ○ | ○ | × | × | ○ | ○ | × | × | ○ |

特性ベクトル $\gamma(T)$

Argument of $\theta\{\cdot\}$

| 代表計画 | 直交配列 | 列番号 | $\phi$ | 123 | 124 | 125 | 126 | 134 | 135 | 136 | 145 | 146 | 156 | 234 | 235 | 236 | 245 | 246 | 256 | 345 | 346 | 356 | 456 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [ 1] | [I] | 1 2 3 4 5 6 | 16 | 16 | . | . | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | 16 | . | . | . | 16 | . |
| [ 2] | [I] | 1 2 3 4 5 8 | 16 | 16 | . | . | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| [ 3] | [I] | 1 2 3 4 8 12 | 16 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 16 |
| [ 4] | [I] | 1 2 3 4 8 13 | 16 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| [ 5] | [I] | 1 2 4 7 8 11 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| [ 6] | [II] | 1 2 3 4 8 12 | 16 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 8 |
| [ 7] | [II] | 1 2 4 5 8 12 | 16 | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 8 | 8 |
| [ 8] | [II] | 1 2 4 7 8 12 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 8 | -8 |
| [ 9] | [II] | 1 4 5 6 8 12 | 16 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 8 | . | . | 8 | 8 |
| [10] | [II] | 1 4 5 8 9 12 | 16 | 16 | . | . | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | 8 | 8 | . | 8 | 8 | . |
| [11] | [II] | 1 4 5 8 10 12 | 16 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 8 | 8 | . | 8 | -8 | . |
| [12] | [II] | 1 4 6 8 10 12 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 8 | 8 | . | 8 | 8 | . |
| [13] | [II] | 2 4 6 8 11 12 | 16 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 8 | -8 | . | 8 | 8 | . |
| [14] | [II] | 4 5 6 7 8 12 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 8 | . | . | . | . | . | 8 | . | . | 8 | -8 |
| [15] | [II] | 4 5 6 8 9 12 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | 8 | 8 | . | . | . | . | 8 | 8 | . | 8 | -8 | . |
| [16] | [II] | 4 5 8 9 12 13 | 16 | . | . | . | . | . | 8 | 8 | 8 | 8 | . | . | 8 | 8 | 8 | 8 | . | . | . | . | . |
| [17] | [II] | 4 5 8 9 12 14 | 16 | . | . | . | . | . | 8 | 8 | 8 | -8 | . | . | 8 | -8 | 8 | 8 | . | . | . | . | . |
| [18] | [II] | 4 5 8 10 12 15 | 16 | . | . | . | . | . | 8 | -8 | 8 | 8 | . | . | 8 | 8 | -8 | 8 | . | . | . | . | . |
| [19] | [III] | 1 2 4 8 10 12 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 8 | . | 8 | 8 | 8 | . | . |
| [20] | [III] | 2 3 4 8 10 12 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | 8 | . | 8 | . | . | . | 8 | . | -8 | 8 | 8 | . | . |
| [21] | [III] | 2 4 6 8 10 12 | 16 | 16 | . | . | . | . | . | . | 8 | . | 8 | . | . | . | 8 | 8 | . | . | 8 | 8 | . |
| [22] | [III] | 2 4 7 8 10 12 | 16 | . | . | . | . | . | . | . | 8 | . | 8 | . | . | . | 8 | 8 | . | . | -8 | 8 | . |
| [23] | [III] | 2 4 8 9 10 12 | 16 | . | . | . | . | . | 8 | . | 8 | . | 8 | . | 8 | 8 | -8 | 8 | . | . | . | . | . |
| [24] | [III] | 2 4 8 9 12 14 | 16 | . | . | . | . | . | . | 8 | . | -8 | 8 | . | 8 | . | 8 | . | 8 | . | . | . | . |
| [25] | [III] | 2 4 8 10 12 14 | 16 | . | . | . | . | 8 | . | 8 | 8 | . | 8 | 8 | 8 | . | . | 8 | 8 | . | . | . | . |
| [26] | [III] | 2 4 8 10 12 15 | 16 | . | . | . | . | 8 | . | -8 | 8 | . | 8 | 8 | 8 | . | . | 8 | -8 | . | . | . | . |
| [27] | [V] | 2 4 6 8 10 12 | 16 | 8 | 8 | . | . | . | . | 8 | 8 | . | . | . | . | . | . | 8 | 8 | 8 | . | 8 | . |

次頁へ続く

(主効果および 2 因子交互作用に対応する $\gamma(K)$ は 0 であるから省略)

| 1234 | 1235 | 1236 | 1245 | 1246 | 1256 | 1345 | 1346 | 1356 | 1456 | 2345 | 2346 | 2356 | 2456 | 3456 | 12345 | 12346 | 12356 | 12456 | 13456 | 23456 | 123456 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . | 16 | . | 16 | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 16 |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 16 | . |
| 16 | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | 8 | . | . | . | 8 | -8 | . | . | . | -8 | 8 | 8 | 8 |
| . | . | . | . | . | . | . | . | 8 | 8 | . | . | 8 | -8 | . | . | . | -8 | 8 | . | . | . |
| 16 | . | . | . | . | . | . | . | 8 | 8 | . | . | 8 | 8 | . | . | . | -8 | 8 | . | . | . |
| . | . | . | . | . | 8 | . | . | 8 | -8 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | -8 | 8 |
| . | . | . | . | 8 | 8 | . | 8 | 8 | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | 8 | -8 | . | 8 | 8 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | 8 | -8 | . | -8 | 8 | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | 8 | 8 | . | 8 | -8 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | -8 | 8 | 8 | 8 | . |
| . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | -8 | 8 | . | . | . | . |
| 16 | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . |
| 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 16 |
| . | . | . | 8 | . | -8 | -8 | 8 | . | . | . | 8 | 8 | . | . | . | -8 | 8 | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | 8 | 8 | . | . | -8 | 8 | . | . | -8 | 8 | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | 8 | 8 | 8 | 8 | . | . | 8 | . | 8 | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | 8 | 8 | -8 | 8 | . | . | 8 | . | -8 | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | 8 | . | -8 | 8 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | -8 | . | 8 |
| . | 8 | 8 | -8 | 8 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 8 | -8 | . |
| . | 8 | 8 | 8 | 8 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . |
| . | 8 | 8 | 8 | -8 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | 8 | . | . | . | 8 | . | 8 | . | 8 | 8 | 8 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |

## 2. 20-run の $2^5$ 型直交計画の類別

大きさ 20, 最大制約数 19 をもつ強さ 2 の直交配列 2-**OA**$(t=2, m=19, \lambda=5)$ の 3 種の代表配列 [I]∼[III] (Appendix の表 A2 を参照) から導かれる 20-run の可能なすべての $2^5$ 型直交計画は, 容易に類別 (因子および水準の置換) できる. それらの代表計画を与える直交配列と列番号および特性ベクトルは, 次の表 3 で与えられる:

**表 3.** 2-**OA**$(2,19,5)$ の 3 種の代表配列から導かれる 20-run の可能なすべての $2^5$ 型直交計画の同型類とそれらの代表計画の特性ベクトル

| 同型類 | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] | [6] | [7] | [8] | [9] | [10] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 代 [I] | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | × |
| 表 [II] | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| 配 [III] | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| 列 | | | | | | | | | | |

特性ベクトル $\gamma(T)$

| 代表計画 | 直交配列 | 列番号 | $\phi$ | 123 | 124 | 125 | 134 | 135 | 145 | 234 | 235 | 245 | 345 | 1234 | 1235 | 1245 | 1345 | 2345 | 12345 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [ 1] | [I] | 1 2 3 4 5 | 20 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | -4 | 4 | -4 | 4 | 4 | 12 | 4 | 4 | 4 | 4 | -8 |
| [ 2] | [I] | 1 2 3 4 6 | 20 | 4 | 4 | -4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 12 | 4 | 4 | -4 | -4 | . |
| [ 3] | [I] | 1 2 3 4 8 | 20 | 4 | 4 | 4 | 4 | -4 | 12 | 4 | 4 | -4 | 4 | 12 | 4 | -4 | -4 | 4 | . |
| [ 4] | [I] | 1 2 3 4 12 | 20 | 4 | 4 | 12 | 4 | -4 | -4 | 4 | -4 | 4 | 12 | 12 | 4 | -4 | 4 | -4 | . |
| [ 5] | [I] | 1 2 3 5 6 | 20 | 4 | 4 | -4 | 4 | 4 | 4 | -4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | -4 | 4 | 8 |
| [ 6] | [I] | 1 2 3 5 8 | 20 | 4 | 4 | 4 | 4 | -4 | 4 | -4 | 4 | 12 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | -4 | . |
| [ 7] | [I] | 1 2 3 5 10 | 20 | 4 | 4 | -4 | 4 | 4 | -4 | -4 | 4 | -4 | -4 | 4 | 4 | 4 | -4 | 4 | . |
| [ 8] | [I] | 1 2 3 5 16 | 20 | 4 | 4 | -4 | 4 | -12 | -4 | -4 | 4 | -4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | -4 | 8 |
| [ 9] | [I] | 1 2 3 7 16 | 20 | 4 | 4 | -4 | 4 | -12 | 4 | 4 | 4 | 12 | -4 | -4 | 4 | -4 | 4 | -4 | . |
| [10] | [II] | 1 2 3 4 5 | 20 | 4 | 4 | 12 | 4 | -4 | -4 | 4 | -4 | -4 | 12 | 12 | 4 | 4 | 4 | 4 | -8 |

(主効果および 2 因子交互作用に対応する $\gamma(K)$ は 0 であるから省略)

## 3. 新しい $2^m$ 型直交計画の例

従来の $2^m$ 型直交計画では, 主効果と交互作用は, 直交するかまたは完全に交絡するかのいずれかに限られている. しかしそれらの要因効果が部分的に交絡する新しい直交計画が数多く存在する. ここでは, その部分的な交絡が消去可能な計画の例を一部紹介し, それらの特徴づけを行う.

**例 1.** 16-run の $2^5$ 型直交計画

$$T = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&.&. \\ 1&1&.&1&. \\ 1&1&.&.&1 \\ 1&.&1&1&1 \\ 1&.&1&.&. \\ 1&.&.&1&. \\ 1&.&.&.&1 \\ .&1&1&1&1 \\ .&1&1&.&. \\ .&1&.&1&. \\ .&1&.&.&1 \\ .&.&1&1&. \\ .&.&1&.&1 \\ .&.&.&1&1 \\ .&.&.&.&. \end{bmatrix}$$

を考える. これは, 表 1 における第 5 の計画 [5] に相当する新しい直交計画である. その計画行列 $E(T)$ および特性ベクトル $\boldsymbol{\gamma}(T)$ は, 容易に計算できて, 次のようになる:

Argument of $\theta\{\cdot\}$

E(T):

| | φ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 12 | 13 | 14 | 15 | 23 | 24 | 25 | 34 | 35 | 45 | 123 | 124 | 125 | 134 | 135 | 145 | 234 | 235 | 245 | 345 | 1234 | 1235 | 1245 | 1345 | 2345 | 12345 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E(T) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 |
| | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 |
| | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 |
| | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 |
| | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| γ(T) | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 8 | . | . | . | 8 | 8 | -8 |

この表から, 定義式

$$16\theta(\phi)+8(\theta\{3,4,5\}+\theta\{1,3,4,5\}+\theta\{2,3,4,5\}-\theta\{1,2,3,4,5\})$$

が得られる. これは Box and Hunter (1961a,b) による定義対比の拡張されたもので,

$$I+\frac{1}{2}(\mathbf{345}+\mathbf{1345}+\mathbf{2345}-\mathbf{12345})$$

と書ける (係数 $\frac{1}{2}$ に注意). このとき, 2 因子交互作用までに限定した情報行列 $M(2,T)$ および計画行列 $E(2,T)$ は容易に計算され, それぞれ次のようになる:

Argument of $\theta\{\cdot\}$

M(2, T):

| | φ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 12 | 13 | 14 | 15 | 23 | 24 | 25 | 34 | 35 | 45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| φ | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 1 | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 2 | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 3 | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 8 |
| 4 | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 8 | . |
| 5 | . | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . | 8 | . | . |
| 12 | . | . | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 13 | . | . | . | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | . | . | 8 |
| 14 | . | . | . | . | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | . | 8 | . |
| 15 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 16 | . | . | . | 8 | . | . |
| 23 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 16 | . | . | . | . | 8 |
| 24 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 16 | . | . | 8 | . |
| 25 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 16 | 8 | . | . |
| 34 | . | . | . | . | . | 8 | . | . | . | 8 | . | . | 8 | 16 | . | . |
| 35 | . | . | . | . | 8 | . | . | . | 8 | . | . | 8 | . | . | 16 | . |
| 45 | . | . | . | 8 | . | . | . | 8 | . | . | 8 | . | . | . | . | 16 |

$$
E(2,T)':\ \left(\begin{array}{cccccccccccccccc}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
\hline
1&1&1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\
1&1&-1&-1&1&1&-1&-1&1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\
1&-1&1&-1&1&-1&1&-1&1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\\
1&-1&-1&1&1&-1&-1&1&1&-1&-1&1&-1&1&1&-1\\
\hline
1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&1&1&1&1\\
1&1&-1&-1&1&1&-1&-1&-1&-1&1&1&-1&-1&1&1\\
1&-1&1&-1&1&-1&1&-1&-1&1&-1&1&-1&1&-1&1\\
1&-1&-1&1&1&-1&-1&1&-1&1&1&-1&1&-1&-1&1\\
1&1&-1&-1&-1&-1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&1&1\\
1&-1&1&-1&-1&1&-1&1&1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\
1&-1&-1&1&-1&1&1&-1&1&-1&-1&1&1&-1&-1&1\\
1&-1&-1&1&1&-1&-1&1&1&-1&-1&1&1&-1&-1&1\\
1&-1&1&-1&1&-1&1&-1&1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\
1&1&-1&-1&1&1&-1&-1&1&1&-1&-1&-1&-1&1&1
\end{array}\right)
$$

限定した正規方程式 $M(2,T)\Theta(2) = E(2,T)'\boldsymbol{y}(T)$ の両辺の行に基本変形を施して,

Argument of $\theta\{\cdot\}$

$$
M^*(2,T):\ \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c|ccccc|cccccccccc}
\phi & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\5\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}2\\5\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}3\\5\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}4\\5\end{smallmatrix}
\end{array}\\
\begin{array}{c}
\phi\\ -\\ 1\\2\\3\\4\\5\\ -\\ 12\\13\\14\\15\\23\\24\\25\\34\\35\\45
\end{array} &
\left(\begin{array}{c|ccccc|cccccccccc}
16&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\hline
\cdot&16&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&16&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&8&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&8&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&8&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\hline
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&16&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&8&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&8&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&8&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&8&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&8&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&8&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&8&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&8&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&8
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$$
E^*(2,T)':\ \left(\begin{array}{cccccccccccccccc}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
\hline
1&1&1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\
1&1&-1&-1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&1&-1&-1\\
1&-1&1&-1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&-1&1&-1\\
1&-1&-1&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&-1&1&1&-1\\
\hline
1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&1&1&1&1\\
1&1&-1&-1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&-1&-1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
1&-1&1&-1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&-1&1&-1&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
1&-1&-1&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&-1&1&1&-1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
1&1&-1&-1&-1&-1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
1&-1&1&-1&-1&1&-1&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
1&-1&-1&1&-1&1&1&-1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
-1&1&1&-1&1&-1&-1&1&1&-1&-1&1&1&-1&-1&1\\
-1&1&-1&1&1&-1&1&-1&1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\
-1&-1&1&1&1&1&-1&-1&1&1&-1&-1&-1&-1&1&1
\end{array}\right)
\quad
\begin{array}{c}
V[\hat{\theta}(2)]/\sigma^2\\
0.0625\\
\\
0.0625\\0.0625\\0.1250\\0.1250\\0.1250\\
\\
0.0625\\0.1250\\0.1250\\0.1250\\0.1250\\0.1250\\0.1250\\0.2500\\0.2500\\0.2500
\end{array}
$$

が得られ, 以下のことを得る ($M(2,T)$ が正則でないと結果は必ずしも一意ではないことに注意).

1°. $\theta\{1\}, \theta\{2\}$ は 2 因子交互作用と交絡することなく推定される.

2°. $\theta\{3\}, \theta\{4\}$ および $\theta\{5\}$ には, それぞれ$\theta\{4,5\}$, $\theta\{3,5\}$ および$\theta\{3,4\}$ が交絡率 $\frac{1}{2}$ で交絡している. しかしその交絡を消去して推定値を求めることができる. それと交絡を無視した場合の推定値を比較することにより, 交互作用の主効果に及ぼす影響の度合いを評価することが可能である.

[注 1] 表 1 における第 8 の計画 [8] もこの種の新しい直交計画である.
[注 2] 表 1 における第 4 の従来の計画 [4] は, 分解能 V の直交計画である.

**例 2.** 20-run の $2^5$ 型直交計画

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & 1 & 1 \\ . & 1 & . & 1 & 1 \\ . & . & 1 & 1 & 1 \\ . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & 1 & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . \\ . & 1 & 1 & . & . \\ 1 & . & . & . & . \\ 1 & . & 1 & . & 1 \\ . & 1 & 1 & . & 1 \\ . & 1 & . & . & 1 \\ 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & . & 1 & 1 & . \\ 1 & 1 & . & 1 & . \\ . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & 1 & 1 & . \end{bmatrix}$$

を考える. これは, 表 3 における 第 7 の計画 [7] に相当する新しい直交計画である. 同様にして, 定義式

$$\begin{gathered}20\theta(\phi) + 4(\theta\{1,2,3\} + \theta\{1,2,4\} - \theta\{1,2,5\} + \theta\{1,3,4\} + \theta\{1,3,5\} - \theta\{1,4,5\} \\ -\theta\{2,3,4\} + \theta\{2,3,5\} - \theta\{2,4,5\} - \theta\{3,4,5\} + \theta\{1,2,3,4\} + \theta\{1,2,3,5\} \\ +\theta\{1,2,4,5\} - \theta\{1,3,4,5\} + \theta\{2,3,4,5\})\end{gathered}$$

が得られ,

$$\begin{gathered}I + \tfrac{1}{5}(\mathbf{123} + \mathbf{124} - \mathbf{125} + \mathbf{134} + \mathbf{135} - \mathbf{145} - \mathbf{234} + \mathbf{235} - \mathbf{245} - \mathbf{345} \\ + \mathbf{1234} + \mathbf{1235} + \mathbf{1245} - \mathbf{1345} + \mathbf{2345})\end{gathered}$$

と書ける (係数 $\frac{1}{5}$ に注意). このとき, $E(T)$, $\boldsymbol{\gamma}(T)$ および $M(2,T)$, $E(2,T)$ はそれぞれ次のようになる:

Argument of $\theta\{\cdot\}$

E(T):

| $\theta$ | $\phi$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 12 | 13 | 14 | 15 | 23 | 24 | 25 | 34 | 35 | 45 | 123 | 124 | 125 | 134 | 135 | 145 | 234 | 235 | 245 | 345 | 1234 | 1235 | 1245 | 1345 | 2345 | 12345 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 |
| | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 |
| | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 |

$\gamma$(T):

| $\phi$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 12 | 13 | 14 | 15 | 23 | 24 | 25 | 34 | 35 | 45 | 123 | 124 | 125 | 134 | 135 | 145 | 234 | 235 | 245 | 345 | 1234 | 1235 | 1245 | 1345 | 2345 | 12345 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (20 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 4 | 4 | -4 | 4 | 4 | -4 | -4 | 4 | -4 | -4 | 4 | 4 | 4 | -4 | 4 | .) |

Argument of $\theta\{\cdot\}$

M(2, T):

| | $\phi$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 12 | 13 | 14 | 15 | 23 | 24 | 25 | 34 | 35 | 45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\phi$ | 20 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 1 | . | 20 | . | . | . | . | . | . | . | . | 4 | 4 | -4 | 4 | 4 | -4 |
| 2 | . | . | 20 | . | . | . | . | 4 | 4 | -4 | . | . | . | -4 | 4 | -4 |
| 3 | . | . | . | 20 | . | . | 4 | . | 4 | 4 | . | -4 | 4 | . | . | -4 |
| 4 | . | . | . | . | 20 | . | 4 | 4 | . | -4 | -4 | . | -4 | . | -4 | . |
| 5 | . | . | . | . | . | 20 | -4 | 4 | -4 | . | 4 | -4 | . | -4 | . | . |
| 12 | . | . | . | 4 | 4 | -4 | 20 | . | . | . | . | . | . | 4 | 4 | 4 |
| 13 | . | . | 4 | . | 4 | 4 | . | 20 | . | . | . | 4 | 4 | . | . | -4 |
| 14 | . | . | 4 | 4 | . | -4 | . | . | 20 | . | 4 | . | 4 | . | -4 | . |
| 15 | . | . | -4 | 4 | -4 | . | . | . | . | 20 | 4 | 4 | . | -4 | . | . |
| 23 | . | 4 | . | . | -4 | 4 | . | . | 4 | 4 | 20 | . | . | . | . | 4 |
| 24 | . | 4 | . | -4 | . | -4 | . | 4 | . | 4 | . | 20 | . | . | 4 | . |
| 25 | . | -4 | . | 4 | -4 | . | . | 4 | 4 | . | . | . | 20 | 4 | . | . |
| 34 | . | 4 | -4 | . | . | -4 | 4 | . | . | -4 | . | . | 4 | 20 | . | . |
| 35 | . | 4 | 4 | . | -4 | . | 4 | . | -4 | . | . | 4 | . | . | 20 | . |
| 45 | . | -4 | -4 | -4 | . | . | 4 | -4 | . | . | 4 | . | . | . | . | 20 |

E(2, T)':

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |

$M(2,T)$ および $E(2,T)'$ の行に基本変形を施して,

Argument of $\theta\{\cdot\}$

$$
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{c|ccccc|cccccccccc}
\phi & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45
\end{array} \\
\begin{array}{r} \phi \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 34 \\ 35 \\ 45 \end{array}
&
\left(\begin{array}{c|ccccc|cccccccccc}
20 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & 24 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 24 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 24 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 24 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 24 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 24 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 24 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 24 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 24 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 24 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 24 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 24 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 24 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 24 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 24
\end{array}\right)
\end{array}
$$

M*(2, T):

$$
E^*(2,T)':\quad
\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & \cdot & 2 & -2 & 2 & \cdot & -2 & -1 & \cdot & 2 & -1 & 1 & 1 & -2 & -1 & \cdot & 2 & 1 & -2 & -1 \\
2 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 & -1 & -2 & -1 & 2 & 2 & -1 & -2 & \cdot & 1 & \cdot & -2 & \cdot & 1 & \cdot \\
1 & 2 & \cdot & -2 & -2 & \cdot & 2 & -1 & 1 & -1 & 2 & \cdot & 2 & 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 & \cdot \\
2 & \cdot & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & \cdot & -2 & -2 & -1 & \cdot & -2 & \cdot & -2 & -1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
2 & -1 & \cdot & -1 & 1 & 1 & 2 & \cdot & \cdot & -1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 2 & 2 & -2 & \cdot & -2 & -1 \\
\hline
\cdot & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & \cdot & 2 & 2 & 1 & -2 & -2 & -1 & -1 & \cdot & \cdot & -2 & 2 & -2 & 1 \\
\cdot & 1 & 1 & 2 & -1 & \cdot & -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 & -2 \\
1 & \cdot & -2 & 2 & 2 & -2 & \cdot & -1 & 1 & -1 & \cdot & -2 & \cdot & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\
2 & -2 & 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & -2 & \cdot & \cdot & 1 & -2 & \cdot & -2 & \cdot & 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\
\cdot & 2 & 1 & 1 & \cdot & -1 & -1 & 2 & -2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 2 & -2 & 1 & -1 & -1 & \cdot & \cdot \\
1 & 2 & -2 & \cdot & -2 & 2 & \cdot & -1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 1 & \cdot & -1 & 2 & -2 & 1 & \cdot & -1 \\
1 & -2 & 2 & \cdot & \cdot & 2 & -2 & -1 & 1 & -1 & -2 & 2 & -2 & 1 & \cdot & -1 & 1 & \cdot & -1 & 2 \\
2 & 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 2 & -2 & -2 & 1 & \cdot & \cdot & -1 & -1 & 2 & 2 & \cdot & -2 & \cdot & 1 \\
1 & -2 & \cdot & 2 & \cdot & -2 & 2 & -1 & -2 & \cdot & -1 & 1 & 1 & 2 & -1 & -2 & \cdot & 1 & 2 & -1 \\
2 & -1 & -1 & \cdot & 1 & 2 & 1 & \cdot & 1 & 2 & 2 & 1 & \cdot & -2 & -1 & -2 & \cdot & -2 & -1 & -2
\end{array}\right)
\quad
\begin{array}{c}
V[\hat{\theta}(2)]/\sigma^2 \\
0.0500 \\
0.0694 \\ 0.0694 \\ 0.0694 \\ 0.0694 \\ 0.0694 \\
0.0694 \\ 0.0694 \\ 0.0694 \\ 0.0694 \\ 0.0694 \\ 0.0694 \\ 0.0694 \\ 0.0694 \\ 0.0694 \\ 0.0694
\end{array}
$$

が得られ, 以下のことを得る ($M(2,T)$ が正則でないと結果は必ずしも一意ではないことに注意).

1°. すべての主効果 $\theta\{1\} \sim \theta\{5\}$ には, それぞれ 6 個の 2 因子交互作用が交絡率 $\frac{1}{5}$ で交絡している. しかしその交絡を消去して推定値を求めることができる. それと交絡を無視した場合の推定値を比較することにより, 交互作用の主効果に及ぼす影響の度合いを評価することが可能である.

[注 3] 表 3 における第 2,5 および 6 の計画 [2],[5],[6] もこの種の新しい直交計画である.

## 参考文献

[1] Box, G.E.P and J.S. Hunter (1961a). *The* $2^{k-p}$ *fractional factorial designs. I.* Technometrics, 3, 311-351.

[2] Box, G.E.P and J.S. Hunter (1961b). *The* $2^{k-p}$ *fractional factorial designs. II.* Technometrics, 3, 449-458.

[3] Yamamoto, S., Y. Fujii, Y. Hyodo and H. Yumiba (1992a). *Classification of two-symbol orthogonal arrays of strength* 2, *size* 16, 15 (*maximal*) *constraints and index 4*, SUT J. Math. 28, 47-59.

[4] Yamamoto, S., Y. Fujii, Y. Hyodo and H. Yumiba (1992b). *Classification of two-symbol orthogonal arrays of strength* 2, *size* 20 *and* 19 (*maximal*) *constraints*, SUT J. Math. 28, 191-209.

# Appendix

**表 A1.** 2-OA(2, 15, 4) の代表配列

[I]

```
111111111111111
1111111........
111....1111....
111........1111
1..11..11..11..
1..11....11..11
1....1111....11
1....11..1111..
.1.1.1.1.1.1.1.
.1.1.1..1.1.1.1
.1..1.11.1..1.1
.1..1.1.1.11.1.
..11..11..11..1
..11..1.11..11.
..1.11.1..1.11.
..1.11..11.1..1
```

[II]

```
111111111111111
1111111........
111....1111....
111........1111
1..11..11..11..
1..11....11..11
1....1111....11
1....11..1111..
.1.1.1.1.1.1.1.
.1.1.1..1.1.1.1
.1..1.11.1..1.1
.1..1.1.1.11.1.
..11..11..1.11.
..11..1.11.1..1
..1.11.1..11..1
..1.11..11..11.
```

[III]

```
111111111111111
1111111........
111....1111....
111........1111
1..11..11..11..
1..11....11..11
1....1111....11
1....11..1111..
.1.1.1.1.1.1.1.
.1.1.1..1.1.1.1
.1..1.11..1.11.
.1..1.1.11.1..1
..11..11.1..1.1
..11..1.1.11.1.
..1.11.1..11..1
..1.11..11..11.
```

[IV]

```
111111111111111
1111111........
111....1111....
111........1111
1..11..11..11..
1..11....11..11
1....111.1.1.1.
1....11.1.1.1.1
.1.1.1.11....11
.1.1.1....1111.
.1..1.11..1.11.
.1..1.1.11.1..1
..11..11.1..1.1
..11..1.1.11.1.
..1.11.1..11..1
..1.11..11..11.
```

[V]

```
111111111111111
1111111........
111....1111....
111........1111
1..11..11..11..
1..11....11..11
1....1111....11
1....11..1111..
.1.1.1.1.1.1.1.
.1.1..11..1.1.1
.1..11.1..11..1
.1..1.1.11..11.
..11.1..1.1.11.
..11..1.11.1..1
..1.11.1.1..1.1
..1.1.11..11.1.
```

**表 A2.** 2-OA(2, 19, 5) の代表配列

[I]

```
1111111111111111111
111111111..........
1111.....11111.....
.....1111.11111....
1...111..111...11..
.1..11.1.11.1....11
..1.1..111.1.1.1.1.
...11.1.11..11..1.1
..11..11..11....111
11....1.1..11..1.11
.11..1..1.1..1.11.1
1..1.1.1....11.111.
1.1..11..1...11..11
.11...11.1..1.111..
.1.1.1..11.1..1.11.
1..1...1111...11..1
1.1.1...1.1.1.1.11.
11..1..1...1.11.1.1
.1.11.1...1..111.1.
..1111.....11.11..1
```

[II]

```
1111111111111111111
111111111..........
1111.....11111.....
.....1111.11111....
1...111..111...11..
.1..111..1..11...11
..1.1..11111.....11
...11..111..11.11..
1..1..1.1..1.1..111
1..1.1.1..1.1..1.11
.11...11...11..11.1
.11..1..1.1..1.111.
1.1...11.1...111.1.
1.1..1..11..1.1.1.1
.1.1.1.1.1.1..1.11.
.1.1..1.111...11..1
11..1...1..11.11.1.
11..1..1..1..11.1.1
..111.1...1.1.1.11.
..1111.....1.111..1
```

[III]

```
1111111111111111111
111111111..........
1111.....11111.....
.....1111.11111....
1...111..111...11..
.1..111..1..11...11
..1.1..11111.....11
...11..111..11.11..
1..1..1.1..1.1..111
1..1.1.1..1.1..1.11
.11...1.1.1.1..11.1
.11..1.1...1.1.111.
1.1...11.1...111..1
1.1..1..11..1.1.11.
.1.1.1..11.1..11..1
.1.1..11.11...1.11.
11..1...1.1..111.1.
11..1..1...11.1.1.1
..111.1....11.11.1.
..1111....1..11.1.1
```