数理解析研究所講究録
855巻 1993年 78-100

U(n,n)/GL(n,ℂ)上の不変固有超関数の接続公式について

拓殖大・工　青木　茂 (Shigeru AOKI)
北里大・教養　加藤　末広 (Suehiro KATO)

§0. 序文

G を（簡約型）リー群、σをGの包含的自己同型、Hを $G^{\sigma}=\{g\in G \mid \sigma(g)=g\}$ の開部分群とする。さらに、X=G/H とおき、$\mathbb{D}(X)$ を X 上の G-不変微分作用素全体のなす代数、$\chi:\mathbb{D}(X)\longrightarrow\mathbb{C}$ をその指標とする。また、$\mathcal{O}$を X の H-不変な開集合とする。このとき、$\mathcal{O}$上のシュワルツ超関数 Θ が、

(i) Θは H-不変、

(ii) 任意の $D\in\mathbb{D}(X)$ に対して、$D\Theta=\chi(D)\Theta$、

の 2 条件を満たすとき、Θは$\mathcal{O}$上の（infinitesimal character χ をもつ）不変固有超関数（IED)であると言い、その全体の集合を$\mathcal{D}'_{\chi,H}(\mathcal{O})$ で表す。

我々は、以前 G=U(p,q), H=U(r)×U(p-r,q) の場合に、つぎの問題を考察した（cf. [1] ～ [5] ）。

<u>問題</u>. X′ を X の正則半単純元全体のなす X の H-不変な開稠密部分集合とする。このとき、$\Pi\in\mathcal{D}'_{\chi,H}(X')$ に対し、Πが X 上の不変固有超関数に拡張できるための条件を求めよ。

一般の簡約型対称空間 X では、群多様体の場合同様 $\Pi\in\mathcal{D}'_{\chi,H}(X')$ は必ず X′上実解析的である。しかし、群多様体の場合と異なり X′から X への IED の拡張はアプリオリには一意的とは限らないことに注意しよう（群多様体の場合については cf.Hirai [9] ）。

本稿では、$X=U(n,n)/GL(n,\mathbb{C})$ に対しこの問題を考察する。$U(n,n)/GL(n,\mathbb{C})$ と（$r=n$, $p+q-r=n$ の場合の）$U(p,q)/(U(r)\times U(p-r,q))$ は複素化が同型であるので不変微分作用素については以前と同様であるが、隣合うカルタン部分空間の IED の“接続公式”については以前と著しく様相が異なる（cf. 補題 4.2.2）。また、$U(n,n)/GL(n,\mathbb{C})$ では $X-X'$ 内に台をもつ（0 でない）IED が存在しないことが示せるため、X' から X への IED の拡張は一意的である。

本稿で述べる結果は、infinitesimal character χ が“regular”（cf. 定義 2.3）な場合に拡張可能であるための必要条件を与えたにすぎない。しかし本稿で求めた条件は、χ が regular か否かに関わらず必要十分条件であることが（比較的容易に）示されるものと、我々は期待している（cf. 注意 3.4）。

最初に§1 でリーマン対称空間 $U(n,q)/(U(n)\times U(q))$ に対する Berezin-Karpelevič の 2 つの定理を紹介する。$q=n$ の場合、このリーマン対称空間と我々の対称空間 $U(n,n)/GL(n,\mathbb{C})$ は複素化が一致する。そこで、不変微分作用素（の動径部分）のなす環の具体的記述に関するこの節の定理からは、我々の対称空間での対応する定理が自然に得られることになる。また、球関数（即ち、IED）のカルタン部分空間上の具体形に関するこの節の定理と我々の得た IED のカルタン部分空間上の具体形の間にはある種の類似性がみられる。

§2では以後の準備のため本稿で対象とする半単純対称空間 $X=U(n,n)/GL(n,\mathbb{C})$ の構造とその上の不変微分作用素（の動径部分）について述べる。今回は（以前の $U(p,q)/(U(r)\times U(p-r,q))$ の場合と違って） $X=G/H$ 内で実現された（コンパクト以外の）カルタン部分空間は非連結となることに注意しよう。

§3 では主定理（定理 3.1）及びその関連事項を述べ、§4 で主定理の証明の概略を述べる。即ち、まず§4.1 で IED の X' 上の挙動を調べた後、半正則半単純元の近傍での挙動に関する我々の研究方針を述べる。§4.2 で各半正則半単純元のまわりでの IED の“接続公式”を用いて主定理を示す。§4.3 で証明で必要になる不変積分の挙動について述べる。

§1. Berezin-Karpelevič の 2 つの定理

この節で、Berezin-Karpelevič [6] により示されたリーマン対称空間 $X = U(n,q)/(U(n)\times U(q))$ 上の不変微分作用素の動径部分、及び X 上の不変固有超関数（即ち、球関数）に関する２つの重要な定理を復習しておく（証明については Hoogenboom [10] を参照）。これらの定理を紹介するのは次のような理由による。

(1) 我々の考えている対称空間 $U(n,n)/GL(n,\mathbb{C})$ 上での不変微分作用素の動径部分についての対応する結果（補題 2.2）がここでの定理（定理 1.1）から直接導かれる。

(2) IED に関する我々の主要結果（cf. 定理 3.1）とここでの定理（定理 1.2）との間にある種の類似性が見られる。即ち、どちらも高階の IED は、カルタン部分空間上 1 階の IED を要素とする行列式を用いて表される。

なお、 $q=n$ の場合が以下我々にとって興味がある。

初めに、$I_{n,q} = \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & -E_q \end{bmatrix}$ とおき、

$$U(n,q) = \{g \in GL(n+q, \mathbb{C}) \mid g^* I_{n,q} g = I_{n,q}\}$$

により、簡約型リー群 $U(n,q)$ を定義する。$G = U(n,q)$ ととり、G のカルタン包合的自己同型 $\theta : \theta(g) = I_{n,q} g I_{n,q}^{-1} = I_{n,q} g I_{n,q}$ により不変な G の元全体を K とおく：$K = G^{\theta}$。明らかに、$K = U(n)\times U(q)$ であり、$X = G/K = U(n,q)/(U(n)\times U(q))$ とおけば、X はリーマン対称空間となる。$q \geqq n$ として、一般性を失わない。このとき、X の階数は n となる。

定理を記述する前に、我々は X のカルタン部分空間等について幾つか準備をしておく。G のリー環を $\mathfrak{g}$ とし、$\mathfrak{g}$ の（θ に関する）カルタン分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ とする。$\mathfrak{p}$ の極大可環部分代数は X のカルタン部分空間と呼ばれている。 X のカルタン部分空間はすべて次の部分空間に K-共役である：

$$\mathfrak{j} = \{\underline{j}_{\theta_1,\cdots,\theta_n} ;\ \theta_j \in \mathbb{R}\}$$

但し、

$$\underline{j}_{\theta_1,\cdots,\theta_n} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\quad\quad}^{n} & \overbrace{\quad\quad}^{n} & \overbrace{\quad}^{q-n} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c} & \theta_n & \\ & \ddots & \\ & \theta_1 & \\ \hline \theta_1 & & \\ \ddots & & \\ \theta_n & & \\ \hline & & \end{array}\right) \end{array}$$

$\tilde{\theta}$を G/K の G への埋め込み写像：

$\tilde{\theta}$: $G/K \longrightarrow G$: $gK \longmapsto g\theta(g)^{-1}$,

G の閉集合 Q を $Q = \tilde{\theta}(G/K)(\subset G)$により定義する。$\tilde{J}$ を、

$\tilde{J} = Z_Q(\mathfrak{j}) = \{g \in Q \mid Ad(g)Y = Y \quad (Y \in \mathfrak{j})\}$

により定義する。$J = \tilde{\theta}^{-1}(\tilde{J})$ とおこう（$\tilde{\theta}$が埋め込み写像だから、J と $\tilde{J}$ は 1 対1に対応していることに注意）。計算から容易に示せるように、$J = \exp \mathfrak{j}\ K$ である。また、 $J' = J \cap X'$ とおいたとき、

$$X = K.J\ ;\quad X' = K.J'$$

（X'は X の正則元全体）

が成立する。$j_{\theta_1,\cdots,\theta_n} = \exp \underline{j}_{\theta_1,\cdots,\theta_n}$とおく。

簡単な計算から、

(1) $j_{\theta_1,\cdots,\theta_n}K = j_{\theta'_1,\cdots,\theta'_n}K \iff \theta_i = \theta'_i \quad ({}^\forall i)$

(2) $Kj_{\theta_1,\cdots,\theta_n}K = Kj_{\theta'_1,\cdots,\theta'_n}K$

$\iff {}^\exists \alpha \in \mathfrak{S}_n,\ \theta_i = \pm\theta'_{\alpha(i)} \qquad (\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群）

が成り立つ。こうして、 Jの Weyl 群 $[W = N_K(J)/Z_K(J)]$ は$\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}_2)^n$ に同型になることが分かる。以上の事実から、我々は J の各元に対し、その t-変数表示を次のように定義することができる。

$$J \ni j_{\theta_1,\cdots,\theta_n}K \longmapsto (t_1,\cdots,t_n) \in [1,\infty)^n$$

ここで、$t_i = \cosh 2\theta_i$ $(1 \leq i \leq n)$ とおいた。この写像により $J/(\mathbb{Z}_2)^n$ と集合 $\{(t_1,\cdots,t_n) \mid t_i \geq 1 \quad (1 \leq i \leq n)\}$ とが同一視できる。（前者の集合上に $W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}_2)^n$ が作用しているのに対応して、後者の集合上には対称群$\mathfrak{S}_n$が作

用している。)

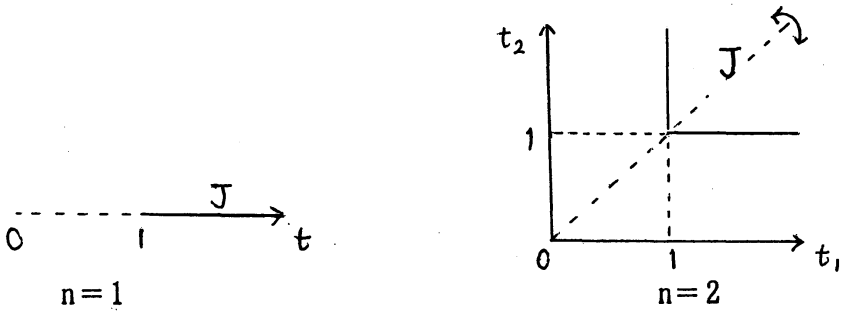

図 1.1

図 1.1の $n = 2$ における↷は(t_1, t_2)と(t_2, t_1)が$\mathfrak{S}_2$ の作用で互いに移り合っていることを意味する。

準備ができたので、Berezin-Karpelevič の２つの定理を述べることにする。$D \in \mathbb{D}(x)$ に対し、$\mathfrak{l}(D)$ を D の<u>動径部分</u>、即ち、

$$\mathfrak{l}(D)(f|_{J'}) = (Df)|_{J'}$$

が任意の K-不変な C^∞級関数 f に対して成立するという条件により一意的に定まる J'上の微分作用素とする。$\mu = q-n$ $(\geqq 0)$ とし、

$$a(t) = 4(t^2-1), \quad b(t) = 4\{(\mu+2)t+\mu\}$$

とおく。常微分作用素 L を

$$L = a(t)\frac{d^2}{dt^2} + b(t)\frac{d}{dt}$$

と定める。同様に、L_i を

$$L_i = a(t_i)\frac{\partial^2}{\partial t_i^2} + b(t_i)\frac{\partial}{\partial t_i}$$

により定義する。また、t_i $(1 \leqq i \leqq n)$ の差積を、

$$\omega = \prod_{1 \leqq j < i \leqq n} (t_i - t_j)$$

とおく。

<u>定理 1.1 (Berezin-Karpelevič の定理，[6]，[10])</u>.

$$\mathcal{S} = \{\omega^{-1}S(L_1,\cdots,L_n)\omega \mid S:\ n\ \text{変数対称多項式}\}$$

とおけば、写像 $\mathfrak{L}: D \longrightarrow \mathfrak{L}(D)$ は $\mathbb{D}(X)$ から $\mathcal{S}$ の上への1対1写像である。

この定理を用い、任意の $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n$ に対し、$\mathbb{D}(X)$ の指標 $\chi_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$ を

$$\chi_{\lambda_1,\cdots,\chi_n}(D) = S_D(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \qquad (D\in\mathbb{D}(X))$$

により定義する。但し、S_D は各 $D\in\mathbb{D}(X)$ に対し、$\mathfrak{L}(D) = \omega^{-1}S_D(L_1,\cdots,L_n)\omega$ から定まる n 変数対称多項式。定理より明らかに、$\mathbb{D}(X)$ の任意の指標 χ はある $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n$ に対し、$\chi=\chi_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$ と表せる。また、$\chi_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} = \chi_{\lambda'_1,\cdots,\lambda'_n}$ となるのは、ある $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ が存在して $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) = (\lambda'_{\sigma(1)},\cdots,\lambda'_{\sigma(n)})$ となるとき、かつそのときに限る。

さて、X がリーマン対称空間だから、X 上の任意の IED は X 上の K 不変な実解析的関数である。その意味で、X 上の IED Θ を $\Theta = \phi(t_1,\cdots,t_n)$ ($\phi:(t_1,\cdots,t_n)$ に関し実解析的) と表現することができる。特に、$\phi(1,\cdots,1)$ は X の原点における Θ の値であることに注意。$F_1(\ ,\lambda)$ を $LF_1(\ ,\lambda) = \lambda F_1(\ ,\lambda)$、及び $F_1(1,\lambda) = 1$ により定まる $[1,\infty)$ 上の実解析的関数とする (このことから、$\tau=(1+t)/2$ とおいたとき、$F_1(1-\tau,\lambda)$ は τ の関数として超幾何関数になることが分かる)。

<u>定理 1.2 (Berezin-Karpelevič の定理，[6]，[10])</u>. $\phi\in\mathcal{D}'_{\chi,H}(X)$ ($\chi=\chi_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$) とする。そのとき、

$$\omega\phi(t_1,\cdots,t_n) = \frac{A\phi(1,\cdots,1)}{\prod_{1\leqq j<i\leqq n}(\lambda_i-\lambda_j)}\det(F_1(t_i,\lambda_j))_{1\leqq i,j\leqq n}$$

但し、A は τ_i, λ_j, ϕ に依らない定数で、

$$A = (-1)^{n(n-1)/2}\, 2^{5n(n-1)/2} \prod_{j=1}^{n-1} (j^{n-j}\, j!)$$

<u>注意 1.3</u>. n=1 のときは A=1 となり、上の定理は、

$$\phi(t) = \phi(1)\, F_1(t, \lambda) \qquad (\phi \in \mathcal{D}'_{\chi_\lambda, H}(X))$$

と表せる。即ち、$F_1(\ ,\lambda)$ は階数 1 のリーマン対称空間 $U(1,1)/(U(1)\times U(1))$ の球関数である。

§2. 記号と準備

G を簡約型リー群 $U(n,n)$, $\mathfrak{g}$ を G のリー環 $\mathfrak{u}(n,n)$、σ を $\sigma(g) = \tilde{I}_n g \tilde{I}_n^{-1} = -\tilde{I}_n g \tilde{I}_n$ によって定まる G の包合的自己同型とする。但し、

$$\tilde{I}_n = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$$

とおいた。σ で不変な G の元全体を H とおく：$H = G^\sigma$。σ の微分写像 $d\sigma$ による $\mathfrak{g}$ の固有分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{q}$ とする。ここで、$\mathfrak{k}$, $\mathfrak{q}$ はそれぞれ固有値 +1, -1 に対応する固有空間（$\mathfrak{k}$ は Hのリー環になることに注意）。$X \in \mathfrak{g}$ に対し、$d\sigma(X) = -\tilde{I}_n X \tilde{I}_n$ であるから、

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \mid A,\ B \in \mathfrak{u}(n) \right\},$$

$$\mathfrak{q} = \left\{ \begin{pmatrix} A & C \\ C & -A \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{u}(n),\ C^* = C \right\}.$$

さて $\mathfrak{k}$ から $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ への写像を $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \longmapsto A + \sqrt{-1}\, B$ により定義すれば、この写像により、$\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ に同型になる。従って、$H \cong GL(n,\mathbb{C})$ となり、$X = G/H$ とおけば、X は半単純対称空間 $U(n,n)/GL(n,\mathbb{C})$ になる。以下、この論文を通し、G, H, X をこのようにとって固定する。

$\mathfrak{j}$ を X のカルタン部分空間、即ち、半単純元からなる$\mathfrak{g}$の極大可環部分代数としよう。カルタン部分空間の H-共役類の完全代表系としては、次のような $\mathfrak{j}_0, \mathfrak{j}_1, \cdots, \mathfrak{j}_n$ をとることができる。

$$\mathfrak{j}_\ell = \{{}_\ell\underline{j}_{\theta_1, \cdots, \theta_n} ;\ \theta_j \in \mathbb{R}\}$$

但し、

$$
{}_\ell\underline{j}_{\theta_1, \cdots, \theta_n} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
i\theta_1 & & & & & \\
 & \ddots & & & & \\
 & & i\theta_\ell & & & \\
 & & & \theta_{\ell+1} & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & & & & & \theta_n \\
\hline
 & & & -i\theta_1 & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & & & & & -i\theta_\ell \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \theta_n
\end{array}\right)
$$

$\mathfrak{j}_0$ はスプリット・カルタン部分空間、$\mathfrak{j}_n$ はコンパクト・カルタン部分空間である。一般にカルタン部分空間 $\mathfrak{j}$ の次元は X の階数と呼ばれ$\mathfrak{j}$ に関わらず一定であることが知られている。今の場合その次元は n である。

§1 のときと同様、X = G/H の G への埋め込み写像$\tilde{\sigma}$を

$\tilde{\sigma}$: G/H $\longrightarrow$ G : g H $\longmapsto$ $g\sigma(g)^{-1}$,

G の閉集合 Q を Q = $\tilde{\sigma}$(G/H) ($\subset$G) により定義しよう。さらに、各 $\mathfrak{j}_\ell$ (ℓ=0, 1,$\cdots$,n) に対応して、$\tilde{J}_\ell$ を、

$\tilde{J}_\ell = Z_Q(\mathfrak{j}_\ell) = \{g \in Q \mid Ad(g)Y = Y \quad (Y \in \mathfrak{j}_\ell)\}$

により定義する。簡単な計算により $\tilde{J}_\ell$ は

$$\tilde{J}_\ell = \bigsqcup_{S \in \{+,\ -\}^{n-\ell}} \tilde{J}^S_\ell \qquad (\text{各 } \tilde{J}^S_\ell \text{ は連結集合})$$

と分解される。ここで、$0 \leq \ell \leq n$, $S = (\varepsilon_{\ell+1}, \cdots, \varepsilon_n) \in \{+,\ -\}^{n-\ell}$ に対し、

$\tilde{J}^S_\ell = \{{}_\ell\tilde{j}^{\varepsilon_{\ell+1}, \cdots, \varepsilon_n}_{\theta_1, \cdots, \theta_n} \mid \theta_j \in \mathbb{R},\ \varepsilon_j \in \{+,\ -\}\}$,

$$
{}_{\ell}\tilde{j}^{\varepsilon_{\ell+1},\cdots,\varepsilon_n}_{\theta_1,\cdots,\theta_n} =
\left(\begin{array}{c:c|c:c}
e^{i\theta_1} & & & \\
\ddots & & & \\
e^{i\theta_\ell} & & & \\
\hdashline
 & \varepsilon_{\ell+1}\mathrm{ch}\,\theta_{\ell+1} & & \varepsilon_{\ell+1}\mathrm{sh}\,\theta_{\ell+1} \\
 & \ddots & & \ddots \\
 & \varepsilon_n\mathrm{ch}\,\theta_n & & \varepsilon_n\mathrm{sh}\,\theta_n \\
\hline
 & & e^{-i\theta_1} & \\
 & & \ddots & \\
 & & e^{-i\theta_\ell} & \\
\hdashline
 & \varepsilon_{\ell+1}\mathrm{sh}\,\theta_{\ell+1} & & \varepsilon_{\ell+1}\mathrm{ch}\,\theta_{\ell+1} \\
 & \ddots & & \ddots \\
 & \varepsilon_n\mathrm{sh}\,\theta_n & & \varepsilon_n\mathrm{ch}\,\theta_n
\end{array}\right)
$$

今、$\tilde{J}_\ell$ をG/Hの中に実現させるために、 $0\leqq \ell \leqq n$, $S=(\varepsilon_{\ell+1},\cdots,\varepsilon_n)\in\{+,-\}^{n-\ell}$ に対して、

$$J_\ell=\tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{J}_\ell),\qquad J_\ell^S=\tilde{\sigma}^{-1}(J_\ell^S)$$

とおこう。このとき、J_ℓ, J_ℓ^S はそれぞれ $\tilde{J}_\ell$, $\tilde{J}_\ell^S$ と1対1に対応していて、 かつ

$$J_\ell^S=\{{}_{\ell}j^{\varepsilon_{\ell+1},\cdots,\varepsilon_n}_{\theta_1,\cdots,\theta_n}H \mid \theta_j\in\mathbb{R},\ \varepsilon_j\in\{+,-\}\},$$

$$
{}_{\ell}j^{\varepsilon_{\ell+1},\cdots,\varepsilon_n}_{\theta_1,\cdots,\theta_n} =
\left(\begin{array}{c:c|c:c}
e^{i\theta_1} & & & \\
\ddots & & & \\
e^{i\theta_\ell} & & & \\
\hdashline
 & \varepsilon'_{\ell+1}\mathrm{ch}\,\theta_{\ell+1} & & \varepsilon''_{\ell+1}\mathrm{sh}\,\theta_{\ell+1} \\
 & \ddots & & \ddots \\
 & \varepsilon'_n\mathrm{ch}\,\theta_n & & \varepsilon''_n\mathrm{sh}\,\theta_n \\
\hline
 & & e^{-i\theta_1} & \\
 & & \ddots & \\
 & & e^{-i\theta_\ell} & \\
\hdashline
 & \varepsilon'_{\ell+1}\mathrm{sh}\,\theta_{\ell+1} & & \varepsilon''_{\ell+1}\mathrm{ch}\,\theta_{\ell+1} \\
 & \ddots & & \ddots \\
 & \varepsilon'_n\mathrm{sh}\,\theta_n & & \varepsilon''_n\mathrm{ch}\,\theta_n
\end{array}\right)
$$

（但し、$\varepsilon_j=+$ のとき、$\varepsilon'_j=\varepsilon''_j=1$、$\varepsilon_j=-$ のとき、
$\varepsilon'_j=i=\sqrt{-1}$、　　$\varepsilon''_j=-i=-\sqrt{-1}$。）

$$\tilde{\sigma}({}_{\ell}j^{\varepsilon_{\ell+1},\cdots,\varepsilon_n}_{\theta_1,\cdots,\theta_n})={}_{\ell}\tilde{j}^{\varepsilon_{\ell+1},\cdots,\varepsilon_n}_{2\theta_1,\cdots,2\theta_n}$$

$J_\ell=\coprod_S J_\ell^S$ （J_ℓ^S は連結）等が成り立つ。J_ℓ（または $\tilde{J}_\ell$）は以下において群にお

けるカルタン部分群と同様な役割を演じる。

簡単な計算により、各 $0 \leqq \ell \leqq n$ に対し次の関係が成立することに注意しよう。

(1) $${}_{\ell}j^{\varepsilon_{\ell+1},\cdots,\varepsilon_n}_{\theta_1,\cdots,\theta_n} H = {}_{\ell}j^{\varepsilon'_{\ell+1},\cdots,\varepsilon'_n}_{\theta'_1,\cdots,\theta'_n} H$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \theta_j \equiv \theta'_j \pmod{\pi} & (0 \leqq j \leqq \ell) \\ \theta_j = \theta'_j, \quad \varepsilon_j = \varepsilon'_j & (\ell+1 \leqq j \leqq n) \end{cases}$$

(2) $$H_{\ell}j^{\varepsilon_{\ell+1},\cdots,\varepsilon_n}_{\theta_1,\cdots,\theta_n} H = H_{\ell}j^{\varepsilon'_{\ell+1},\cdots,\varepsilon'_n}_{\theta'_1,\cdots,\theta'_n} H$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} {}^{\exists}\alpha \in \mathfrak{S}_{\ell} & \theta_j \equiv \pm\theta'_{\alpha(j)} \pmod{\pi} & (0 \leqq j \leqq \ell) \\ {}^{\exists}\beta \in \mathfrak{S}_{n-\ell} & \theta_{\ell+j} = \pm\theta'_{\ell+\beta(j)}, \quad \varepsilon_{\ell+j} = \varepsilon'_{\ell+\beta(j)} & (1 \leqq j \leqq n-\ell) \end{cases}$$

言い替えれば、J_{ℓ}のワイル群 $[W_{\ell} = N_H(J_{\ell})/Z_H(J_{\ell})]$ は $(\mathfrak{S}_{\ell} \times \mathfrak{S}_{n-\ell}) \ltimes (\mathbb{Z}_2)^n$ に同型な群になる。ここで、$\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群、等。

さて、X'を X の正則半単純群元全体の集合、$J'_{\ell} = J_{\ell} \cap X'$ とする。そのとき、

$${}_{\ell}j^{\varepsilon_{\ell+1},\cdots,\varepsilon_n}_{\theta_1,\cdots,\theta_n} H \in J'_{\ell}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \theta_i \not\equiv 0, \ \theta_i \not\equiv \pm\theta_j \pmod{\pi} & (0 \leqq i, j \leqq \ell, \quad i \neq j) \\ \theta_i \neq 0, \ \theta_i \neq \pm\theta_j, & (\ell+1 \leqq i, j \leqq n, \quad i \neq j). \end{cases}$$

次の事実はよく知られている（cf. Kengmana [11, Theorem 1.13]）。

<u>補題 2.1</u>. $$X = \coprod_{\ell=0}^{n} \coprod_{S \in \{+,-\}^{n-\ell}} H.(J^S_{\ell})' .$$

以上のことに注意しながら、J_{ℓ}の各元に対し、その t-変数表示をつぎのように定義する：

$$J_{\ell} \ni {}_{\ell}j^{\varepsilon_{\ell+1},\cdots,\varepsilon_n}_{\theta_1,\cdots,\theta_n} H \longmapsto (t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

ここで、

$$t_j = \cos 2\theta_j \qquad (0 \leqq j \leqq \ell)$$

$$t_j = \varepsilon_j \cosh 2\theta_j \qquad (\ell+1 \leqq j \leqq n)$$

この対応により、$J_\ell^s/(\mathbb{Z}_2)^n$, $J_\ell/(\mathbb{Z}_2)^n$ はそれぞれ次の集合と同一視することができる。

$$\left\{(t_1, t_2, \cdots, t_n) \;\middle|\; \begin{array}{ll} -1 \leqq t_i \leqq 1 & (0 \leqq i \leqq \ell) \\ \varepsilon_i t_i \geqq 1 & (\ell+1 \leqq i \leqq n) \end{array}\right\}$$

$$\left\{(t_1, t_2, \cdots, t_n) \;\middle|\; \begin{array}{ll} |t_i| \leqq 1 & (0 \leqq i \leqq \ell) \\ |t_i| \geqq 1 & (\ell+1 \leqq i \leqq n) \end{array}\right\} \cdots\cdots (※)$$

なお、J_ℓ上にワイル群 $W_\ell = (\mathfrak{S}_\ell \times \mathfrak{S}_{n-\ell}) \ltimes (\mathbb{Z}_2)^n$ が作用しているのに対応し、(※) の集合上には$\mathfrak{S}_\ell \times \mathfrak{S}_{n-\ell}$ が作用している。図 2.1 は $r=1, 2$ の場合に各 J_ℓ^s 間の関係を図示したものである。

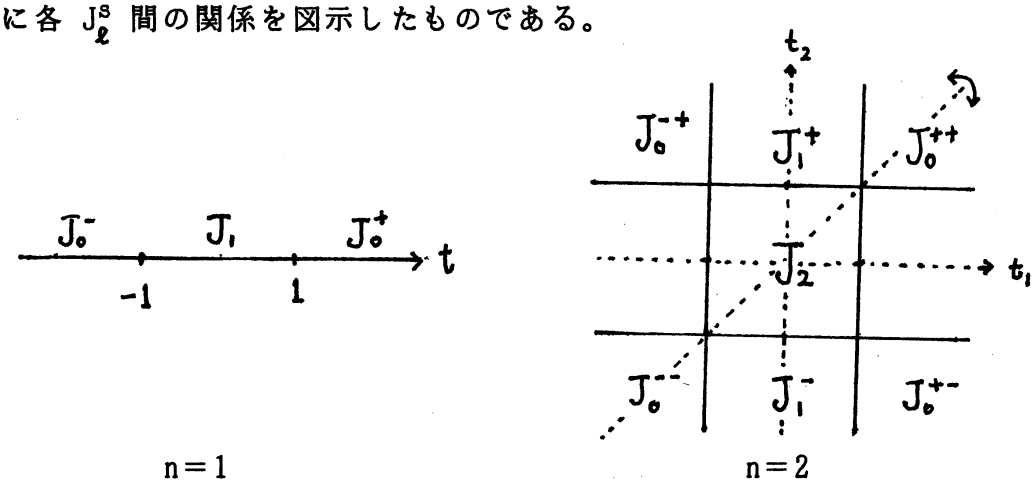

図 2.1

ここで $n=2$ の場合に現れる↻ は (t_1, t_2) と (t_2, t_1) が$\mathfrak{S}_2$ の作用により互いに移り合っていることを示している。

次に、X 上の不変微分作用素の記述に入る。$D \in \mathbb{D}(X)$ に対し、$\mathfrak{L}(D)$を D の<u>動径部分</u>、即ち、

$$\mathfrak{L}(D)(f|_{\bigcup_\ell J_\ell'}) = (Df)|_{\bigcup_\ell J_\ell'}$$

が任意のH-不変な C^∞ 級関数 f に対して成立するという条件で一意的に定まる $\bigcup_\ell J_\ell'$ 上の微分作用素とする。

$$a(t)=4(t^2-1), \quad b(t)=8t$$

とおき、微分作用素 L, L_1をそれぞれ、

$$L = a(t)\frac{d^2}{dt^2}+ b(t)\frac{d}{dt},$$

$$L_1 = a(t_1)\frac{\partial^2}{\partial t_i^2} + b(t_1)\frac{\partial}{\partial t_i}$$

で定義する。$b(t)$ は $4\{(\mu+2)t+\mu\}$ で $\mu=0$ とおいたときの式であることに注意する。

$$\omega = \prod_{1\leqq j<i\leqq n} (t_i-t_j)$$

とおく（この節の終わりの註を参照）。

一般に、その複素化が互いに同型な半単純対称空間 X_1, X_2 に対し、その微分作用素環 $\mathbb{D}(X_1)$, $\mathbb{D}(X_2)$ の構造は同じである。この事実と、$(U(n,n)/GL(n,C))_{\mathbb{C}} \cong (U(n,n)/(U(n)\times U(n)))_{\mathbb{C}}$ より、$\mathbb{D}(U(n,n)/GL(n,\mathbb{C}))\cong \mathbb{D}(U(n,n)/(U(n)\times U(n)))$ である。後の微分作用素環の構造は、§1 で記述した定理 1.1 により分かるから、我々は次の結果を得る。

<u>補題 2.2（定理 1.1 の系）</u>. $\mathcal{S} = \{\omega^{-1}S(L_1,\cdots,L_n)\omega \mid S$: n 変数の対称多項式$\}$ とおくとき、写像$\mathfrak{l}$: $D \longmapsto \mathfrak{l}(D)$ は $\mathbb{D}(X)$から$\mathcal{S}$ の上への 1 対 1 の写像を与える。

この補題から、§1 のときと同様、次の事実が成立する。

(1) 任意の $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n$ に対し、$\mathbb{D}(X)$の指標 $\chi_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$が

$$\chi_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} = S_D(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \qquad (D\in\mathbb{D}(X))$$

により定義される。但し、$D\in\mathbb{D}(X)$ に対し、S_D は $\mathfrak{l}(D) = \omega^{-1}S_D(L_1,\cdots,L_n)\omega$ で与えられた n 変数対称多項式。

(2) 逆に、$\mathbb{D}(X)$の任意の指標χはある$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$に対し、$\chi=\chi_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$

と表せる。

(3) $\chi_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} = \chi_{\lambda'_1,\cdots,\lambda'_n}$ となるのはある $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ が存在して $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) = (\lambda'_{\sigma(1)},\cdots,\lambda'_{\sigma(n)})$ となるとき、かつそのときに限る。

<u>定義 2.3.</u> 任意の $i\neq j$ に対し、$\lambda_i\neq\lambda_j$ を満たすとき、指標 $\chi = \chi_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$ は <u>regular</u> であるという。

（註） 我々が以前 $U(p,q)/(U(r)\times U(p-r,q))$ に対して用いたときと同様、もし、$\tau_j=\cos^2\theta_j \quad (1\leqq j\leqq \ell)$, $\tau_j=\cosh^2\theta_j \quad (\ell+1\leqq j\leqq n)$ とおけば、変数 τ_j とこの報告で使われている変数 t_j との関係は $\tau_j=(t_j+1)/2$ $(t_j\geqq -1,\ 1\leqq j\leqq n)$ である（t_j の定義参照 ）。ちなみに、

$$\omega' = \prod_{1\leqq j<i\leqq n} (\tau_i-\tau_j)$$

とおいたものとこの節で定義した ω との関係は

$$\omega = 2^{n(n-1)/2}\omega'$$

である。また、上で定義された微分作用素 L は、変数 $\tau=(t+1)/2$ を用いれば、

$$L = 4\tau(\tau-1)\frac{d^2}{d\tau^2} + 4(2\tau-1)\frac{d}{d\tau},$$

と書かれる。

§3. 主定理

各 $\lambda\in\mathbb{C}$ に対し、ルジャンドルの微分方程式 $(L-\lambda)\phi(t,\lambda)=0$ の $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,\ \infty)$ 上の解 $\tilde{\phi}_+(t), \tilde{\phi}_-(t)$ を次のように構成しよう。ここに L は以前定義した微分作用素

$$L = 4(t^2-1)\frac{d^2}{dt^2} + 8t\frac{d}{dt}$$

である。まず、区間 $(-1,\ 1)$ 上での上の微分方程式の（2 次元）解空間の基底と

して $\{\tilde{\psi}_+^0(t), \tilde{\psi}_-^0(t)\}$ を 1 つ選ぶ。t=1 のまわりでは、

$$\tilde{\psi}_i^0(t) = \hat{\psi}_i(t) + \log|1-t|\,\hat{\hat{\psi}}_i(t) \qquad (i=+,\ -)$$

$$(\hat{\psi}_i(t), \hat{\hat{\psi}}_i(t) \text{ は } t=1 \text{ のまわりで実解析的})$$

であることが示せるから、従って各 $\tilde{\psi}_i^0(t)$ はある $(-1,\ \infty)$ 上実解析的な関数 $\tilde{\psi}_i^{(1)}(t), \tilde{\psi}_i^{(2)}(t)$ により、$(-1,\ 1)$ 上で

$$\tilde{\psi}_i^0(t) = \tilde{\psi}_i^{(1)}(t) + \log|1-t|\,\tilde{\psi}_i^{(2)}(t) \qquad (i=+,\ -)$$

と書き表せる。同様にまた、各 $\tilde{\psi}_i^0(t)$ の $t=-1$ のまわりでの挙動から、$\tilde{\psi}_i^0(t)$ はある $(-\infty,\ 1)$ 上実解析的な関数 $\tilde{\psi}_i^{(3)}(t)$, $\tilde{\psi}_i^{(4)}(t)$ により $(-1,\ 1)$ 上

$$\tilde{\psi}_i^0(t) = \tilde{\psi}_i^{(3)}(t) + \log|1+t|\,\tilde{\psi}_i^{(4)}(t) \qquad (i=+,\ -)$$

とも表せる。そこで、$\tilde{\psi}_i^0(t)$ の定義域を $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,\ \infty)$ に拡張した関数 $\tilde{\psi}_i(t)$ を、

$$\tilde{\psi}_i(t) = \begin{cases} \tilde{\psi}_i^{(3)}(t) + \log|1+t|\,\tilde{\psi}_i^{(4)}(t) & (t<-1) \\ \tilde{\psi}_i^0(t) & (-1<t<1) \\ \tilde{\psi}_i^{(1)}(t) + \log|1-t|\,\tilde{\psi}_i^{(2)}(t) & (1<t) \end{cases}$$

により定義しよう。特に $\tilde{\psi}_+^0(t), \tilde{\psi}_-^0(t)$ が $(-1,\ 1)$ 上で、

$$\tilde{\psi}_+^0(-t) = \tilde{\psi}_+^0(t), \quad \tilde{\psi}_-^0(-t) = -\tilde{\psi}_-^0(t)$$

をみたすとき、この $\tilde{\psi}_i^0(t)$ から構成した $\tilde{\psi}_i(t)$ を $\psi_i(t)$ と記すことにしよう。$\psi_i(t)$ については $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,\ \infty)$ 上で、

$$\psi_+(-t) = \psi_+(t), \quad \psi_-(-t) = -\psi_-(t)$$

が成立する。L の t に対する対称性からこのような解は存在する。以下、我々は $(L-\lambda)\psi(t,\lambda)=0$ をみたす 2 つの関数 $\tilde{\psi}_+(t), \tilde{\psi}_-(t)$ として、専ら上の条件をみたす関数 $\psi_+(t)$, $\psi_-(t)$ を考えることにする。

$\psi_+(t), \psi_-(t)$ は $n=1$ の場合の X の IED として特徴づけられる（定理 3.1で $n=1$の場合）。さらに、$\psi_+(t)$ は、半単純対称空間 $O(2,1)/(O(1)\times O(1,1))$ 上のある固有超関数のカルタン部分空間上への制限ともみなせることを付記しておこう。$O(2,1)/(O(1)\times O(1,1))$上の固有超関数については、 Aoki-Kato [1]，Faraut [8] 等ですでに研究されている。なお、$U(1,1)/GL(1,\mathbb{C})$ は $O(2,1)/(O(1)\times O(1,1))$ の 2 重被覆になっていることに注意。$U(1,1)/GL(1,\mathbb{C})$上の固有超関数

については Faraut [7] を参照のこと。

再び、n は一般の自然数とする。今、我々は主定理を述べる用意ができた。

<u>定理 3.1.</u> 指標 $\chi=\chi_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$ が regular（即ち、$i\neq j$ ならば $\lambda_i\neq\lambda_j$）と仮定する。そのとき、任意の $\Theta\in\mathcal{D}'_{\chi,H}(X)$ に対し、（ℓ に依存しない）定数 C_ν $[\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_n),\ \nu_i=+,\ -]$ が存在して、

$$\omega\Theta\,|\bigcup_{\ell}J_\ell=\frac{1}{\prod_{1\leqq j<i\leqq n}(\lambda_i-\lambda_j)}$$
$$\times\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=\pm}C_\nu\det\left(\phi_{\nu_j}(\tau_i,\lambda_{k(j)})\right)_{1\leqq i,j\leqq n}$$

ϕ_iの代わりに$\tilde{\phi}_i$とおいても定理は成り立つ。

一方、次の定理は本質的に Sekiguchi [12]、Kengmana [11] から得られている。

<u>定理 3.2〔Sekiguchi-Kengmana〕</u>. χを任意の指標とする。もし、$\Theta\in\mathcal{D}'_{\chi,H}(X)$ が $\mathrm{supp}\,\Theta\subset X-X'$ をみたすならば、$\Theta=0$ である。

上の２つの定理からすぐに次の系が得られる。

<u>系 3.3.</u> 指標 χが regular のとき、$\dim\mathcal{D}'_{\chi,H}(X)\leqq 2^n$。

<u>注意 3.4.</u> 現在、我々は「χが regular か否かに関わらず、$\dim\mathcal{D}'_{\chi,H}(X)=2^n$ になる」事を、概ね以下の手順で示す事ができるであろうと考えている。

(1) χ が regular でないときも、$\dim \mathcal{D}'_{\chi,H}(X) \leqq 2^n$ になる事を確かめる（cf. [4]）。

(2) 各 χ に対応する主系列表現が 2^n 個ある事を確かめる（我々の対称空間 X の場合、スプリットなカルタン部分空間の連結成分の個数は丁度 2^n 個ある事に注意）。このことを利用して、各 χ に対し、$\mathcal{D}'_{\chi,H}(X)$ の 2^n 個の1次独立な IED の存在を保証する。

§4. 主定理の証明の概略

§4.1. まず、X 上の不変固有超関数 $\Theta \in \mathcal{D}'_{\chi,H}(X)$ の X' 上での挙動を考えよう。明らかに Θ の X' への制限は $\mathcal{D}'_{\chi,H}(X')$ の元である。$\mathcal{D}'_{\chi,H}(X')$ については、$\chi = \chi_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$ の如何に関わらず、

(1) 任意の $\Pi \in \mathcal{D}'_{\chi,H}(X')$ は X' 上の実解析的関数である。

(2) X' 上の H-不変関数 Π が、不変固有関数になることと、各 $\ell = 0,1,\cdots,n$ に対して $\Pi|_{J'_\ell}$ がワイル群不変、かつ $u = \omega\Pi|_{J'_\ell}$ が（t- 変数表示に関し）微分方程式系

(☆) $(L_1^k + L_2^k + \cdots + L_n^k)u = (\lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k)u \quad (k = 1,2,\cdots,n)$

を満たすこととは同値である。（但し、$\Pi|_{J'_\ell}$ は Π の J'_ℓ への制限を表す。$X' = \bigsqcup_{0\leq\ell\leq n} H J'_\ell$ に注意）

という事実が成り立つことに注意する。この事実により、各 $\Theta \in \mathcal{D}'_{\chi,H}(X)$ に対し、t-変数を用い $u = u_\ell = \omega\Theta|_{J'_\ell}$ と置くことにすれば、u は微分方程式系(☆)を満たす実解析的関数となることが分かる。

$\tilde{\phi}_i(t,\lambda)$ (i=1,2) は §3で定義した関数、即ち $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$ 上で定義されたtの関数で次の三条件を満たすものとする。

i) $(L-\lambda)\tilde{\phi}_i=0$

ii) 各$\tilde{\phi}_i$は $t=1$ および $t=-1$ で "matching condition" をみたしている。

iii) $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2$ は一次独立

このとき $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2$は $(-\infty,-1),(-1,1),(1,\infty)$の各々で、微分方程式$(L-\lambda)u=0$ の解空間の基底となっていることに注意する。

次の補題は容易に示される。

<u>補題4.1.1</u>　$\chi = \chi_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$ が regular な時、即ち $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i\neq j)$ のとき、$\{(t_1,\cdots,t_n) \mid t_i\neq\pm1 \ (i=1,\cdots,n),\ t_i\neq t_j \ (1\leqq i<j\leqq n)\}$ に含まれる任意の領域において、

$$(4.1.1)\quad \{\phi_{\nu_1}(t_1,\lambda_{k(1)})\ \phi_{\nu_2}(t_2,\lambda_{k(2)})\ \cdots\ \phi_{\nu_n}(t_n,\lambda_{k(n)}) \mid k\in\mathfrak{S}_n,\ (\nu_1,\cdots,\nu_n)\in\{+,-\}^n\}$$

は微分方程式(☆)の解空間の基底である。

この補題から、u は J'_ℓ の各連結成分において、定数 ${}_\ell C^k_\nu \in \mathbb{C}$ によって、

$$(4.1.2)\quad u(t_1,\cdots,t_n) = \sum_{\substack{\nu\in\{+,-\}^n\\ k\in\mathfrak{S}_n}} {}_\ell C^k_\nu\ \tilde{\phi}_{\nu_1}(t_1,\lambda_{k(1)})\tilde{\phi}_{\nu_2}(t_2,\lambda_{k(2)})\cdots\tilde{\phi}_{\nu_n}(t_n,\lambda_{k(n)})$$

と表せる。ここで $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_n)$と書いた。

次に X の半単純特異点の近傍でのΘの挙動を調べる必要がある。[2] に従い、半単純特異点を次のような場合に分け考えよう。

(a) 半正則な半単純元、即ち次の $(a\text{-}1)_{ij}$ $(1\leqq i<j\leqq n)$, $(a\text{-}3)^{\pm}_{\ell}$ $(1\leqq \ell\leqq n)$ という $n(n-1)/2+2n$ 個の条件うち、唯一つが成立する場合

$(a\text{-}1)_{ij}: t_i=t_j$, $(a\text{-}3)^{\pm}_{\ell}: t_\ell=\pm1$

(b) 正則でも半正則でもない半単純元の場合

(b-1) $t_i = \pm 1$ $(1 \leqq i \leqq n)$ となる i の個数が高々一つの場合

(b-2) $t_i = \pm 1$ $(1 \leqq i \leqq n)$ となる i の個数が少なくとも２つ以上ある場合。（今回は、［2］の(a-2)に当たる場合がなくなり、代わりに、［2］の(a-3)に相当する場合が$(a\text{-}3)^{\pm}$の二系列にわかれることに注意）

このうち (a) の場合、即ち半正則半単純元jのまわりでのΘの挙動の研究を、我々は、

① 不変積分のjのまわりでの挙動を、jの中心化群から生じる部分対称空間の不変積分の性質を用いて研究する。(cf. §4.3)

② まず準備として、①の結果を用いて、jの近傍で定義された X-X'内に台を持つ、jの近傍で定義されたH-不変な超関数を調べる。その後、不変積分と、$u_\ell = \omega\Theta|_{J_\ell'}$ の具体的な形 を ワイルの積分公式に代入し、 部分積分を利用して $\langle D\,\Theta, f\rangle = \chi(D)\langle\Theta, f\rangle$ $(D \in \mathbb{D}(X),\ f \in C_c^\infty(X))$ となるための$\{u_\ell\}$の条件（接続公式）を求める。

という $U(p,q)/(U(r)\times U(p-r,q))$ に対するのと同じ方針（より詳しくは［2］§§4.3または［4］§§4.2 参照）により Θ の挙動を詳しく調べた。

(b-1)も同じ方針でその近傍におけるΘ の挙動を知ることができるものと思われる（［3］を参照）。これに反し、(b-2) の場合は この方針の適用には(a), (b-1) の場合に比べ本質的により困難な点がある。

§4.2. 初めに、$(a\text{-}1)_{ij}$ $(1 \leqq i < j \leqq n)$ が成り立つような半正則な半単純元の近傍での接続公式を調べる。結論として次の補題が得られる。

<u>補題 4.2.1</u> u_ℓ は $t_i = t_j$ となる半正則な半単純元の近傍で実解析的に延長される。

この補題により (4.1.2) に於ける係数 ${}_\ell C_\nu^k$ は $S = (\varepsilon_{\ell+1}, \cdots, \varepsilon_n)$ とするとき$(J_\ell^S)'$ 内の連結成分に依らず一定であることが分かる。これを${}_\ell C_\nu^k(\varepsilon_{\ell+1}, \cdots, \varepsilon_n)$と書こう。（但し、$n=\ell$の時は単に${}_\ell C_\nu^k$ と書く。）

以下 $\ell = n$ とする。$\Theta \in \mathcal{D}'_{\chi,H}(X)$ が H-不変であることにより、u_nは $\mathfrak{S}_n$の作用に関して歪対称であるから、任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し、

(4.2.1) $\quad u_n(t_{\sigma(1)}, \cdots, t_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}\sigma \; u_n(t_1, \cdots, t_n),$

従って、

(4.2.2) $\quad {}_nC^k_\nu = \operatorname{sgn}\sigma \; {}_nC^{k\sigma}_{\nu\sigma} \qquad (k, \sigma \in \mathfrak{S}_n)$

が成り立つ。但し、$\nu\sigma = (\nu_{\sigma(1)}, \cdots, \nu_{\sigma(n)})$。よって、$\mathfrak{S}_n$の単位元をeと書くと

(4.2.2') $\quad {}_nC^k_\nu = (\operatorname{sgn} k) \; {}_nC^e_{\nu k^{-1}}.$

次に我々は(a-3)$^{\pm}_{\ell}$ $(1 \leqq \ell \leqq n)$ 即ち $J_{\ell-1}$ と J_ℓ の共通部分 $A_\ell = J_{\ell-1} \cap J_\ell$ に属するような半正則な半単純元の近傍での接続公式を求める。

<u>補題 4.2.2</u> 任意の $\ell \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $(\varepsilon_\ell, \varepsilon_{\ell+1}, \cdots, \varepsilon_n) \in \{+,-\}^{n-\ell+1}$, $k \in \mathfrak{S}_n$, $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n) \in \{+,-\}^n$ に対し、

$$ {}_{\ell-1}C^k_\nu(\varepsilon_\ell, \varepsilon_{\ell+1}, \cdots, \varepsilon_n) = {}_\ell C^k_\nu(\varepsilon_{\ell+1}, \cdots, \varepsilon_n). $$

上の補題を繰り返し使って

(4.2.3) $\quad {}_\ell C^k_\nu(\varepsilon_{\ell+1}, \cdots, \varepsilon_n) = {}_nC^k_\nu.$

(4.2.2'),(4.2.3),行列式の定義から、任意の $\ell \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $S = (\varepsilon_{\ell+1}, \cdots, \varepsilon_n) \in \{+,-\}^{n-\ell}$に対して

$$
\begin{aligned}
\omega\, \Theta|_{(U^S_\ell)'}(t_1, \cdots, t_n) &= \sum_{\substack{\nu \in \{+,-\}^n \\ k \in \mathfrak{S}_n}} {}_\ell C^k_\nu(\varepsilon_{\ell+1}, \cdots, \varepsilon_n)\, \phi_{\nu_1}(t_1, \lambda_{k(1)}) \cdots \phi_{\nu_n}(t_n, \lambda_{k(n)}) \\
&= \sum_{k,\nu} (\operatorname{sgn} k) \; {}_nC^e_{\nu k^{-1}} \; \phi_{\nu_1}(t_1, \lambda_{k(1)}) \cdots \phi_{\nu_n}(t_n, \lambda_{k(n)}) \\
&= \sum_k (\operatorname{sgn} k) \Big(\sum_\nu {}_nC^e_{\nu k^{-1}} \phi_{\nu_1}(t_1, \lambda_{k(1)}) \cdots \phi_{\nu_n}(t_n, \lambda_{k(n)}) \Big) \\
&= \sum_k (\operatorname{sgn} k) \Big(\sum_\nu {}_nC^e_\nu \; \phi_{\nu_{k(1)}}(t_1, \lambda_{k(1)}) \cdots \phi_{\nu_{k(n)}}(t_n, \lambda_{k(n)}) \Big) \\
&= \sum_\nu {}_nC^e_\nu \Big(\sum_k (\operatorname{sgn} k) \; \phi_{\nu_{k(1)}}(t_1, \lambda_{k(1)}) \cdots \phi_{\nu_{k(n)}}(t_n, \lambda_{k(n)}) \Big) \\
&= \sum_\nu {}_nC^e_\nu \det\left(\phi_{\nu_j}(t_i, \lambda_j)\right)_{1 \leqq i, j \leqq n}
\end{aligned}
$$

が成立する。即ち、主定理が証明された。

§ 4. 3 不変積分

(a-1), $(a\text{-}3)^{\pm}$のいずれかの条件を満たす点 j の近傍におけるIEDの接続公式を証明するためには、X 上の不変積分の j の近傍でのふるまいについての情報が必要である。そして、X 上の不変積分の j のまわりでの挙動は、j の中心化群から生ずる部分対称空間 $X_{(j)} = Z_G(\tilde{\sigma}(j))/Z_H(\tilde{\sigma}(j))$ 上の不変積分の j のまわりでの挙動に帰着させることにより調べられる。そこで、本小節ではまず、(a-1), $(a\text{-}3)^{\pm}$の各条件を満たす半正則半単純元 j の中心化群から生ずる部分対称空間について、次に不変積分について書く。

簡単な計算により、表 4.1 の各 j に付随する対称空間 $X_{(j)}$ は、それぞれ、表 4.1 第3列の半単純対称空間 $X^{S}_{(j)}$ と第4列の自明な対称空間 $X^{T}_{(j)}$ に対し、$X^{S}_{(j)} \times X^{T}_{(j)}$ と局所同型になることがわかる。半正則な半単純元を考えていることから、表にあらわれる$X^{S}_{(j)}$ の階数はすべて1である。また、各 $X_{(j)}$ のカルタン部分空間の$Z_H(\tilde{\sigma}(j))$-共役類の完全代表系としては、それぞれ表4.1 第1列のものをとることができる。

j の属する カルタン部分空間	j の満たす条件		$X_{(j)}$	
			$X^{S}_{(j)}$	$X^{T}_{(j)}$
J_{ℓ}	$(a\text{-}1)_{i,j}$	$\ell<i<j$	$SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$	$T^{\ell}\times\mathbb{R}^{r-\ell-1}$
		$i<j\leqq\ell$	$SU(2)$	$T^{\ell-1}\times\mathbb{R}^{r-\ell}$
$J_{\ell}, J_{\ell-1}$	$(a\text{-}3)^{\pm}_{\ell}$		$U(1,1)/GL(1,\mathbb{C})$	$T^{\ell-1}\times\mathbb{R}^{r-\ell}$

表4.1

さて、X = G/H を一般の対称空間とし、j を X のあるカルタン部分空間に属する正則元とする。このとき、$f\in C^{\infty}_{c}(X)$に対し

(4.3.1) $$F_f(j) = \int_{H/Z_H(\tilde{\sigma}(j))} f(h.j)\,d\tilde{h}$$

を f の<u>不変積分</u>と呼ぶ。ここに、$\tilde{h}$ は h の属する $Z_H(\tilde{\sigma}(j))$ 剰余類を表す。（$H/Z_H(\tilde{\sigma}(j))$上の不変測度は、ある方法で正規化されたものを採用する。）特に、我々の考えている対称空間 X = G/H に対しては、j に対応するt-変数を$(t_1, \cdots, t_n)$とするとき、

(4.3.2) $$M_f(t_1, \cdots, t_n) = \omega\ F_f(j) \qquad (f \in C_c^\infty(X))$$

と置き、これもまた f の不変積分と呼ぶ。我々は便宜上、M_fの方を主として扱う。

対称空間に対する“a theorem of compacity”を用いる議論により F_f の j のまわりの挙動を j に付随する部分対称空間 $X_{(j)}$ 上の不変積分の j のまわりの挙動に帰着させて調べることが出来る。さらに後者は階数１の半単純対称空間 $X^S_{(j)}$ 上の不変積分の性質から知ることが出来る。表4.1で取り上げた j のうち、

Ⅰ．唯一つのカルタン部分空間に含まれる場合：(a-1)

Ⅱ．複数のカルタン部分空間 J_ℓ（$\ell=0,1,\cdots,n$）に含まれる場合：$(a\text{-}3)^\pm$

のいずれかによって、結果は多少違なる。Ⅰの場合には、$X_{(j)}$ はコンパクト対称空間あるいはリーマン対称空間となるので、$X_{(j)}$ 上の不変積分は J_ℓ 上C^∞級関数となる。この事から F_f も j のまわりでC^∞級関数に延長される。Ⅱの場合には、$X^S_{(j)}$ は階数１の対称空間 $U(1,1)/GL(1,\mathbb{C})$ であり、既に良く研究されている（cf.Faraut [7]；[1]，Faraut [8]：$U(1,1)/GL(1,\mathbb{C})$は $O(2,1)/(O(1)\times O(1,1))$ と局所同型であることに注意）ので、$X_{(j)}$ 上の不変積分の性質から F_f の j のまわりの挙動がわかる。このようにして、次の補題が得られる。

<u>補題 4.3.1</u>　表4.1の各半正則半単純元 j に対し、不変積分 M_f（$f \in C_c^\infty(X)$）は j のまわりで、次のように漸近展開される

i) $(a\text{-}1)_{ij}$の場合：$M_f(t_1, \cdots, t_n)$

$$\sim \sum_{k=0}^{\infty} E_k(f; t_1, \cdots, \check{t}_i, \cdots, \check{t}_j, \cdots, t_n)(t_i - t_j)^{2k+1}$$

ii) $(a\text{-}3)^\pm_\ell$の場合：$M_f(t_1, \cdots, t_n)$

$$\sim \sum_{m=0}^{\infty} A_m^\pm(f; t_1, \cdots, \check{t}_\ell, \cdots, t_n)(1 \mp t_\ell)^m + \sum_{m=0}^{\infty} B_m^\pm(f; t_1, \cdots, \check{t}_\ell, \cdots, t_n)(1 \mp t_\ell)^m \log|1 \mp t_\ell|$$

ここに、$E_k(f;\cdot)$は(n-2)変数，$A_m(f;\cdot)$,$B_m(f;\cdot)$は(n-1)変数のC^∞級関数である。逆に任意の(n-2)変数C^∞級関数 $E_k(f,\cdot)$ に対し、M_f の漸近展開がi)の右辺であるような $f\in C_c^\infty(X)$ が存在する。ii)についても同様である。

References

[1] Aoki, S. and Kato, S.: Connection formulas for invariant eigen-distributions on certain semisimple symmetric spaces, 数理研講究録 570 (1985), 111-132.

[2] Aoki, S. and Kato, S.: U(p,q)/(U(r)×U(p-r,q)) 上の不変固有超関数の接続公式について，数理研講究録 712 (1990), 93-111.

[3] Aoki, S. and Kato, S.: U(p,q)/{U(r)×U(p-r,q)} に於ける不変固有超関数の拡張可能性について，拓殖大学研究年報 20 号 工学系 (1990), 63-69.

[4] Aoki, S. and Kato, S.: U(p,q)/(U(r)×U(p-r,q)) 上の不変固有超関数の接続公式について II —infinitesimal character が singular な場合，数理研講究録 761 (1991), 103-125.

[5] Aoki, S. and Kato, S.: On invariant eigendistributions on U(p,q)/(U(r)×U(p-r,q)), Proc. of the Japan Academy, 67.A.6. (1991), 203-207.

[6] Berezin, F. A. and Karpelevič, F. I.: Zonal spherical functions and Laplace operators on some symmetric spaces, Dokl. Acad. Nauk SSSR (N.S.) 118 (1958), 9-12. (Russian)

[7] Faraut, J.: Noyaux sphériques sur un hyperboloide à une nappe, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, vol. 497 (1975), 172-210.

[8] Faraut, J.: Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques, J. Math. Pures Appl., 58 (1979), 369-444.

[9] Hirai, T.: Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups, II, Japan. J. Math. New Series, 2 (1976), 27-89.

[10] Hoogenboom, B.: Spherical functions and differential operators on complex Grassmann manifolds, Ark. Math. 20 (1982), 69-85.

[11] Kengmana, T.: Discrete series characters on non-Riemannian symmetric spaces, Thesis (Harvard University) (1984).

[12] Sekiguchi, J.: Invariant spherical hyperfunctions on the tangent space of a symmetric space, Advanced Studies in Pure Math. 6 (1985), Algebraic Groups and Related Topics, 83-126.