数理解析研究所講究録
第 856 巻 1994 年 22-24

Stationary phase method with estimate of remainder term over a space of large dimension

藤原大輔 (D. Fujiwara)
学習院大学理

1993 年 10 月 5 日

1 鞍部点法.

鞍部点法とは、次のような大きなパラメターνを含む振動型の積分の値を$\nu\to\infty$のときに漸近的に知る方法である:

$$I(S,a,\nu)=\int_{R^d}e^{-i\nu S(x)}a(x)dx.$$

ここで $S(x)$ は実数値の C^∞関数で位相関数とよばれ、$a(x)$ は 振幅関数と呼ばれる C^∞関数であり、νは、大きな正数パラメターである。最も簡単な場合、$a(x)\in C_0^\infty(R^d)$ で $S(x)$ の特異点 はただ 1 点 x^*だけで、そこでは Morse 型の特異点であるすなわち $HessS(x^*)$ は非退化とする。この時次の漸近式が成立することは、良く知られている。

$$I(S,a,\nu)=\left(\frac{2\pi}{i\nu}\right)^{d/2}[det\{HessS(x^*)\}]^{-1/2}(e^{-i\nu S(x^*)}a(x^*)+r_d(\nu)). \tag{1}$$

鞍部点法は、ファインマン経路積分との関係がふかいので (cf. [1] ,[3] , [2] and [4]) 我々は、$d\to\infty$のとき $\nu^{d/2+1}r_d(\nu)$ を評価する事を問題とする。この問題は [5] に詳しく論じられ、応用は、たとえば、[1], [3] と [4] にある。

2 主結果.

我々が扱う振動型積分は、次の形をしている。

$$I(\{t_j\},S,a,\nu)(x_L,x_0)=\prod_{j=1}^{L}(\frac{\nu i}{2\pi t_j})^{1/2}\int_{R^{L-1}}e^{-i\nu S(x_L,\ldots,x_0)}a(x_L,\ldots,x_0)\prod_{j=1}^{L-1}dx_j. \tag{2}$$

ここでνは大きな正パラメターで $\{t_j\}$ は小さい正のパラメターである。

我々の仮定は、位相関数に関するものと振幅関数に関するものと 2 つがある。まず位相関数に関する仮定は、つぎのとうり。

Assumption 2.1 $S(x_L,\ldots,x_0)$ は

$$S(x_L,\ldots,x_0)=\sum_{j=1}^{L}S_j(t_j,x_j,x_{j-1}) \tag{3}$$

のかたちをしている。ここで

$$S_j(t_j,x_j,x_{j-1})=\frac{|x_j-x_{j-1}|^2}{2t_j}+t_j\omega_j(t_j,x_j,x_{j-1}) \tag{4}$$

であり任意の $m\geq 2$ にたいして正数 κ_m が存在し $2\leq\alpha+\beta\leq m$ であるなら

$$\sup_{x_j,x_{j-1}}|\partial_{x_j}^{\alpha}\partial_{x_{j-1}}^{\beta}\omega_j(t_j,x_j,x_{j-1})|\leq\kappa_m \tag{5}$$

という評価がなりたつものとする。

この仮定のもとでは、$T_L=\sum_{j=1}^{L}t_j$が十分に小さければ関数 $(x_{L-1},\dots,x_1)\to S(x_L,x_{L-1},\dots,x_1,x_0)$ の特異点はただ1つである。それを $(x_{L-1}^*,\dots,x_1^*)$ と書く。また $S(x_L,x_{L-1}^*,\dots,x_1^*,x_0)$ を省略して $S(\overline{x_L,x_0})$ と書く。また、特異点での Hessian を $H+W$ と書く、ただし,

$$H=\begin{pmatrix}\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2} & -\frac{1}{t_2} & 0 & 0 & \dots\\ -\frac{1}{t_2} & \frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3} & -\frac{1}{t_3} & 0 & \dots\\ 0 & -\frac{1}{t_3} & \frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4} & -\frac{1}{t_4} & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}$$

であり、

$$W=\begin{pmatrix}t_1\partial_{x_1}^2\omega_1+t_2\partial_{x_1}^2\omega_2 & t_2\partial_{x_1}\partial_{x_2}\omega_2 & 0 & \dots\\ t_2\partial_{x_1}\partial_{x_2}\omega_2 & t_2\partial_{x_2}^2\omega_2+t_3\partial_{x_2}^2\omega_3 & t_3\partial_{x_2}\partial_{x_3}\omega_3 & \dots\\ 0 & t_3\partial_{x_2}\partial_{x_3}\omega_3 & t_3\partial_{x_3}^2\omega_3+t_4\partial_{x_3}^2\omega_4 & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}$$

である。H の行列式については、

$$detH=\frac{T_L}{t_1t_2\dots t_L}\neq 0.$$

が成り立つ。

我々の第一の結果は、$a(x)=1$ の場合に関するものである。

Theorem 2.1 仮定 *Assumption 2.1* が成り立つとする。 正数δ_1が存在して $T_L=t_1+\dots+t_L\leq\delta_1$ のときには、

$$I(\{t_j\},S,1,\nu)(x_L,x_0)=\left(\frac{\nu i}{2\pi T_L}\right)^{1/2}e^{-i\nu S(\overline{x_L,x_0})}\left[det(I+WH^{-1})\right]^{-1/2}(1+r(\nu,x_L,x_0)). \tag{6}$$

ここで剰余項 $r(\nu,x_L,x_0)$ は、次の評価をみたす。 任意の $K\geq 0$ にたいして 正定数 C_K が存在して $|\alpha_0|,|\alpha_L|\leq K$であるかぎり

$$|\partial_{x_0}^{\alpha_0}\partial_{x_L}^{\alpha_L}r(\nu,x_L,x_0)|\leq C_KT_L^3\nu^{-1}. \tag{7}$$

Remark 2.1 ここでδ_1 と C_K は L と無関係にとれる。したがって $T_L\leq\delta_1$ である限り $L\to\infty$ のときも $r(\nu,x_L,x_0)$ は有界にとどまる。

一般の 振幅関数 $a(x)$ をもつ場合の結果を述べるにはもっと準備が必要である。

$1\leq k\leq l\leq L$ となる番号 k,l をとる。すると $t_{k+1}+\dots+t_l$が十分小さいならば、関数 $(x_{l-1},\dots,x_{k+1})\to\sum_{j=k+1}^{l}S_j(t_j,x_j,x_{j-1})$ の特異点はただ一つであるからこれを $(x_{l-1}^*,\dots,x_{k+1}^*)$ と書く。これは、x_l と x_k の関数である。 $a(x_L,\dots,x_l,x_{l-1}^*,\dots,x_{k+1}^*,x_k,\dots,x_0)$ を $a(x_L,\dots,x_{l+1},\overline{x_l,x_k},x_{k-1},\dots,x_0)$ と書く。

つぎに振幅関数に関する仮定を記すことにする。

Assumption 2.2 $K \geq 0$ の任意の K にたいして定数 A_K が存在して次のことが成り立つ: *(i)* $|\alpha_j| \leq K$ *for* $j = 0, 1, \ldots, L$, ならば

$$|\prod_{j=0}^{L} \partial_{x_j}^{\alpha_j} a(x_L, \ldots, x_0)| \leq A_K. \tag{8}$$

(ii) 数列 $\{j_1, \ldots, j_s\}$ を

$$0 = j_0 < j_1 - 1 < j_1 < j_2 - 1 < \ldots < j_s - 1 < j_s < L$$

となるようなものとすれば、$j = 0, j_1 - 1, j_1, \ldots, j_s - 1, j_s, L$ にたいして $|\alpha_j| \leq K$ であるかぎり、

$$|\partial_{x0}^{\alpha_0} \partial_{xL}^{\alpha_L} \prod_{k=1}^{s} \partial_{x_{j_k-1}}^{\alpha_{j_k-1}} \partial_{x_{j_k}}^{\alpha_{j_k}} a(\overline{x_L, x_{j_s}}, \overline{x_{j_s-1}, x_{j_{s-1}}}, \ldots, \overline{x_{j_1-1}, x_{j_0}})| \leq A_K. \tag{9}$$

次の結果を得る。

Theorem 2.2 仮定 *Assumption (2.1)* と *Assumption (2.2)* が成り立つものとする。ある $0 < T_L \leq \delta_1$ を満たすδ_1 があって

$$I(\{t_j\}, S, a, \nu)(x_L, x_0)$$
$$= \left(\frac{\nu i}{2\pi T_L}\right)^{1/2} e^{-i\nu S(\overline{x_L, x_0})} \left[det(I + H^{-1}W)\right]^{-1/2} (a(\overline{x_L, x_0}) + r(\nu, x_L, x_0)),$$

が成り立つ。ただし $r(\nu, x_L, x_0)$ は、次の評価を満たす: $K \geq 0$ を任意の正整数とすると正定数 C_K と $M(K)$ をとって $|\alpha_0|, |\alpha_L| \leq K$ である限り

$$|\partial_{x_0}^{\alpha_0} \partial_{x_L}^{\alpha_L} r(\nu, x_L, x_0)| \leq C_K T_L \nu^{-1} A_{M(K)} \tag{10}$$

が成立するようにできる。

Remark 2.2 δ_1 , C_K や $M(K)$ は L に無関係にとれる。従って $T_L = t_1 + \ldots + t_L \leq \delta_1$ である限り たとえ $L \to \infty$ でも $r(\nu, x_L, x_0)$ は有界にとどまる。

詳しい議論は、[5] にある。

参考文献

[1] D. Fujiwara. The feynman path integrals as improper integrals over the sobolev space. In *Proceedings of Journées d'equations aux dérivés partielles, St. Jean de Monts 1990 Société Mathématiques de France*, 1990.

[2] D. Fujiwara. Remarks on convergence of the feynman path integrals. *Duke Math. J.*, 47:559–600, 1980.

[3] D. Fujiwara. Some feynman path integrals as oscillatory integrals over a sobolev manifold. In *Proc. International conference on Functional Analysis in memory of Professor Kôsaku Yosida.*, 1992.

[4] D. Fujiwara. Some feynman path integrals as oscillatory integrals over a sobolev manifold. 1992. Preprint.

[5] D. Fujiwara. The stationary phase method with an estimate of the remainder term on a space of large dimension. *Nagoya Math. J.*, 61–97, 1991.