

# Jones index and KK-theory

岡山大

梶原 毅

北大

綿谷 安男

① はじめに

このノートの目的は、次の図式を完成することにある：

$$\begin{array}{l} \text{Amenable} : K\text{-amenable} \\ \hline = \text{finite index} : \boxed{\quad ? \quad} \end{array}$$

離散群  $G$  が amenable である必要十分条件は、  
 $C^*(G) \cong C_r^*(G)$  であり、一般には自然な写像  
 $\pi: C^*(G) \rightarrow C_r^*(G)$

は ontr なる  $*$  homomorphism ではあるが、 $\|\cdot\|$  はない。

Cuntz [2] は, 上の  $*$ -homomorphism  $\pi: C^*(G) \rightarrow C^*(G)$  が  $K$ -theory の level で 同型 の時に 離散群  $G$  は  $K$ -amenable と示した。例えば  $2$  の生成元をもつ自由群  $F_2$  は amenable ではないが,  $K$ -amenable である。離散群 だけでなく, 一般の局所コンパクト群に対しても, Julg-Valette は  $K$ -amenable の概念を導入している [5]。

Jones [4] は II<sub>1</sub>-factor  $M$  の subfactor  $N \subset M$  に対してその Jones index  $[M:N]$  という概念を導入して, inclusion  $N \subset M$  そのものの研究が非常に豊かであることを示した。幸いながら [6] や Longo [7] によって index の概念は III 型を含む一般の subfactor によって自然に拡張されている。この場合は index の定義に何の異論もない。しかし  $C^*$ -環  $B$  とその部分  $C^*$ -alg  $A \subset B$  においては index の定義が 綿谷 [8] によるものがあるが, これは factor の時のまねにすぎず,  $C^*$ -環に対する自然な最もよい定義であるとはとても信じられないものである。私たちのこの研究は, 「もう少しまし, なものをめざして,  $K$ -theory のレベルで有限 index であることを特徴づけられないかを考えよう」という一つの試みであるが, 現在のところ定義のみで中味は貧しいと思う。

## ②このノートでの key words の解釈

| Key words        | 誤った 解釈                                 | 正しい 解釈                                     |
|------------------|----------------------------------------|--------------------------------------------|
| Index            | Atiyah-Singer index                    | Jones index                                |
| Square           | $C^2$<br>Commuting square              | $K^2$<br>KK-theory                         |
| field theory     | quantum field theory                   | number field theory                        |
| $O_k$            | Cuntz algebras                         | rings of algebraic integers of a field $k$ |
| Way<br>道<br>(みち) | right way/map<br>正しい道 写像<br>masa michi | wrong way/map<br>誤った道 写像<br>(まち)           |

③ 今までの理論では, KK-theory と結びついているのは Atiyah-Singer index の方であつたのが ここではそれが Jones index と結びついて いることに注意。

### ③ Jones index for $C^*$ -subalgebras

$C^*$ -subalgebra に対する index [8] を思いだす:

**Def**  $B$  を  $C^*$ -alg,  $A \subset B$  を  $B$  の  $C^*$ -subalg.

$E: B \rightarrow A$  を conditional expectation とす. 有限個

の元  $\{(u_1, u_1^*), \dots, (u_n, u_n^*)\} \subset B \times B$  が quasi-basis

$$\stackrel{\text{def}}{=} \forall x \in B \quad x = \sum_{i=1}^n u_i E(u_i^* x)$$

(この時  $x$  と  $x^*$  に対して自動的に  $x = \sum_{i=1}^n E(x u_i) u_i^*$  になる)

則して  $\{u_1, \dots, u_n\}$  を  $E$  の "basis" といい,

conditional expectation  $E$  が of index-finite type

$\stackrel{\text{def}}{=} E$  が quasi-basis をもつ.

この時,  $E$  の Index を 以下で定義す

$$\text{Index } E = \sum_{i=1}^n u_i u_i^*$$

① Index  $E$  は quasi-basis のとり方によらない,

②  $\text{Index } E \in \text{Center } B$

③  $\text{II}_1$ -factor の時は Jones の index に  $\text{II}_\infty$  型の場合は Murray の index [6] に一致する.

④ factor の時と同様に  $C^*$ -環としての basic construction  $C^*(B, e_A)$  が構成できる.

総括[8]は本質的に AF algebra の例しか構成できず、Hyperfinite factor の時の域を定数的に越えていない、たといえよう。ところが、泉[3]は Cuntz 環の  $C^*$ -subalgebra で non-integer 値を index にもつような極めて興味深いものを構成した。これは例自体もその構成方法も非常におもしろい。Sector の fusion rule を利用したもののつくり方は泉[3]を参照することにして、ここではその結果についていくつかの具体例だけを記す。

**例** (Izumi [3])

$$\textcircled{1} \mathcal{Q}_2 = C^*(S_1, S_2) \quad , \quad d = 2\omega \frac{\pi}{5}$$

$$\begin{cases} p(S_1) = \frac{1}{d} S_1 + \frac{1}{\sqrt{d}} S_2^* S_2 \\ p(S_2) = \left( \frac{1}{\sqrt{d}} S_1 - \frac{1}{d} S_2 S_2^* \right) S_2^* + S_2 S_1 S_1^* \end{cases}$$

↑ 上記 endomorphism  $p \in \text{End}(\mathcal{Q}_2)$  より conditional expectation  $E_p(x) = p(S_1^* p(x) S_1)$  とおくと  $\text{Index } E_p = 4\omega^2 \frac{\pi}{5}$

$$\textcircled{2} \mathcal{Q}_3 = C^*(S_1, S_2, S_3) \quad , \quad a^3 = 1 \quad , \quad a \in \mathbb{C}$$

$$\begin{cases} p_a(S_1) = \frac{S_1 + S_2}{2} + \frac{S_3 S_3^*}{\sqrt{2}} \\ p_a(S_2) = \left( \frac{S_1 + S_2}{2} - \frac{S_3 S_3^*}{\sqrt{2}} \right) (S_1 S_1^* + S_2 S_2^* - S_3 S_3^*) \\ p_a(S_3) = \bar{a} \frac{S_1 - S_2}{\sqrt{2}} S_3^* + a S_3 (S_1 S_1^* - S_2 S_2^*) \end{cases}$$

$$E_{p_a}(x) = p(S_1^* p_a(x) S_1) \quad \text{とおくと} \quad \text{Index } E_{p_a} = 4$$

④ Wrong way maps in  $K$ -theory

$B \in C^*$ -algebra,  $A \in B$  の  $C^*$ -subalgebra  $\gamma$   
 $i: A \hookrightarrow B$  inclusion map とする。すると 自然に

$$\iota_*: K_0(A) \longrightarrow K_0(B)$$

$$\text{や } \iota_*: K_1(A) \longrightarrow K_1(B)$$

が導かれる。一般にはこの自然な方向の写像と反対方向の写像の存在は期待すべきでない。ところが、もし conditional expectation  $E: B \rightarrow A$  が of index-finite type ならこの反対方向の写像 "wrong way" map が  $K$ -theory のレベルで存在するのである。実際この時

$$\psi: \begin{cases} A \longrightarrow C^*(B, e_A) \\ \psi \\ a \longmapsto a e_A \end{cases}$$

により  $\psi_*: K_0(A) \longrightarrow K_0(C^*(B, e_A))$  は同型になっている (森田同値!) ので "wrong way" map

$$T_0: K_0(B) \longrightarrow K_0(A) \text{ は}$$

$j: B \hookrightarrow C^*(B, e_A)$  を使って  $T_0 := (\psi_*)^{-1} \cdot j_*$  と

定義できる。  $T_1: K_1(B) \longrightarrow K_1(A)$  も同様である。

以上のことは index が有限な 部分群等に関する  
(co)homology の level での "wrong way" maps  
である「transfer」の存在と類比的になって  
いる。さらにこの時点の図式が成立している:

$$\begin{aligned} & (\text{wrong way map}) \circ (\text{natural map}) \\ &= (\text{multiplication map by the index}) \end{aligned}$$

さて  $K$ -theory level での homomorphism は  
「ほぼ」 Kasparov の  $KK$ -theory の元としても  
よい。よって amenable  $\Sigma$   $K$ -theory のレベルで  
考えた  $Cuntz$  の  $K$ -amenable と同様に,  $af$   
index-finite type  $\Sigma$   $K$ -theory のレベルで考え  
たものも存在するかもしれない。それをうまく  
定式化しようというのが目的である。また sector  
の理論において, sector  $P$  に対してその conjugate  
 $\bar{P}$  を考えるが,  $P$  を natural map とすると  $\bar{P}$  が  
"wrong way" map に対応することになる。

以下ではさらに number field theory に関して "wrong  
way" map を考察し 比較してみたい,

# ⑤ Wrong way maps in number field theory

$F$  is number field,  $L \supset F$  is  $F$  の有限次代数拡大とする。  $n = [L:F]$  を拡大次数とす。

$L$  の  $F$  上の basis  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  とすると,  $a \in L$  に対し  $n \times n$  行列  $A(a) = (a_{ij})_{ij} \in M_n(F)$  over  $F$  が次で定められる

$$a w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i$$

この時 trace map  $\text{Tr}_{L/F}: L \rightarrow F$

と norm map  $N_{L/F}: L \rightarrow F$

が次で定義される

$$\text{Tr}_{L/F}(a) = \text{Tr}(A(a))$$

$$N_{L/F}(a) = \det(A(a))$$

これらの2つの maps は  $K$ -theory の level  $\tau \in$

存在し, inclusion  $i: F \rightarrow L$  が定める自然な

写像  $i_*: K_*(F) \rightarrow K_*(L)$  に対する "wrong way"

$$\text{map } \begin{cases} N_0: K_0(L) \rightarrow K_0(F) \\ N_1: K_1(L) \rightarrow K_1(F) \end{cases}$$

と定まるとよい。実際

$$\begin{cases} K_0(L) \cong K_0(F) \cong \mathbb{Z} \tau & N_0(k) = [L:F]k \\ K_1(L) = L^\times / \langle u \rangle, & K_1(F) = F^\times / \langle u \rangle \text{ 且 } N_1(a) = N_{L/F}(a) \end{cases}$$

と定まるとよい。

この<sup>13</sup> (wrong way map)  $\circ$  (natural map) = (multiplication map by the index) に実際なっている:

$$N_0 \circ c_0 : \begin{cases} K_0(F) \longrightarrow K_0(F) \\ \downarrow \psi \\ \mathbb{R} \longrightarrow [L(F)]_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

$$N_1 \circ c_1 : \begin{cases} K_1(F) \longrightarrow K_1(F) \\ \downarrow \psi \\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{[L(F)]} \end{cases}$$

これらの "wrong way" maps  $N_0, N_1$  はさらに高次の代数的  $K$ -理論のレベルでも導入されているが、著者自身は(わかっている)の代数的なことをやめておく。

### ⑥ $K$ -theoretic finiteness of index

ある種の "良い" wrong way map の存在が  $K$ -theory の level で保証できる時に,  $K$ -theoretic に index が有限性であるとみなしてみよう:

**Def**  $A$  と  $B$  を  $C^*$ -環とす, 3-組  $(E, \varphi, F)$  を Kasparov  $A$ - $B$  module とは

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \textcircled{1} E \text{ は } \mathbb{Z}_2\text{-graded Hilbert } B\text{-module} \\ \textcircled{2} \varphi: A \rightarrow \mathcal{K}(E) \text{ は degree 0 の } * \text{homomorphism} \\ \textcircled{3} F \in \mathcal{K}(E) \text{ は degree 1 の operator} \\ \textcircled{4} \forall a \in A \quad \varphi(a)(F-F^*) \in \varphi(a)(F^2-1) \in [\varphi(a), F] \in \mathcal{K}(E) \end{cases}$$

**Def** Kasparov  $A$ - $B$  module 全体  $\mathcal{E}(A, B)$  に直和  $\oplus$  を入れ, ある種の homotopy equivalence  $\sim$  を入れたものが Kasparov group  $KK(A, B)$  である。[わいこと12(1)] を参照。特に Kasparov product :

$$\otimes_D : KK(A, D) \times KK(D, B) \rightarrow KK(A, B)$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \otimes_D \beta$$

が構成されること重要である。subfactor の理論における Ocneanu の bimodule approach での relative tensor product に対応するのが  $C^*$ -algebra の index 理論における Kasparov product であると思われた。しかし Fredholm operator  $F$  の扱い方とも絡んでこれほど素直に翻訳できるわけでもなく大いに思案中の所である。一々

factor : number field  
 $\Rightarrow C^*$ -algebra : rings of algebraic integer

という荒らけい類比が成をす徴候も<sup>(3)</sup>  
 定はいつかあるのて、そちらも眺めつつ、  
 石を定をゆくりと直めつつ、概観をたてて確か  
 なものがあるわけでもなくかなり心もとない。

Subfactor の理論では 非負行列の Perron-Frobenius の定理に大変 お世話 になった。  
 ここで 行列は inclusion matrix になっている。C\*-環  
 の世界では この inclusion matrix は 一般に  $KK$ -group  
 の元とみてよい。そこで  $KK$ -group の元に positivity  
 を導入するには 要性が必要で なる。

Def Kasparov  $A$ - $B$  module  $(E, \varphi, F) \in \mathcal{E}(A, B)$   
 が positive

$$\stackrel{\text{def}}{=} \forall x \in K_0(A) + \dots \quad x \otimes_A (E, \varphi, F) \in K_0(B) + \dots$$

(注)  $\Rightarrow$   $K_0(A) \cong KK(\mathbb{C}, A)$  とみていいので,  $\otimes_A$   
 は Kasparov product である。

②  $\Rightarrow$   $K_0(A) + \dots$  は  $K_0(A)$  の中で  $\cup M_n(A)$  の中の  
 projection から本当に来ている元の生成する positive  
 cone である。(場合により  $K_0(A) = K_0(A)$  になっ  
 (I) 時もあるのは 目をつぶる )

③ これと少し違った positivity の定義も 候補とい  
 われている。その可能性は残しておくが、とりあえず  
 このノートは 簡潔のためこの定義を使う。有限次元環  $A \subset B$   
 の inclusion matrix は positive な Kasparov  $A$ - $B$ -module と見做す。

**Def**  $B \in C^*-alg$ ,  $A \subset B \in C^*-subalgebra$  73.

$$\left\{ \begin{array}{l} p = (B \oplus 0, \lambda \oplus 0, 0) \in \Sigma(A, B)_+ \\ i_0 = (A \oplus 0, \lambda \oplus 0, 0) \in \Sigma(A, A)_+ \end{array} \right. \quad \text{74}$$

$\lambda : A \rightarrow \mathcal{L}(B)$  is left multiplication.

この inclusion  $A \subset B$  を  $K$ -theoretic に finite index 72

$$\stackrel{\text{def}}{=} \exists \tau = (E, \pi, F) \in \Sigma(B, A)_+$$

$$\exists \sigma = (E', \pi', F') \in \Sigma(A, A)_+$$

$$\text{s.t. } (p) \otimes_B (\tau) = (i_0) \oplus (\sigma) \text{ in } KK(A, A)$$

**Example 1** conditional expectation  $E: B \rightarrow A$  of index-finite type 72 inclusion  $A \subset B$  is  $K$ -theoretic finite index 73. 実際

$$\tau \equiv (B_A \oplus 0, \lambda \oplus 0, 0) \in \Sigma(B, A)_+ \quad \text{75}$$

72  $(\chi(y) = E(x^*y))$   $A$ -valued inner product 74 75.

$$(p) \otimes_B (\tau) = [({}_A B_A \oplus 0, \lambda \oplus 0, 0)]$$

76 73.

**Example 2**  $S_n$  は  $n$  次元上の 対称群 とする。 inclusion  $A = C^*(S_2) \subset B = C^*(S)$  は  $k$ -theoretic に finite index である。 実際

$$A \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \Rightarrow K_0(A) \cong \mathbb{Z}^2$$

$$B \cong \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \Rightarrow K_0(B) \cong \mathbb{Z}^3$$

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in KK(A, B) \quad \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \quad \begin{matrix} K_0(A) \\ \mathbb{Z}^2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} K_0(B) \\ \mathbb{Z}^3 \end{matrix} \text{ である}$$

$$[\tau] = [P]^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in KK(B, A): K_0(B) \rightarrow K_0(A) \text{ である}$$

$$[P] \otimes_0 [\tau] = [P]^t [P]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore [P] \otimes_0 [\tau] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + [\xi] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$$

**Example 3** (Branched covering)

$$Y \cong \bigcirc_p \bigcirc, \quad X \cong \bigcirc \quad \tau$$

covering  $\tau: Y \rightarrow X$  に対する inclusion  $A = C(X) \subset B = C(Y)$  は  $E: B \rightarrow A$  の index-finite type  $\tau$  である。これは点  $p$  における分岐のためだが、これは  $k$ -theoretic には finite index になる。 実際

### Example 4 (product type action)

$G$  : compact group

$\pi : G \longrightarrow L(\mathbb{C}^n)$  : irreducible rep.

$B = \bigotimes_{i=0}^{\infty} M_2(\mathbb{C})$  :  $M_2$   $\otimes$   $\mathbb{Z}$  の UHF alg

$A = \bigotimes_{i=1}^{\infty} M_2(\mathbb{C})$  : " "

$\alpha : G \longrightarrow \text{Aut } B$  を  $\pi$  から誘導した product type action

とする。つまり  $\alpha_g = \bigotimes_{i=0}^{\infty} \text{Ad } \pi(g)$  。  $\alpha_g(A) = A$

であり  $\alpha$  は  $A$  に制限して  $\pi$  と同じに記述される。

この時 conditional expectation  $E : B^d \rightarrow A^d$  が自然に定まっている。これは同値：

①  $E : B^d \rightarrow A^d$  は of index-finite type

② (finite depth 条件) : irreducible components of

$\{\pi, \pi \otimes \pi, \pi \otimes \pi \otimes \pi, \dots\}$  は  $G$  の中の有限群。

したがって自然に於ける問題は 与えられた  $E : B^d \rightarrow A^d$

が  $\mathbb{C}$ -alg の意味で "index-finite type" であるか  $K$ -characteristic  
には finite index であるか? ということであるが、  
現時段階では残念ながらまだ不明で残っている最中である。

**白状**  $K$ -theoretic に finite index (1.1) こと  
 に関する今の所何も定理ない、定理はまだ  
 何もないことを白状します。

### References

- [1] B. Blackadar,  $K$ -theory for Operator algebras, Springer
- [2] J. Cuntz,  $K$ -theoretic amenability for discrete groups,  
 J. Reine. Angew. Math. 344 (1983), 180-195.
- [3] M. Izumi, Subalgebras of infinite  $C^*$ -algebras with finite  
 Watatani-index I, Cuntz algebras, Commun. Math. Phys. 155  
 (1993), 157-182
- [4] V. Jones, Index for subfactors, Invent. Math. 72 (1983), 1-25.
- [5] P. Julg and A. Valette,  $K$ -theoretic amenability for  $SL_2(\mathbb{Q})$   
 and the action on the associated tree, J. Funct. Anal.  
 58 (1984), 194-215.
- [6] H. Kosaki, Extension of Jones theory on index to  
 arbitrary factors, J. Funct. Anal. 66, (1986), 123-140.
- [7] R. Longo, Index of subfactors and statistics of  
 quantum fields I, Commun. Math. Phys. 126 (1989) 217-247.
- [8] Y. Watatani, Index for  $C^*$ -sub algebras,  
 Mem. Amer. Math. Soc. 83 (1990), No 424