数理解析研究所講究録
862巻 1994年 231-236

非定常Navier-Stokes方程式の外部領域での減衰について

東京電機大・理工 高橋 秀慈
(Shuji Takahashi)

本研究はH. Sohr氏(Paderborn Univ.)との共同研究である。

Ωを$C^{2+\mu}$境界$\partial\Omega$ $(0<\mu<1)$を持つ$\mathbb{R}^3$の外部領域とする。このとき次のような非定常非圧縮Navier-Stokes流の解の無限遠方での減衰の異方性について考える。

$$
(NS)\begin{cases} u_t-\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=f & \text{in } \Omega\times(0,T) \\ \operatorname{div} u=0 \quad \text{in } \Omega\times(0,T) & \\ u|_{\partial\Omega}=0, \quad u|_{t=0}=0, \quad |u|\to 0 \text{ as } |x|\to\infty & \end{cases}
$$

ここでベクトル$u=u(x,t)$は未知の流速を表わし、スカラー$p=p(x,t)$は未知の圧力とする。ベクトル$f=f(x,t)$は与えられた外力であり、簡単のため初期流速は0とした。

これまでに重みつきの関数空間を考えることによって等方的な減衰の様子が調べられている。しかしこの手法で異方性

を得るためには関数空間に異方性を与えねばならない。そこでここでは方程式に異方性のある重み関数をかけることにより減衰の異方性を得る。（注：定常のNavier–Stokes方程式に対して減衰の異方性がFarwig [F] によって異方性のあるSobolev空間上で調べられている。）

$L^{r,q} := L^q(0,T;L^r(\Omega))$ とし、そのノルムを $|\cdot|_{r,q}$ で表わす。又、$|f|_{H^{2,q}} := |f|_{L^q(0,T;H^{2,q}(\Omega))} = |f|_{q,q} + |\nabla f|_{q,q} + |\nabla^2 f|_{q,q}$ とする。

<u>定理1</u>　$q \in (5/3, \infty)$ とし、$r \in (1,\infty)$ は $1/r = 1/q + 1/3$ をみたすものとする。$M \in C^2(\overline{\Omega})$ は

(1)
$$|\nabla M|_\infty + |\nabla^2 M|_\infty < \infty$$

をみたすものとする。$f \in L^{r,q} \cap L^{q,q}$ は $Mf \in L^{q,q}$ となるものとする。このとき (NS) の弱解 u が

(2)
$$u \in L^{\alpha,\beta}, \text{ for } {}^\forall \alpha, \beta \in (1,\infty) \text{ with } 3/\alpha + 2/\beta \leq 1$$

をみたすならば

(3)
$$\begin{aligned} &|Mu_t|_{q,q} + |Mu|_{H^{2,q}} + |\nabla(Mp)|_{q,q} \\ &\leq C(|f|_{q,q} + |f|_{r,q} + |Mf|_{q,q}), \\ &C = C(q, T, \Omega) \end{aligned}$$

をみたす。

次の埋め込み定理により定理1からdecay propertyを得る。

記号：$\xi(p,q) := 3/p + 2/q$

補題2 (Solonnikov) $u_t \in L^{q,q}$, $u \in L^q(0,T; H^{2,q}(\Omega))$とする。

(i) $\alpha, \beta \in [q, \infty)$ with $\xi(q, q) - \xi(\alpha, \beta) \geq 2$ に対して

(4) $$|u|_{\alpha,\beta} \leq C(|u_t|_{q,q} + |u|_{H^{2,q}})$$

が成立する。

(ii) $q > 5/2$ のとき (4) with $\alpha = \beta = \infty$ が成立し、$u \in C(\bar{\Omega} \times [0,T])$ となる。

(iii) $\gamma, \delta \in [q, \infty)$ with $\xi(q, q) - \xi(\gamma, \delta) \leq 1$ に対して

(5) $$|\nabla u|_{\gamma,\delta} \leq C(|u_t|_{q,q} + |u|_{H^{2,q}})$$

が成立する。

(iv) $q > 5$ のとき (5) with $\gamma = \delta = \infty$ が成立して $u \in C(\bar{\Omega} \times [0,T])$ となる。

よって $q > 5/2$ のとき

$$|M(x)||u(x,t)| \leq |Mu|_{\infty,\infty} < C = C(\Omega, q, T, M)$$

すなわち $$|u(x,t)| \leq \frac{C}{|M(x)|}$$

を得る。ここでCはxに依らないのでMの異方性がuの減衰の異方性を与える。同様に $q > 5$ のとき

$$|\nabla u(x,t)| \leq \frac{C}{|M(x)|}$$

を得る。

今回の報告は最終的なものではなく、今後Mの条件(1)を弱

くして、より増大度を許すようにしたいと考えている。そこで以下簡単のために(NS)のかわりに次のStokes方程式に対して(3)の評価を示すことにとどめる。

$$(5)\begin{cases} u_t-\Delta u+\nabla p=f,\ \operatorname{div} u=0 & \text{in } \Omega\times(0,T) \\ u|_{\partial\Omega}=0\ ;\ u|_{t=0}=0,\ |u|\to 0 & \text{as } |x|\to\infty \end{cases}$$

まず(5)に重み関数Mをかけて Mu に関する方程式に書きかえると

$$(6)\begin{cases} (Mu)_t-\Delta(Mu)+\nabla(Mp)=F, \\ \operatorname{div}(Mu)=u\nabla M\neq 0, \\ Mu|_{\partial\Omega}=0,\ Mu|_{t=0}=0,\ |Mu|\to 0,\ \text{as } |x|\to\infty \end{cases}$$

$$F=Mf-2(\nabla u)\cdot(\nabla M)-(\Delta M)u+(\nabla M)p$$

次の補題で divergece free を回復する。

<u>補題3</u> (Bogovski) $m=0,1,2,\cdots,\ 1<r<\infty$ とする。

このとき $\exists R=R(m,r,\Omega)\ ;\ H_0^{m,r}(\Omega)\longrightarrow H_0^{m+1,r}(\Omega)^3$ s.t.

$$\operatorname{div} Rf=f$$

$$|D^{m+1}Rf|_r\leq C|D^m f|_r,\quad {}^\forall f\in H_0^{m,r}(\Omega)$$

$$C=C(\Omega,m,r).$$

次に(5)の a priori estimate を用意する。

<u>補題4</u>

(i) (Solonnikov) (5)について、$1<q<\infty$ に対して

$$(7)\quad |u_t|_{q,q}+|u|_{H^{2,q}}+|\nabla p|_{q,q}\leq C|f|_{q,q}$$

$$\text{with } C = C(\Omega, q, T)$$

が成立する。

(ii) (Giga-Sohr) (5)に対して $1 < q, q' < \infty$ について

(8) $$|u_t|_{q,q'} + |A_q u|_{q,q'} + |\nabla p|_{q,q'} \leq C|f|_{q,q'}$$
$$\text{with } C = C(\Omega, q, q')$$

が成立する。ここで A_q は Stokes 作用素である。

(注: $1 < q < 3/2$ のとき $|\nabla^2 u|_{q,q'} \leq C|A_q u|_{q,q'}$ となるが、ここでは $q > 5/2$ としているので使えないことに注意したい。)

よって $v = R(u\nabla M)$, $\hat{u} = Mu - v$ とおくと $\hat{u}$ のみたす式は

(9) $$\begin{cases} \hat{u}_t - \Delta\hat{u} + \nabla(Mp) = F + v_t - \Delta v \\ \mathrm{div}\,\hat{u} = 0 \\ \hat{u}|_{t=0} = 0, \quad \hat{u}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

となる。補題4(i)により

$$|Mu_t|_{q,q} + |Mu|_{H^2,q} + |\nabla(Mp)|_{q,q}$$
$$\leq C(|F|_{q,q} + |v_t|_{q,q} + |\nabla^2 v|_{q,q})$$

(ここで低階は埋め込み定理によった。)

以下、$|F|_{q,q}$, $|v_t|_{q,q}$, $|\nabla^2 v|_{q,q}$ を評価する。

$$|F|_{q,q} \leq |Mf|_{q,q} + 2|\nabla M|_\infty |\nabla u|_{q,q} + |\Delta M|_\infty |u|_{q,q}$$
$$+ |\nabla M|_\infty |p|_{q,q}$$

(ここで $p \in L^{q,q}$ の存在性が問題となるが、ここでは形式的に

扱うことにする。）Sobolevの不等式と、補題4(ii)により

$$|P|_{q,q} \le C|DP|_{r,q} \lesssim C|f|_{r,q}$$

補題4(i)により

$$|u|_{q,q},\ |Du|_{q,q} \lesssim |u|_{H^2,q} \le C|f|_{q,q}$$

よって

$$|F|_{q,q} \lesssim |Mf|_{q,q} + C(|f|_{q,q} + |f|_{r,q}),$$
$$C = C(\Omega, q, T, M)$$

次に v_t の評価。形式的に

$$v_t = \partial_t R(u \cdot DM) = R(u_t \cdot DM)$$

となるから Sobolevの不等式とBogovskiの補題により

$$|v_t|_{q,q} \le C|Dv_t|_{r,q}$$
$$\lesssim C|u_t \cdot DM|_{r,q}$$
$$\lesssim C|DM|_\infty |f|_{r,q} \quad (\text{Giga-Sohrの評価})$$

同様に

$$|D^2 v|_{q,q} \le C|f|_{q,q}$$

Q.E.D.