数理解析研究所講究録
862巻 1994年 1-9

流れの中での保存則について

奈良女子大学 理学部

宮武貞夫 (Sadao Miyatake)

Euler 方程式の中の質量等の保存則の式を Lagrange 的考察と超関数 (distribution) の手法により，解すなわち密度関数がなめらかでない場合もこめて簡単に導く方法を示す．初期値が L^2 空間に属するという程度の仮定のもとで考える．保存則が流れに沿って成りたつ事，Lagrange の表現で解が表わされること，及び弱解の形の関係式がなりたつこと，この3つの事が同値である事を示す．始めは速度場 $v(x,t)$ がなめらかな場合を考え，次に $v(x,t)$ がなめらかさを持たない場合，詳しくは $v \in W^{\infty,1}$ 即ち $v \in L^\infty$ 及び $\frac{\partial}{\partial t}v, \frac{\partial}{\partial x_j}v$ $(j=1,2,\cdots,n)$，が L^∞ に属する場合を考える．

§1. なめらかな流れの中での保存則について．

ここでは $v(x,t)$ を $R^n \times R^1$ で定義された C^1 クラスに属し，有界関数とする．y から出る流線 $x(y,t)$ は $\frac{dx}{dt} = v(x,t)$, $x(0)=y$ の解，即ち $x(y,t) = y + \int_0^t v(x(y,s),s)\,ds$ を満

たす。このとき ある $T>0$ に対し $(-T,T)$ に属する t については，$C>0$ があって

(1) $$\frac{1}{C} < J(y,t) = \left|\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots y_n)}\right| < C$$

がなりたつ。次に密度関数が $g(x,t)$ である，一つの量の流れに沿った保存則を表現しよう。今初期時刻 $t=0$ に於て y 空間の領域 V_0 を任意に固定して考える。V_0 は時刻 t では $V_t=\{x=x(y,t)\ ;\ y\in V_0\}$ の所に移っている。g に対応する量は $M(0)=\int_{V_0} g(y,0)\,dy$ から $M(t)=\int_{V_t} g(x,t)\,dx$ に移る。ここで保存則として

(2) $$\frac{d}{dt}M(t) = \frac{d}{dt}\int_{V_t} g(x,t)\,dx = 0 \quad , -T<t<T$$

が任意の V_0 に対して成りたつ事を仮定する．このとき (1) より $M(t)$ は

(3) $$M(t) = \int_{V_t} g(x,t)\,dx = \int_{V_0} g(x(y,t),t)\,J(y,t)\,dy$$

と表わされることに注意しよう．$M(t)=M(0)$ 及び V_0 が R^n の任意の領域であることから R^n の超関数として，

(4) $$g(x(y,t),t)\,J(y,t) = g(y,0) = g_0(y), \quad -T<t<T.$$

が成立する．又 (4) より (2) が任意の V_0 に対して成りたつ事が従う。次に (3) より，$\varphi(t)\in\mathcal{D}(-T,T)$ に対し．

(2)′ $$\int M(t)\,\varphi'(t)\,dt = 0$$

がなりたち，又 (2)′ より (2) が従う事を考慮し，(3) は

(3)′ $$M(t) = \int g(x(y,t),t)\,J(y,t)\,\chi_{V_0}(y)\,dy\ ,$$

，($\chi_{V_0}(y)$ は V_0 の特性関数とする) と表わされることから

(2) は次の

(2)″ $$\iint g(x(y,t),t)\,J(y,t)\,\varphi'(t)\,\chi_{V_0}(y)\,dy\,dt = 0$$

に等しい。ここで $\varphi(y,t) \in \mathcal{D}(R^n \times (-T,T))$ は $\overset{finite}{\sum} \varphi_j(t)\,\chi_{V_j}(y)$ の

形の関数の列で t についての一回微分もこめて一様近似が

出来ることに注意しよう。これより (2)″ は

(2)‴ $$\iint g(x(y,t),t)\,J(y,t)\,\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,y)\,dy\,dt = 0\ .$$

が $\varphi \in \mathcal{D}(R^n \times (-T,T))$ に対して成りたつ事と同値である

ことが確かめられる。ここで再び積分変数の変換

$$\{y,t\} \longrightarrow \{x,s\} = \{x(y,t),\ t\}$$

を考える。このとき $s=t$ より

(5) $$J\,dy\,dt = dx\,ds$$

がなりたち，Jacobian は $J\,dy = dx$ が t を固定した場

合になりたつものと形式的に同じものになる。$\psi(x,s) = \varphi(y(x,t),t)$

$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} + \sum \frac{\partial x_j}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j}$ ， $\frac{\partial s}{\partial t} = 1$， $\frac{\partial x_j}{\partial t} = v_j(x,s)$ 等より

(2)‴ は

(6) $$\iint g(x,s)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial s} + \sum v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\psi(x,s)\,dx\,ds = 0$$

となる。ここで $\psi(x,s)$ は $\mathcal{D}(R^n\times(-T,T))$ の元すべてを考えることが出来る。なぜならば $(2)''$ に於て $\varphi(y,t)$ は $\mathcal{D}(R^n\times(-T,T))$ のみならず $C_0^1((-T,T);L^2)$ 全体を動くと考えても良いからである。このクラスの関数に対しても先の $\Sigma\varphi_j(t)\chi_{V_j}(y)$ で t についての一回微分もこめて一様に近似できるからである。又 (1) 及び (4) は (6) の積分に明確な意味を与える。故に $g(x,t)$ は $R^n\times(-T,T)$ での超関数として

(7) $$Lg=\frac{\partial g}{\partial t}+\nabla(gv)=0$$

をみたす。更に初期値を伴った次の形の弱解の関係式も従う。初期値 $g(y,0)=g_0(y)$ に対応して

(8) $$(g,\ L^*\psi)_\pm\ \pm[g_0,\psi(\cdot,0)]=0$$

が $\psi\in\mathcal{D}(R^n\times(-T,T))$ に対してなりたつ。ここで $\pm$ は複号同順で $(\cdot,\cdot)_\pm$ は $t\gtrless 0$ での (x,t) についての積分である。(L^2 内積と考えてもよいし、form の形で後の成分についても共役をとらず実数値の範囲で考えても良い。)、$[\ ,\ ]$ は同様に R^n での積分が対応する。逆に (7) (8) から $(2)'$ 更に (2) がなりたつ事は前の推論を逆にたどれば良い。ここで $g(y,0)=g_0(y)\in L^2$ 及び (4) から (8) が従うことを説明しておこう。g_0 に L^2 の位相で収束する $g_{0n}\in H^1$ をとり (4) をみたす $g_n(x,t)$ を作る。これは $Lg_n=0$ をみたすことから部分積分することにより $g_n(x,t)$ について

は (8) がなりたつ。極限をとれば g について (8) がなりたつことがわかる。次に L^p 的な等式を示しておこう。

$$(9) \qquad \|g_0\|_{L^p}^p = \|g_\delta(\cdot,t)\|_{L^p}^p + p\int_0^t\int\{\delta-\tfrac{p-1}{p}(\nabla\cdot v)\}|g_\delta|^p\,dx\,ds,$$

がなりたつ。但し $p \geq 1$ で $g_\delta = e^{-\delta t}g(x,t)$ を意味する。$(\nabla\cdot v)$ が有界であるから δ を適当に大きな正の数とすると，$g(\cdot,t)$ の L^p の空間での t についての連続性等の関係が (9) 式より理解できる。(9) の証明には (8) の証明の場合と同様に初期値の近似：$g_{0n} \longrightarrow g_0$ in L^p を考え (8) を g_n に適用して $\varphi = e^{-2\delta t}g_n^{p-1}$ ととれば良い。そうすると g_n に対して (9) が示され，極限をとることにより，g に対して (9) が示される。ここの議論で $g_0 \geq 0$ と考えたが，一般の初期値に対しても (4) を考慮すると $|g_0|$ に対する解を考えれば良いことがわかる。

最後に $g_0 \in \mathcal{D}_{L^2}^{1\prime}$ 等の場合にも (4) は正しく，更に Riesz の表現定理を使うと $g_0 \in H^1$ の場合と同様の議論になることがわかる。即ち v に対するなめらかさの仮定がソボレフノルムで一つ多くとると L^2 の場合と同様の議論ができて (9) に対応する関係式も示せる。

§2. $v(x,t)$ がなめらかでない場合

前節と同様の議論を速度場 $v(x,t)$ が必ずしもなめらかで

ない場合で考えたい。$v(x,t)$, $x(y,t)$, $J(y,t)$ について前節で実際に使った条件を列記し, $x(y,t)$ 及び $J(y,t)$ についての条件が $v(x,t)$ についての条件から従うことを Proposition として示す。これにより $v(x,t)$ についての直接的な仮定のもとで前節の結果をまとめて表記することが出来る。最後にこの条件の必要性についての直観的な理解を得るために, 簡単な例をあげておこう。

Remark. §1 で使った v, x, J に対する仮定は次のそれぞれ (1), (2), (3) である。

(1) $v(x,t) \in C^0((-T,T); W^{\infty,1}) \cap C^1((-T,T); L^\infty)$

(2) $(y,t) \in R^n \times (-T,T)$ で超関数の意味で $\dot{x} = v(x,t)$, $x(0) = y$ がなりたつ。即ち $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し次式がなりたつ。

$$-\left(x(y,t), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(y,t)\right)_\pm = \left(v(x(y,t),t), \varphi(y,t)\right)_\pm \pm [y, \varphi(y,0)]$$

更に $x(y,t) \in W^{\infty,1}(R^n \times (-T,T))$ である。

(3) $C > 0$ が存在して ほとんどいたるところの $R^n \times (-T,T)$ に対し, $J(y,t) = \left|\frac{\partial x}{\partial y}\right|$ は $C^{-1} < J(y,t) < C$ をみたす.

Proposition. 上の Remark の 2) 及び 3) は共に 1) から従う.

この Proposition の証明は v をなめらかな v_n で近似し, 各 v_n に対して前節の最初に考えた流線 $x_n(y,t)$ を作る。その極限を $x(y,t)$ とすると, これが一意的に存在し, Remark の (2) を満たす

様に定まる事を示す。$x_n(y,t)$ は逐次近似の方法で $\{x_{nk}(y,t)\}$ の極限として得られる。$v\in W^{\infty,1}$ より v_n は一様にリプシッツ条件がなりたつ様にとれる。これより任意の n, m, k に対し $\|x_{nk}-x_{mk}\| \le C\|v_n-v_m\|$ が成りたつ事が示せる。但しノルムは $R^n\times(-T,T)$ での L^1 ノルムで T を十分小さく取り直すものとする。これより $\|x_n-x_m\|\le C\|v_n-v_m\|$ が示され Remark の (2) の関係式を満たす $x(y,t)$ の存在が証明される。他方 $x_n(y,t)$ は $R^n\times(-T,T)$ で一様に $W^{\infty,1}$ に属することが示されるから $x(y,t)\in W^{\infty,1}$ が示される。更に (3) の $J(y,t)$ についての関係式も非対角線要素が T を十分小さくとる事により対角線部分に比べて小さくなることから証明できる。

以上の考察の結果，次の様に定理として表現出来る。

<u>定理</u>. $R^n\times(-T,T)$ で $v(x,t)$ が上記の Remark, (1) を満たすものと仮定する。T を小さく取り直すことにより次の (i), (ii), (iii) の同値性が言える。但し $g(y,0)=g_0(y)\in L^2$ とする。

(i) 任意の R^n の領域 V_0 に対し (2) がなりたつ。

(ii) (4) が超関数の意味でなりたつ。

(iii) (7) 及び (8) がなりたつ。

この時更に評価式 (9) もなりたつ。

最後に定理の条件の妥当性について考えるために，$v(x,t)=v(x)$ の形の2つの例をあげておこう。

例1. まず $n=1$ の場合に $v(x)=|x|$ を考えよう。Remark の(2)で述べた解 $x(y,t)$ は $y\geq 0$ では ye^{t}，$y<0$ では ye^{-t} で与えられる。一般の n 次元で $v(x)={}^{t}(v_1(x),\cdots,v_n(x))$ の成分が $v_k(x)=|x_k|$ の形であり遠方では適当に修正して，$W^{\infty,1}$ に属する場合を考えよう。この場合も一次元の時と同様 $R^n\times(-T,T)$ で $x(y,t)\in W^{\infty,1}$ が直接確かめられる。故に定理の結果もこの例を含む一般化として理解できる。

例2. $n=1$ で考え，$x\geq 0$ では $v(x)=x^{1/2}$，$x<0$ では $v\equiv 0$ の場合を考える。$\dot{x}=v(x)$，$x(0)=0$ の解は一意的ではなく，原点の近くでは Remark の(3)がなりたたない。当然(4)の関係式も意味をなさない。この場合は定理の条件をみたしていないこともすぐわかる。このことは定理の形のある意味での妥当性を示している。

文献としては次にあげたものを調べた。§1の様な議論は直接には発見できなかった。Lagrange 流の関係式(4)は g_0 がなめらかな場合［1］にもある様に良く知られている。又超関数への拡張も自然であろう。ここでは Lagrange の議論の延長として，test function を使う distribution の考え方，及び積分変数の変換により Euler の方程式が弱形式で直接求めら

れた。不思議に数学的な議論も強微分可能な場合の Euler 流のものよりも簡単に思われる。初期値及び解が強微分可能でなく L^2 のクラスで考える時はこの方法がより適切だと思われる。

References

[1] 今井 功, 流体力学, 岩波全書

[2] J. Serrin, Mathematical principles of classical fluid mechanics, Handbuch der Physics, Springer-Verlag, 1959.

[3] H. Beirão da Veiga, Boundary value problems for a class of first order partial differential equations in Sobolev space and application to Euler flow, Rend. Sem. Math. Univ. Padova, vol. 79, 1988.

[4] R. J. DiPerna — P. L. Lions, Ordinary differential equation, transport theory and Sobolev spaces, Invent. Math. 98, 1989.