

## Horocycle の Rigidity の高次元化について

慶応大 理工 阿部 隆次 (Ryuji Abe)

### 1 Introduction

Horosphere は負曲率の連結なコンパクト多様体の単位接バンドル上の測地流に付随する部分多様体として定義される。定負曲率曲面の単位接バンドルの場合には、その部分多様体を特に horocycle と呼び、horocycle を軌道とする流れ horocycle flow が存在する。M. Ratner は [R] において、horocycle flow の剛性を証明した。 $N_c$  を定負曲率を持つコンパクトな 2 次元 Riemann 多様体、 $M_c$  をその単位接バンドルとする。 $N'_c, M'_c$  を同様な空間とすると、Ratner の定理は次のように表すことができる。

$M_c$  上の horocycle flow と  $M'_c$  上の horocycle flow の間に測度論的な同型写像が存在するとき、 $N_c$  と  $N'_c$  は等長である。

この定理において測度論的な同型写像をより強い写像（微分可能な同型写像）にすると、幾何学的な計算によって容易に、その同型写像が  $M_c$  上の測地流を  $M'_c$  上の測地流に移すことがわかり、Otal の結果 [O] から、 $N_c$  と  $N'_c$  の間に等長変換を与えることが結論される。更に、この幾何学的な計算は可変負曲率の場合にも有効であることが示される。これらの事実は、既に [Ab1] [Ab2] において述べてあるので、詳しいことはそれらを参照していただきたい。

ここでは上の主張の前半部分を可変負曲率かつ高次元の場合に拡張することを目標とする。 $N$  を連結なコンパクト Riemann 多様体で曲率  $\kappa_N$  が  $-4 < \kappa_N \leq -1$  であるもの、

$M$  をその単位接バンドルとする。 $M$  上の測地流  $g$  に付随して expanding horosphere が得られる。 $N', M'$  を同様な空間とするとき、調べるべきことは、 $M, M'$  上の expanding horosphere の間の対応関係から、 $M, M'$  上の測地流の対応関係を導くことができるかということである。結果は次のように表すことができる。

**Theorem.** 同相写像  $\varphi: M \rightarrow M'$  が  $M$  上の expanding horosphere を  $M'$  上の expanding horosphere に向きを保って移すならば、ある定数  $c \in \mathbb{R}$  に対して  $\psi \circ g_r = g'_{cr} \circ \psi$  を満たす同相写像  $\psi: M \rightarrow M'$  が存在する。

以下、この定理の背景と証明の概略を述べる。

## 2 Preliminaries

### 2.1 Anosov background

この節では Anosov flow の定義を復習し、ここで用いる記号を導入するとともに、Anosov flow に関する必要な性質をまとめておく。証明などの詳しい議論は [An] を参照していただきたい。

$V$  を連結なコンパクト Riemann 多様体とする。 $V$  上の flow  $f_t$  が Anosov flow であるとは、以下の条件が満たされることをいう。

- (A)  $f_t$  は固定点を持たない微分可能な flow である。
- (B) 接バンドル  $TV$  は  $TV = E^- \oplus E^0 \oplus E^+$  なる  $f_t$ -不変な分解を持つ。
- (C)  $E^0$  は flow  $f_t$  を生成するベクトル場によってはられる line bundle である。
- (D)  $E^-, E^+$  は次の条件を満たしている。

$t > 0$  に対して正定数  $a, c$  が存在し、

$$X \in E^- \text{ のとき } |df_{-t}X| \leq a|X|e^{-ct}$$

$$Y \in E^+ \text{ のとき } |df_tY| \leq a|Y|e^{-ct}$$

が成立する。ここで、 $a, c$  は点によらないことを注意しておく。

$V$  内 Anosov flow  $f_t$  に付随して次の 4 つの部分多様体が定義される。Riemann 計量から導かれる  $V$  上の距離を  $d$  として、 $x \in V$  に対して

unstable manifold

$$W^-(x) = \{y \in V \mid \lim_{t \rightarrow \infty} d(f_{-t}x, f_{-t}y) = 0\}$$

stable manifold

$$W^+(x) = \{y \in V \mid \lim_{t \rightarrow \infty} d(f_t x, f_t y) = 0\}$$

weak unstable manifold

$$W^{-0}(x) = \cup_{t \in \mathbf{R}} W^-(f_t x)$$

weak stable manifold

$$W^{+0}(x) = \cup_{t \in \mathbf{R}} W^+(f_t x)$$

である。部分バンドル  $E^-$  は完全積分可能であり、それを積分したものは unstable manifold  $W^-(x)$  と一致する。更に、unstable manifold  $W^-(x)$  は  $V$  内葉層構造をなす。その葉層構造を  $W^-$  と表すことにする。同様に、stable manifold  $W^+(x)$  を leaf とする  $V$  内の葉層構造  $W^+$  を定義することができる。上の (D) の性質より Anosov flow  $f_t$  に関して、葉層構造

$W^-$  は伸長的、葉層構造  $W^+$  は縮小的であることがわかる。即ち、

$$x \in V, x_1, x_2 \in W^-(x), t \geq 0 \text{ に対して } d^-(f_{-t}x_1, f_{-t}x_2) \leq ae^{-ct}d^-(x_1, x_2)$$

$$y \in V, y_1, y_2 \in W^+(y), t \geq 0 \text{ に対して } d^+(f_t y_1, f_t y_2) \leq ae^{-ct}d^+(y_1, y_2)$$

が成立する。ここで、 $d^-, d^+$  は  $V$  上の Riemann 計量を  $W^-, W^+$  に制限することによって定義される距離である。

unstable manifold と weak stable manifold 内の点  $x$  の近傍を以下で定義する。

$$B_\epsilon^-(x) = \{y \in W^-(x) \mid d_x^-(x, y) < \epsilon\}$$

$$B_\epsilon^{+0}(x) = \{y \in W^{+0}(x) \mid d_x^{+0}(x, y) < \epsilon\}$$

ここで、 $d_x^-, d_x^{+0}$  は  $V$  上の Riemann 計量をそれぞれ  $W^-(x), W^{+0}(x)$  に制限することによって定義される距離である。接バンドルの分解が横断的であることから、次の canonical coordinate の存在が導かれる。

**Lemma 2.1** 十分小さな  $\eta > 0$  に対して  $\zeta = \zeta(\eta), 0 < \zeta < \eta$  が存在して、以下を満たす。

$$V \text{ 内の点 } x, y \text{ が } d(x, y) < 2\zeta \text{ ならば } B_\eta^{+0}(x) \cap B_\eta^-(y) \text{ は一点よりなる。}$$

さらにその交点は  $x, y$  に連続に依存する。

## 2.2 Geometric background

$N$  を負曲率を持つ連結なコンパクト Riemann 多様体、 $M$  をその単位接バンドルとする。 $M$  上の測地流は  $N$  が負曲率であることから Anosov flow となる。測地流に付随して得られる unstable manifold  $W^-(x), x \in M$  を expanding horosphere または  $h$ -leaf、stable manifold  $W^+(x), x \in M$  を contracting horosphere または  $k$ -leaf と呼ぶことにする。Anosov flow に

関する一般論から、それぞれ expanding horosphere と contracting horosphere を leaf とする  $M$  内の葉層構造  $W^-, W^+$  が得られる。特に、測地流に付随する葉層構造に関しては次のことが知られている。

**Lemma 2.2** 葉層構造  $W^-, W^+$  のそれぞれの leaf は  $M$  内 dense である。

一般に Riemann 多様体の単位接バンドルは contact manifold となっている。従って、空間  $M$  は contact form  $\theta$  を持つ。以下の議論で必要となる contact form  $\theta$  と測地流  $g$  の関係をあげておく。

(a) 任意の  $H_1, H_2 \in E^-, K_1, K_2 \in E^+$  に対して  $d\theta(H_1, H_2) = d\theta(K_1, K_2) = 0$  が成立する。

(b)  $d\theta$  は  $E^- \oplus E^+$  上 nondegenerate である。

更に、contact form  $\theta$  を用いて  $M$  上の pseudo-Riemannian metric を、 $M$  上のベクトル  $X, Y$  に対して

$$g(X, Y) = d\theta(X, IY) + \theta(X)\theta(Y)$$

によって定義することができる。但し、ここで  $I$  は  $I|_{E^\pm} = \pm id$  なる関数である。

この pseudo-Riemannian metric を用いて  $M$  上の canonical connection を定義したいのであるが、そのためには  $M$  の接バンドルの分解  $TM = E^- \oplus E^0 \oplus E^+$  が  $C^1$ -微分可能であることが必要となる。 $N$  が 2次元である場合、または、 $N$  の断面曲率が  $-4 < \kappa_N \leq -1$  をみたしている場合には  $TM$  の分解が  $C^1$ -微分可能であることが知られている。この事実に関する詳しい議論は [HP] を参照していただきたい。よって、上の仮定のもと pseudo-Riemannian metric  $g$  に対し、 $M$  上の affine connection で次の条件をみたすものが一意に存在する。

(i)  $\nabla g = 0$

(ii)  $X, Y \in TM$  に対し  $T(X, Y) = d\theta(X, Y)G$  である。

但し、ここで  $T$  は torsion tensor である。以下の議論で必要となるこの affine connection の性質をあげておく。

(c)  $M$  上任意のベクトル場  $X$  に対して  $\nabla_G X = [G, X]$  が成り立つ。

(d)  $M$  上任意のベクトル場  $X, H \in E^-, K \in E^+$  に対して  $\nabla_X H \in E^-, \nabla_X K \in E^+$  である。

ここで導入された affine connection に関するより詳しい議論は [K] を参照していただきたい。

上で導いた affine connection を用いると測地流とそれに付随する葉層構造の性質は次のように表すことができる。

**Lemma 2.3** (1)  $H \in E^-$  なるベクトル場に対して  $[G, H] \in E^-$  である。

(2)  $H_1, H_2 \in E^-$  なるベクトル場に対して  $[H_1, H_2] \in E^-$  である。

(3)  $K \in E^+$  なるベクトル場を任意にとってきたとき、すべての  $H \in E^-$  に対して  $[H, K] \in E^-$  とはなり得ない。

**Proof.** (1) (c), (d) より明らか。

(2) affine connection がみたす条件 (ii) と torsion tensor の定義により

$$\nabla_{H_1} H_2 - \nabla_{H_2} H_1 - [H_1, H_2] = T(H_1, H_2) = d\theta(H_1, H_2)G$$

が得られる。ここで、(a),(d) を用いればよい。

(3) (2) と同様にして

$$\nabla_H K - \nabla_K H - [H, K] = T(H, K) = d\theta(H, K)G$$

を得る。ここで、すべての  $H$  に対して  $[H, K] \in E^-$  であるとする  $d\theta(H, K)G = 0$  がすべての  $H$  に対して成立しなければならない。  $d\theta$  は  $E^- \oplus E^+$  上 nondegenerate であったから、それは  $K = 0$  の場合に限る。これはベクトル場  $K$  を任意にとってくることに反する。よって  $[H, K] \notin E^-$  なる  $H$  が存在する。

□

上の Lemma に関して注意を与えておく。(1) は葉層構造  $W^-$  が  $g_r$ -不変であること、すなわち、任意の  $x \in M$  に対して  $g_r(W^-(x)) = W^-(g_r x)$  が成立することの言い換えにすぎない。(2) は  $h$ -leaf に沿った変換は  $h$ -leaf を保つことを意味している。ここで、 $h$ -leaf に沿った変換とは部分バンドル  $E^-$  に含まれるベクトル場によって生成される local 1-parameter group of local transformation のことである。([KN] 参照。) また、部分バンドル  $E^-$  が完全積分可能であることの言い換えであるともいえる。(3) は  $k$ -leaf に沿った変換は  $h$ -leaf を保ち得ないことを主張している。

### 3 Outline of Proofs

定理の証明は 4 つの段階に分けてなされる。ここではそれぞれの段階の概略を示す。詳しい議論は [Ab3] を参照していただきたい。以下、 $\varphi$  は定理の仮定を満たす写像、即ち、 $M$  上の expanding horosphere を  $M'$  上の expanding horosphere に向きを保って移す同相写像である。

**Lemma 3.1** 正定数  $\tilde{r}$  が存在して、 $0 < r < \tilde{r}$  なる  $r$  に対し

$$\varphi \circ g_r(x) = g'_{o(r)} \circ \hat{h}_x^r \circ \varphi(x) \quad \text{for all } x \in M$$

が成立する。但し、 $o(r)$  は  $r$  に関する連続関数、 $\hat{h}_x^r$  は  $x, r$  に連続に依存する  $h$ -leaf に沿った変換である。

**Outline of proof.**  $\varphi(x), \varphi(g_r x), x \in M, 0 < r < \tilde{r}$  に対し、Lemma 2.1 を適用できるように  $\tilde{r}$  をとる。点  $x \in M$  を固定したとき、 $M$  内の  $h$ -leaf  $W^-(x)$ ,  $M'$  内の  $h'$ -leaf  $W^-(\varphi(x))$  が定まる。 $0 < r < \tilde{r}$  なる  $r$  を固定して合成写像  $\varphi \circ g_r$  を考える。 $g_r$  は  $h$ -leaf を保つことと仮定から、 $\varphi \circ g_r$  は  $h$ -leaf  $W^-(x)$  を  $h'$ -leaf  $W^-(\varphi \circ g_r(x))$  に移す。一方、 $\varphi(x), \varphi(g_r x)$  に対して Lemma 2.1 を適用すると  $\varphi \circ g_r(x) = g'_o \circ \hat{k} \circ \hat{h} \circ \varphi(x)$  と表せることがわかる。ここで、 $\hat{k}, \hat{h}$  はそれぞれ  $k'$ -leaf,  $h'$ -leaf に沿った変換であり、 $o, \hat{k}, \hat{h}$  はいずれも  $x, r$  に関して連続である。 $\varphi, \varphi \circ g_r$  はともに  $h$ -leaf を  $h'$ -leaf に移すことより  $g'_o \circ \hat{k} \circ \hat{h}$  は  $h'$ -leaf を保たなければならないが、Lemma 2.3 (3) で注意したように  $\hat{k}$  は  $h'$ -leaf を保ち得ない。従って、 $\varphi \circ g_r(x) = g'_{o(x,r)} \circ \hat{h}_x^r \circ \varphi(x)$  と表せなければならない。ここで、 $o(x,r), \hat{h}_x^r$  はいずれも  $x$  と  $r$  に連続に依存することを表す。 $W^-(x) \ni y$  なる  $y$  に対しても全く同様に議論できることと  $W^-(x)$  は  $M$  内 dense であることから、 $o$  は  $r$  のみに依存する連続関数であることが結論できる。

□

**Lemma 3.2** 関数  $o$  は  $r$  に関する線形関数であって、定義域を  $\mathbf{R}$  全体に拡張することができる。即ち、ある定数  $c > 0$  が存在して、

$$\varphi \circ g_r(x) = g'_{cr} \circ \hat{h}_x^r \circ \varphi(x) \quad \text{for all } x \in M, r \in \mathbf{R},$$



とできる。但し、 $\hat{h}_x^r$  は  $x, r$  に連続に依存する  $h'$ -leaf 上の変換である。

**Outline of proof.**  $0 < r_0 < \tilde{r}$  なる  $r_0$  と  $p \in \mathbb{N}$  をとる。 $r_0/p$  に対して  $p$  回 Lemma 3.1 を用いると、 $g'$  が  $h'$ -leaf を保つことから  $o(r_0/p) = o(r_0)/p$  を導くことができる。同様にして、 $0 < (q/p)r_0 < \tilde{r}$  なる  $p, q \in \mathbb{N}$  に対して  $o((q/p)r_0) = (q/p)o(r_0)$  がいえる。関数  $o$  は  $r$  に関して連続であったから  $0 < rr_0 < \tilde{r}$  なる  $r \in \mathbb{R}$  に対して  $o(rr_0) = ro(r_0)$  となり  $r$  に関する線形性が得られる。

一般の  $r$  に対しては Lemma 3.1 を用いることができるように  $r = r_1 + r_2 + \dots + r_l, 0 < r_i < \tilde{r}, i = 1, \dots, l$  と分解する。 $x_j = g_{\sum_{i=1}^j r_i} x, j = 1, \dots, l$  とおくと  $W^-(x_j)$  は  $\varphi$  によって  $W^-(\varphi(x_j))$  に移され、既に線形性が得られていることより  $g'_{cr_{j+1}} W^-(\varphi(x_j)) = W^-(\varphi(x_{j+1})), j = 0, \dots, l-1$  が成立する。 $\varphi(g_r x)$  を通る測地線と  $W^-(\varphi(x_j))$  の交点  $g'_{-c \sum_{i=j+1}^l r_i} \varphi(g_r x)$  を順次たどることによって  $W^-(\varphi(x))$  上の点  $g'_{-cr} \varphi(g_r x)$  を得る。この点を用いて  $\hat{h}_x^r \varphi(x) = g'_{-cr} \varphi(g_r x)$  によって  $o(r)$  と  $\hat{h}_x^r$  を定義すればよい。

□

Lemma 3.2 から  $\varphi_r(x) = (g'_{-cr} \circ \varphi \circ g_r)(x) = \hat{h}_x^r \varphi(x)$  によって写像  $\varphi_r$  を定義する。この  $\varphi_r$  を用いて  $M$  上の測地流を  $M'$  上の測地流に移す同相写像を定義することができる。

### Lemma 3.3 連続写像

$$\varphi_\infty(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_r(x) \quad \text{for all } x \in M$$

は *well-defined* である。

**Outline of proof.**  $0 < r_0 < \tilde{r}$  なる  $r_0$  を固定し  $\varphi_{r_0}(x) = \hat{h}_x^{r_0} \varphi(x)$  を考えると、ある定数  $A$  が存在して任意の  $x \in M$  に対して  $d^-(\varphi(x), \hat{h}_x^{r_0} \varphi(x)) < A$  が成り立つようにできる。点

$x \in M$  を固定し、 $x_n = g_{nr_0} x$  によって  $M$  内の点列  $\{x_n\}$ 、 $x'_n = \varphi_{nr_0}(x) = \hat{h}_x^{nr_0} \varphi(x)$  によって  $M'$  内の点列  $\{x'_n\}$  を定める。 $\{x'_n\}$  の極限の存在と一意性を示せばよい。 $W^-(x_n)$  は  $\varphi$  によって  $W^-(\varphi(x_n))$  に移され、 $g'_{cr_0} W^-(\varphi(x_n)) = W^-(\varphi(x_{n+1}))$  が成立している。 $W^-(\varphi(x_n))$  上で  $\varphi(x_n)$  と  $\varphi_{r_0}(x_n)$  の距離は  $A$  で評価できることと  $h'$ -leaf は測地流に関して伸長的であることから、 $\varphi(x_n)$  を  $W^-(\varphi(x))$  上に測地流によってひきもどして得られる  $x'_n$  は Cauchy 列をなすことがわかる。 $\{x'_n\}$  の極限を  $x'_\infty$  とすると、任意の増加列  $\{r_n\}$  に対して  $\{\varphi_{r_n}(x)\}$  なる点列を考えても、同様にして  $x'_\infty$  に収束することがいえる。この議論は  $M$  上の任意の点に対して成り立つので  $\varphi_\infty$  は well-defined である。更に、定数  $A$  と  $h'$ -leaf の測地流に関する伸長性を評価する定数 (§2.1 (D) 参照) は点によらないことから  $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_r(x)$  は一様収束であることがわかる。従って、極限で定義される写像  $\varphi_\infty$  も連続である。

□

**Lemma 3.4** 写像  $\varphi_\infty$  は

$$\varphi_\infty \circ g_r(x) = g'_{cr} \circ \varphi_\infty(x) \quad \text{for all } x \in M$$

を満たす同相写像である。

**Outline of Proof.** 写像  $\varphi_\infty$  が  $M$  上の測地流を  $M'$  上の測地流に移すことは定義からすぐわかる。 $\varphi_\infty$  が 1対1であることは、 $\varphi_\infty$  が  $M$  上の測地流を  $M'$  上の測地流に移すことと、 $h$ -leaf の測地流に関する伸長性を考えあわせることによって得られる。定義の仕方と連続性により  $\varphi_\infty$  が全射であることもすぐにわかる。よって、 $\varphi_\infty^{-1}$  を定義することができる。この逆写像が連続であることはほとんど明らかである。

□

以上の Lemma 3.1-3.4 によって定理は証明されたことになる。

## 参考文献

- [Ab1] 阿部 隆次, ホロサイクルの剛性の幾何学的取り扱いについて, 力学系の構造と分岐, 数理解析研究所講究録 804 (1992), 107-120.
- [Ab2] R.Abe, *Geometric approach to rigidity of horocycles*, Preprint, 1991.
- [Ab3] R.Abe, *Semi-rigidity of horospheres*, Preprint, 1993.
- [An] D.V.Anosov, *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature*, Proc. Steklov Inst. of Math. #90(1967). (AMS translation,1969.)
- [EMS] Ya.G.Sinai (Ed.), *Dynamical Systems II*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer, 1989.
- [HP] M.W.Hirsch and C.C.Pugh, *Smoothness of horocycle foliations*, J. Diff. Geom. 10(1975), 225-238.
- [K] M.Kanai, *Tensorial ergodicity of geodesic flows*, Springer Lecture Notes in Math, no.1339 (1988), 142-157.
- [KN] S.Kobayashi and K.Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol.I, Interscience, New York, 1963.
- [O] J.P.Otal, *Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative*, Ann.Math. 131 (1990), 151-162.
- [R] M.Ratner, *Rigidity of horocycle flows*, Ann.Math. 115 (1982), 597-614.