数理解析研究所講究録
第 863 巻 1994 年 121-131

$SU(2,2)$ に付随する力学系

京大・工　岩井敏洋　　Iwai, Toshihiro

解ける力学系の例として、古くから、幾何学的な、あるいは、変換群論的な研究がなされているのは、調和振動子とケプラー問題である。この講演では、ケプラー問題の拡張の一つである MIC-ケプラー問題を取り扱う。変換群論的には、MIC-Kepler 問題は $SU(2,2)$ の作用に強く結びついている。この事実を利用して、MIC-Kepler 問題のエネルギー多様体、対称性群、等エネルギー軌道空間を論ずる。最後に、$\mathbf{R}^4-\{0\}$ で定義される Taub-NUT 計量とその拡張計量に付随する力学系を取り扱う。この計量に対する測地流は $T^*(\mathbf{R}^4-\{0\})$ 上のハミルトン系をなす。それを $U(1)$ 作用で簡約化してできる $T^*(\mathbf{R}^3-\{0\})$ 上の力学系は、ハミルトン関数が異なるにもかかわらず、MIC-ケプラー問題と同じ幾何学的構造をもつことを示す。

1　MIC-Kepler 問題の導入

MIC-kepler 問題 [1] は、$\mathbf{R}^3-\{0\}$ において、次の運動方程式で支配される力学系である。

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{B}-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}},$$

$$\boldsymbol{B}=-\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},\quad U(r)=-\frac{k}{r}+\frac{\mu^2}{2r^2}$$

ただし、$r=|\boldsymbol{r}|$ で、μ, k は実定数 $(k>0)$. $\mu=0$ のときが普通の Kepler 問題である。この系には 2 つの保存ベクトル

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}+\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r},\quad \boldsymbol{A}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{J}-k\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

が存在し、そのことから、解軌道が円錐曲線になることが結論できる。すなわち、$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{r}/r=\mu$ から、解軌道は円錐上にのっていることがわかり、また

$$\boldsymbol{N}=\mu\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{J}$$

とおくとき、$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{r}=\mu(|\boldsymbol{J}|^2-\mu^2)$ から、軌道は平面曲線をなすことがいえるから、結局解軌道は、円錐と平面との交線である円錐曲線であることがわかる。

ハミルトン力学系と考えて、MIC-Kepler 問題のエネルギー多様体は何か。エネルギー多様体上を流れるハミルトン流全体のなす軌道空間は何か。この問に答えるのに、2 つの keys がある。1 つは $\mathbf{R}^4-\{0\}\longrightarrow\mathbf{R}^3-\{0\}$ が $U(1)$ バンドルであること。もう 1 つは、$\mathbf{R}^4\times\mathbf{R}^4=\mathbf{C}^4$ への $SU(2,2)$ の作用である。

2 $T^*(\mathbf{R}^4-\{0\})$ の簡約化と MIC-Kepler 問題

$\pi:\mathbf{R}^4-\{0\}\to\mathbf{R}^3-\{0\}$ は構造群 $SO(2)\cong U(1)$ をもつ主バンドルである。$U(1)$ の作用は行列

$$T(t)=\begin{pmatrix} R(t) & 0 \\ 0 & R(t)\end{pmatrix},\quad R(t)=\begin{pmatrix}\cos t/2 & -\sin t/2 \\ \sin t/2 & \cos t/2\end{pmatrix}$$

を用いて

$$x\longmapsto T(t)x,\quad x\in\mathbf{R}^4$$

で定義される。このとき、底空間 $\mathbf{R}^3-\{0\}$ のデカルト座標を $(q_k), k=1,2,3$ とすれば、射影は π は

$$\begin{pmatrix} q_1\\ q_2\\ q_3\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_1 & x_2\\ x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1\\ x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4\\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$$

で与えられる。また、

$$r:=\sqrt{\sum_{k=1}^{3}q_k^2}=\sum_{j=1}^{4}x_j^2$$

に注意。

$U(1)$ の作用を、symplectic 作用として、$T^*(\mathbf{R}^4-\{0\})$ に持ち上げて

$$(x,y)\longmapsto(T(t)x,T(t)y),\quad (x,y)\in(\mathbf{R}^4-\{0\})\times\mathbf{R}^4$$

とし、これを用いて 標準的 symplectic 形式

$$d\theta=\sum_{j=1}^{4}dy_j\wedge dx_j,\quad \theta=\sum_{j=1}^{4}y_jdx_j$$

をもつ相空間 $T^*(\mathbf{R}^4-\{0\})$ を簡約化する。$U(1)$ に付随する運動量写像 $\Phi:T^*(\mathbf{R}^4-\{0\})\to\mathbf{R}$ は

$$\Phi(x,y)=\frac{1}{2}(-x_2y_1+x_1y_2-x_4y_3+x_3y_4)$$

で与えられる。$\mu\neq 0$ のとき、簡約化相空間 P_μ は

$$\pi_\mu:\Phi^{-1}(\mu)\longrightarrow P_\mu:=\Phi^{-1}(\mu)/U(1)$$

で定義され、$T^*(\mathbf{R}^3-\{0\})\cong(\mathbf{R}^3-\{0\})\times\mathbf{R}^3$ と同相になることが証明できる。実際、$(q,p)\in(\mathbf{R}^3-\{0\})\times\mathbf{R}^3$ は前述の q と

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \Phi/r \end{pmatrix} = \frac{1}{2r}\begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

で実現できる。今

$$\iota_\mu:\ \Phi^{-1}(\mu)\longrightarrow T^*(\mathbf{R}^4-\{0\})$$

を包含写像とするとき、簡約化 symplectic 形式 σ_μ は簡約化相空間上で

$$\pi_\mu^*\sigma_\mu=\iota_\mu^* d\theta$$

により定義される。具体的には、

$$\sigma_\mu=\sum_{k=1}^{3}dp_k\wedge dq_k-\frac{\mu}{r^3}(q_1dq_2\wedge dq_3+\text{cyclic})$$

と書ける。この第2項は $\boldsymbol{B}=-\mu\boldsymbol{r}/r^3$ に対応する。

MIC-Kepler 問題は symplectic 多様体 $(T^*(\mathbf{R}^4-\{0\},\sigma_\mu)$ 上で定義される力学系である。その Hamiltonian H_μ は $T^*(\mathbf{R}^4-\{0\})$ 上の Hamiltonian

$$H_c=\frac{1}{2}(\frac{1}{4r}\sum_{j=1}^{4}y_j^2)-\frac{k}{r}\quad(k>0,\text{const.})$$

を簡約化 $H_c\circ\iota_\mu=H_\mu\circ\pi_\mu$ して得られる [2]。

$$H_\mu=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}p_k^2+\frac{\mu^2}{2r^2}-\frac{k}{r}$$

この Hamiltonian に対し $i(X_{H_\mu})\sigma_\mu=-dH_\mu$ で Hamiltonian ベクトル場 X_{H_μ} を導けば、前節で与えた運動方程式が得られる。ただし、$i(\cdot)$ は内部積 (縮約) を表す。

3 $SU(2,2)$ に付随する運動量写像

$\mathbf{R}^4\times\mathbf{R}^4$ に複素変数を導入する。

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1+ix_2+x_3+ix_4 \\ z_2 &= -x_1-ix_2+x_3+ix_4 \\ z_3 &= y_1+iy_2+y_3+iy_4 \\ z_4 &= -y_1-iy_2+y_3+iy_4 \end{aligned}$$

さらに、変数変換を行って

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}) \\ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}) \end{array}$$

とする。このとき、$\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \cong \mathbf{C}^4$ 上の標準的 symplectic 形式は

$$d\theta = \frac{i}{2}\mathrm{tr}(Gdw \wedge dw^*), \quad G = \mathrm{diag}(1, 1, -1, -1)$$

と書ける。これをみて、

$$\Theta = \frac{i}{2}\mathrm{tr}(Gwdw^*)$$

を導入する。明らかに、$d\Theta = d\theta$. また、$U(1)$ 作用は

$$w \longmapsto e^{it/2}w$$

で表され、対応する運動量写像は

$$\Phi = \frac{1}{4}(|w_1|^2 + |w_2|^2 - |w_3|^2 - |w_4|^2)$$

と書ける。

$g \in SU(2,2)$ は $g^*Gg = I_4$, $\det g = 1$ をみたすから、$SU(2,2)$ は明らかに Θ を、したがって $d\Theta$ を不変に保つ。ただし、I_4 は 4×4 の単位行列である。この $SU(2,2)$ 作用に付随する運動量写像を求めるために、$SU(2,2)$ のリー代数 $su(2,2)$ について触れておかねばならない。定義により、すべての $t \in \mathbf{R}$ に対し $\exp it\xi \in SU(2,2)$ のとき、$i\xi \in su(2,2)$ である。さらに、$i\xi, i\eta \in su(2,2)$ に対して、

$$\gamma(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\xi^*\eta)$$

で内積を導入して、$su(2,2)$ とその双対空間 $su(2,2)^*$ とを同一視する。また、$\exp it\xi \in SU(2,2)$ の無限小変換を $i\xi_P$ $(P = \mathbf{C}^4)$ で表すと、Θ に対して

$$\Theta(i\xi_P) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}((Gww^*)^*\xi)$$

を得る。これより、運動量写像 $K\colon\ \mathbf{C}^4 \longrightarrow su(2,2)$ が

$$K(w) = Gww^* - \Phi I_4$$

の形にもとまる。$\mathrm{tr}(Gww^*) = 4\Phi$ に注意。

K は $SU(2,2)$ に対して同変 (equivariant), $U(1)$ に対して不変である。

$$K(gw) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}*}K(w), \quad K(e^{it/2}w) = K(w), \quad g \in SU(2,2)$$

さらに、定義から、Φ は $SU(2,2)$ 不変である。

$\Phi^{-1}(\mu)$, $\mu \neq 0$ には $SU(2,2)$ が推移的に作用することと、K の $SU(2,2)$ 同変性 とから、$K(\Phi^{-1}(\mu))$ が $SU(2,2)$ の余随伴軌道になることが証明できる。その軌道を、$\mathcal{O}_{K(w_0)}$ と書く。すると

$$\widetilde{K}_\mu \circ \pi_\mu = K \circ \iota_\mu$$

により $\widetilde{K}_\mu$ が定義できる。

$$\begin{tikzcd}
T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\}) & \Phi^{-1}(\mu) \arrow[l, "\iota_\mu"'] \arrow[d, "\pi_\mu"'] \arrow[dr, "K\circ\iota_\mu"] & \\
& \Phi^{-1}(\mu)/U(1) \arrow[r, "\widetilde{K}_\mu"'] & \mathcal{O}_{K(w_0)}
\end{tikzcd}$$

このとき、$\widetilde{K}_\mu$ は微分同相であることが証明できる。さらに、$\mathcal{O}_{K(w_0)}$ に KKS (Kirillov, Kostant, Souriau) 形式 ω を次式で定義する。

$$\omega_\nu(\xi_Q, \eta_Q) := -\frac{i}{2}\mathrm{tr}(\nu^*[\xi, \eta]), \quad \nu \in \mathcal{O}_{K(w_0)}$$

ただし、$i\xi_Q$ は $Q = su(2,2)$ における無限小変換であり、

$$i\xi_Q(\nu) = \left.\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{\exp(-it\xi)^*}\nu\right|_{t=0}$$

で定義される。このとき、$(K \circ \iota_\mu)^*\omega = \iota_\mu d\theta$ より

$$\widetilde{K}_\mu^*\omega = \sigma_\mu$$

が証明でき、$\widetilde{K}_\mu$ は symplectomorphic となる。

以後、上記の可換図式が基本になる。ここでは $\mu \neq 0$ としたが、$\mu = 0$ の場合、すなわち普通の Kepler 問題の場合については Kummer の仕事 [3,4,5] がある。

4 MIC-Kepler 問題と対称性群

MIC-Kepler 問題のエネルギー多様体 $H_\mu^{-1}(E)$ とその上に作用する対称性群を知るには、$H_c \circ \iota_\mu = H_\mu \circ \pi_\mu$ にさかのぼって、$H_c^{-1}(E)$ を知るのがよい。実際

$$H_\mu^{-1}(E) = H_c^{-1}(E) \cap \Phi^{-1}(\mu)/U(1)$$

だからである。ここで、$\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ 上の関数

$$
\begin{aligned}
A_\lambda &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} y_j^2 + \frac{\lambda^2}{2}\sum_{j=1}^{4} x_j^2 \\
R_\lambda &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} y_j^2 - \frac{\lambda^2}{2}\sum_{j=1}^{4} x_j^2 \\
F &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} y_j^2
\end{aligned}
$$

を導入する。ただし、$\lambda > 0$ はパラメータである。このとき、

$$
\begin{aligned}
&4r(H_c + \frac{\lambda^2}{8}) = A_\lambda - 4k \\
&4r(H_c - \frac{\lambda^2}{8}) = R_\lambda - 4k \\
&4rH_c = F - 4k
\end{aligned}
$$

が成り立つ。$r \neq 0$ であるから、この関係式から

$$
H_c^{-1}(E) = \begin{cases} A_\lambda^{-1}(4k) & E = -\lambda^2/8 < 0 \\ R_\lambda^{-1}(4k) & E = \lambda^2/8 > 0 \\ F^{-1}(4k) & E = 0 \end{cases}
$$

が成り立つ。したがって、エネルギー多様体 $H_\mu^{-1}(E)$ は

$$
H_\mu^{-1}(E) = \begin{cases} A_\lambda^{-1}(4k) \cap \Phi^{-1}(\mu)/U(1) & E = -\lambda^2/8 < 0 \\ R_\lambda^{-1}(4k) \cap \Phi^{-1}(\mu)/U(1) & E = \lambda^2/8 > 0 \\ F^{-1}(4k) \cap \Phi^{-1}(\mu)/U(1) & E = 0 \end{cases}
$$

で与えられる。これらの多様体は、位相的には E の符号だけに依存しているので、以下、E の符号によって議論が分かれる。特に、$\lambda = 1$ に固定しておくと、$E = 1/8,\ 0,\ -1/8$.

この節の残りの部分で、エネルギー多様体上に作用する対称性群を論ずる。ただし、ハミルトン流に由来する 1 パラメータ群は除いて考えたいので、まずハミルトン流についてみておく。H_μ が H_c の簡約化であるという事実から、H_μ のハミルトン流の性質が分かる。実際、$H_c^{-1}(E)$, $E = -\lambda^2/8, \lambda^2/8, 0$ 上で

$$
4rX_{H_c} = X_{A_\lambda},\ X_{R_\lambda},\ X_F
$$

が成り立つから、時間発展のパラメータの取り替えで、H_c のハミルトン流は、A_λ, R_λ, F のそれと同じとみなしてよく、したがって、H_μ のハミルトン流もそこからの射影で得ら

れる。それ故、H_μ のハミルトン流は、エネルギー多様体上に、$E<0, E>0, E=0$ に応じて、$U(1)$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ の作用をひきおこす。

さて、対称性群は、すでにみたエネルギー多様体の表示から分かるように、$E<0$, $E>0$, $E=0$ に応じて（$\lambda=1$ として）、A_1 と Φ, R_1 と Φ, F と Φ をそれぞれ不変に保たねばならない。したがって、対称性群はすべて $SU(2,2)$ の部分群として得られる。それらを G_-, G_+, G_0 とすれば、結果は以下の通りである。

(1) $E<0$ のとき、

$$\begin{aligned} G_- &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} ;\ A, B \in SU(2) \right\} \\ &\cong SU(2) \times SU(2) \end{aligned}$$

(2) $E>0$ のとき、

$$\begin{aligned} G_+ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} ;\ \begin{matrix} A^*A - B^*B = I_2, & A^*B + B^*A = 0 \\ \det(A+iB) = 1 & \end{matrix} \right\} \\ &\cong SL(2, \mathbf{C}) \end{aligned}$$

(3) $E=0$ のとき、

$$\begin{aligned} G_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A+2B \end{pmatrix} ;\ \begin{matrix} A^*A - B^*B = I_2, & \det(A+B) = 1 \\ A^*A + B^*(A+2B) = 0, & \operatorname{tr}(A+B)^{-1}B = 0 \end{matrix} \right\} \\ &\cong SU(2) \ltimes \mathbf{R}^3 \end{aligned}$$

定理 [6]:　MIC-Kepler 問題の対称性群は、$E<0$, $E=0$, $E>0$ に応じて、$SU(2,2)$ の部分群 $SU(2)\times SU(2)$, $SU(2)\ltimes\mathbf{R}^3$, $SL(2,\mathbf{C})$ で与えられ、それぞれのエネルギー多様体 $H_\mu^{-1}(E)$ に推移的に作用する。より正確には、$SU(2)\times SU(2)/\mathbf{Z}_2 \cong SO(4)$, $SU(2)\ltimes\mathbf{R}^3/\mathbf{Z}_2 \cong E(3)$, $SL(2,\mathbf{C})/\mathbf{Z}_2 \cong SO_0(1,3)$ が対称性群となる。

5　等エネルギー軌道空間

すでに述べたように、エネルギー多様体 $H_\mu^{-1}(E)$ の上にはハミルトン流 $T_t = \exp tX_{H_\mu}$ が 1 パラメータ群の作用を与えている。$H_\mu^{-1}(E)$ 上のハミルトン流の全体のなす空間 $H_\mu^{-1}(E)/T_t$ を等エネルギー軌道空間と呼ぶ。すると、前節の結果から明らかに、

$$H_\mu^{-1}(E)/T_t = \begin{cases} A_1^{-1}(4k) \cap \Phi^{-1}(\mu)/U(1) \times U(1) & E<0 \\ R_1^{-1}(4k) \cap \Phi^{-1}(\mu)/U(1) \times \mathbf{R} & E<0 \\ F^{-1}(4k) \cap \Phi^{-1}(\mu)/U(1) \times \mathbf{R} & E=0 \end{cases}$$

を得る。ここで、(A_1, Φ), (R_1, Φ), (F, Φ) をそれぞれ $U(1)\times U(1)$, $U(1)\times \mathbf{R}$, $U(1)\times \mathbf{R}$ の運動量写像とみなせば、等エネルギー軌道空間は、それらの群の作用による $T^*(\mathbf{R}^4-\{0\})$ の簡約化相空間とみなせる。そして、それらはすべて対称性群の余随伴軌道として実現できることが、第3節の可換図式と同様の考えで証明できる。

(1) $E<0$ のとき、K^- を G_- に付随する運動量写像とすると、

$$\begin{tikzcd}
T^*(\mathbf{R}^4-\{0\}) & A_1^{-1}(4k)\cap\Phi^{-1}(\mu) \arrow[l, "\iota_\mu^-"'] \arrow[d, "\pi_\mu^-"'] \arrow[dr, "K^-\circ\iota_\mu^-"] & \\
& A_1^{-1}(4k)\cap\Phi^{-1}(\mu)/U(1)\times U(1) \arrow[r, "\widetilde{K}_\mu^-"'] & \mathcal{O}^-\subset\mathcal{G}_-
\end{tikzcd}$$

(2) $E>0$ のとき、K^+ を G_+ に付随する運動量写像とすると、

$$\begin{tikzcd}
T^*(\mathbf{R}^4-\{0\}) & R_1^{-1}(4k)\cap\Phi^{-1}(\mu) \arrow[l, "\iota_\mu^+"'] \arrow[d, "\pi_\mu^+"'] \arrow[dr, "K^+\circ\iota_\mu^+"] & \\
& R_1^{-1}(4k)\cap\Phi^{-1}(\mu)/U(1)\times \mathbf{R} \arrow[r, "\widetilde{K}_\mu^+"'] & \mathcal{O}^+\subset\mathcal{G}_+
\end{tikzcd}$$

(3) $E=0$ のとき、K^0 を G_0 に付随する運動量写像とすると、

$$\begin{tikzcd}
T^*(\mathbf{R}^4-\{0\}) & F^{-1}(4k)\cap\Phi^{-1}(\mu) \arrow[l, "\iota_\mu^0"'] \arrow[d, "\pi_\mu^0"'] \arrow[dr, "K^0\circ\iota_\mu^0"] & \\
& F^{-1}(4k)\cap\Phi^{-1}(\mu)/U(1)\times \mathbf{R} \arrow[r, "\widetilde{K}_\mu^0"'] & \mathcal{O}^0\subset\mathcal{G}_0
\end{tikzcd}$$

ただし、$\mathcal{G}_-, \mathcal{G}_+, \mathcal{G}_0$ はそれぞれ G_-, G_+, G_0 のリー代数を表す。このとき、$\widetilde{K}_\mu^-$, $\widetilde{K}_\mu^+$, $\widetilde{K}_\mu^0$ はいずれも symplectomorphic あることが証明できる。ただし、$\mathcal{O}^-, \mathcal{O}^+, \mathcal{O}^0$ にはそれぞれ KKS 形式が定義されているものとする。

定理 [6]: 等エネルギー軌道多様体は、$E<0$, $E=0$, $E>0$ に応じて、$SU(2)\times SU(2)$, $SU(2)\ltimes\mathbf{R}^3$, $SL(2,\mathbf{C})$ の余随伴軌道として実現できる。

6 Taub-NUT 計量に付随する力学系

ここまで行ってきた MIC-Kepler 問題の議論をもっと広いクラスの力学系に対しても適用できる。ここでは、そのひとつの例として、Taub-NUT 計量に付随する力学系をとりあげる。$\mathbf{R}^4-\{0\}$ において

$$x_1+ix_2=\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\psi+\phi}{2}},\quad x_3+ix_4=\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\psi-\phi}{2}}$$

により、座標系 (r,θ,ϕ,ψ) を導入する。ただし、$r>0$, $0\le\theta\le\pi$, $0\le\phi\le 2\pi$, $0\le\psi\le 4\pi$. この座標系で

$$ds^2=f(r)(dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\phi^2))+g(r)(d\psi+\cos\theta\, d\phi)^2$$

で定義される計量を考える。この計量に対する測地流は $T^*(\mathbf{R}^4-\{0\})$ 上の力学系である。これを、第 2 節の方法で簡約化すると、$(T^*(\mathbf{R}^3-\{0\}),\sigma_\mu)$ 上の力学系で Hamiltonian

$$K_\mu=\frac{1}{2f(r)}\sum_{k=1}^{3}p_k^2+\frac{\mu^2}{2g(r)}$$

をもつものが得られる。回転対称性から、角運動量

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}+\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

が保存量であることが容易に証明できる。MIC-Kepler 問題のときのように

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J}-\kappa\frac{\boldsymbol{r}}{r},\quad \kappa=\text{const. of motion}$$

の形の保存量が存在すること (κ を単なる定数でなく、運動の定数としているところに注意) を要請すると、f, g, κ が次のように決まる [7] 。

$$f(r)=\frac{a+br}{r},\quad g(r)=\frac{(a+br)r}{1+cr+dr^2}$$

$$\kappa=aK_\mu-\frac{c\mu^2}{2}$$

ただし、a,b,c,d は定数である。このように定められた $f(r)$, $g(r)$ をもつ計量を拡張型 Taub-NUT 計量と呼ぶ。実際、$4m=a/b$ のときには、定数倍をのぞいて、

$$f(r)=1+\frac{4m}{r},\quad g(r)=\frac{(4m)^2}{1+4m/r}$$

をもつ Taub-NUT 計量に帰着するからである。Taub-NUT 計量に対しては、上記の $\boldsymbol{A}$ の形の保存量の存在することが知られていた [8,9] 。

拡張型 Taub-NUT 計量に付随する力学系 $(T^*(\mathbf{R}^3-\{0\}),\sigma_\mu,K_\mu)$ の Hamiltonian を具体的に書いておくと

$$K_\mu=\frac{r}{a+br}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}p_k^2+\frac{\mu^2}{2r^2}+\frac{c\mu^2}{2r}+\frac{d\mu^2}{2}\right)$$

特に、$a=0,b=1,c\mu^2/2=-k,d=0$ とすると、MIC-Kepler 問題の Hamiltonian となる。

ここで、第 1 節と同様

$$\boldsymbol{N}=\mu\boldsymbol{A}+\kappa\boldsymbol{J}$$

とおくと、やはり、

$$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{r}=\mu(|\boldsymbol{J}|^2-\mu^2)$$

が成り立ち、$\mathbf{R}^3-\{0\}$ 内で運動方程式の解軌道は円錐曲線となる。

もし、

$$\kappa = aK_\mu - \frac{c\mu^2}{2} = k > 0$$

をみたすように、保存量 $K_\mu = \text{const.}$ の値を選べば、$\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{A}$ は MIC-Kepler 問題のものと一致する。したがって、解軌道も、パラメターの取り方を除いて、MIC-Kepler 問題のものと一致する。さらに、Hamiltonian K_μ を書き直した式

$$bK_\mu - \frac{d\mu^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} p_k^2 + \frac{\mu^2}{2r^2} - (aK_\mu - \frac{c\mu^2}{2})\frac{1}{r}$$

により、エネルギー多様体も

$$H_\mu = bK_\mu - d\mu^2/2 = E = \text{const.}$$

のものと一致する。こうして、拡張型 Taub-NUT 計量に付随する力学系 $(T^*(\mathbf{R}^3-\{0\}), \sigma_\mu, K_\mu)$ は、エネルギー多様体、等エネルギー軌道空間について、MIC-ケプラー問題と同じ構造をもつことが分かる。　特に、$bK_\mu - d\mu^2/2$ の、負、正、零に応じて、解曲線は、楕円、双曲線、放物線となる。

参考文献

[1] H.V. McIntosh and A. Cisneros, Degeneracy in the presence of a magnetic monopole, J. Math. Phys. **11**, 896-916 (1970).

[2] T. Iwai and Y. Uwano, The four-dimensional conformal Kepler problem reduces to the three-dimensional Kepler problem with a centrifugal potential and Dirac's monopole field. Classical theory, J. Math. Phys. **27**, 1523-1529 (1986).

[3] M. Kummer, On the regularization of the Kepler problem, Commun. Math. Phys. **84**, 133-152 (1982).

[4] M. Kummer, On the three-dimensional lunar problem and the perturbation problems of the Kepler problem, Math. Anal. Appl. **93**, 142-194 (1983).

[5] M. Kummer, A group theoretical approach to a certain class of perturbations of the Kepler problem, Arch. Rat. Math. Anal. **91**, 55-82 (1985).

[6] T. Iwai, A dynamical group $SU(2,2)$ and its use in the MIC-Kepler problem, J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 609-630 (1993).

[7] T. Iwai and N. Katayama, On the extened Taub-NUT metrics, J. Geom. Phys. **12**, 55-75 (1993).

[8] G.W. Gibbons and N.S. Manton, Classical and quantum dynamics of BPS monopoles, Nucl. Phys. B **274**, 183-224 (1986).

[9] B. Cordani, Gy. Fehér and P.A. Horváthy, Kepler-type symmetries of long-range monopole interactions, J. Math. Phys. **31**, 202-211 (1989).