

或る 1-1 共鳴振動子の摂動系の Maslov 量子化条件

京都大学工学部 上野 嘉夫 (Yoshio Uwano)

1. はじめに

非線形力学系に対する量子論の研究には、系のハミルトニアンの Birkhoff-Gustavson 標準形への変換が有効に用いられてきた。標準形に変換されたハミルトニアンに半古典的量子化の手法を適用して、数々の力学系の量子論が研究されてきた。Hénon-Heiles 系 ([1])、磁場中の水素原子 ([2])、広義 van der Waals ポテンシャル ([3]) 中の水素原子などがその例である。これらは、扱う系がカオスの振る舞いを示す事実を視野にいたした研究 (量子カオス) である。

一方、量子カオス以外の視点からの研究も行われている。例えば、Hénon-Heiles 系の Birkhoff-Gustavson 標準形近似における周期軌道分岐の量子論的対応物として、エネルギー準位の縮退、および固有関数分岐が見いだされている ([4])。この結果から、古典系における周期軌道分岐と、対応する量子系のエネルギー準位縮退との間に何らかの関係の存在が期待される。本報告では、ハミルトニアンが Birkhoff-Gustavson 標準形となる 1:1 共鳴振動子の摂動系における周期軌道分岐とエネルギー準位縮退の関係を、Maslov 量子化の観点から論じる。以下、本報告で用いられる微分幾何的枠組みのあらましを説明する。

シンプレクティック多様体、 $(\mathbf{R}^4, d\theta_0)$ を考える。 θ_0 は正準 1 形式で、デカルト座標 $(q, p) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \cong \mathbf{R}^4$ により

$$\theta_0 = p_1 dq_1 + p_2 dq_2, \tag{1}$$

と書かれる。本報告で扱うハミルトン関数は $(\mathbf{R}^4, d\theta_0)$ 上の関数で、

$$H_\alpha = J + \alpha_1 J L_3 + \frac{\alpha_2}{2} L_2^2 \quad (\alpha_1 > 0, \alpha_2 \geq 0) \tag{2a}$$

により与えられる。ただし、

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (p_j^2 + q_j^2), & L_1 &= q_1 q_2 + p_1 p_2, \\ L_2 &= q_1 p_2 - q_2 p_1, & L_3 &= \frac{1}{2} (p_1^2 + q_1^2) - \frac{1}{2} (p_2^2 + q_2^2), \end{aligned} \tag{2b}$$

とする。 H_α に含まれる α はパラメータである。ハミルトニアン H_α は $\alpha = 0$ のとき $H_0 = J$ になるので、ハミルトン系 $(\mathbf{R}^4, d\theta_0, H_\alpha)$ は、1:1 共鳴振動子の摂動系と見なせる。さらに、 (L_j) ($j = 1, 2, 3$) と J とが可換なので、 H_α 自体が Birkhoff-Gustavson 標準形である。ハミルトニアン H_α は、文献[6]で与えられた Robnik による標準形の表示において、パラメータを $g_{20} = -g_{02} = \alpha_1$, $g_{11} = -2\gamma_3 = \alpha_2$, and as $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ とおいて得られる。Lakshmanan-Hasegawa ([7]) では、Robnik の表示におけるある種の‘楕円型’ハミルトニアンに対する半古典計算が行われている。

第2節では、パラメータ α の変化によって生じる、摂動振動子系の周期軌道分岐を $U(1)$ 簡約化法を用いて調べる。その結果、半直線、 $\{\alpha_1 = \alpha_2 \mid \alpha_1 > 0, \alpha_2 \geq 0\}$ 、が分岐集合として得られる。 $U(1)$ 簡約化法は、第4、5節における Maslov 量子化条件の解析にも利用される。

第3節以降では、摂動振動子系の量子論を扱う。周期軌道分岐とエネルギー準位縮退との関係を見いだすには、パラメータ α の変化に対するエネルギー固有値の挙動を知る必要がある。そのため、第3節では、摂動振動子系の固有値問題を数値的に解く。多数の数値計算結果から、固有値の挙動に以下の特徴が見いだされる。(1) ある特定の値より大きい固有値は、すべて2重縮退している。(2) すべての固有値縮退は、パラメータ α が $\alpha_1 < \alpha_2$ を満たす場合でのみ生じる。(3) α_1 を任意に固定した場合 ($\alpha_1 > 0$)、 α_2 が増大する過程で発生した固有値の縮退は、 α_2 がさらに増加しても解消しない。固有値がなぜこのように振る舞うのか? という問いに対し、第4、5節では Maslov 量子化の視点から答える。

第4節では、摂動振動子系の Maslov 量子化の準備をする。この節は、大きく2部に分かれる。前半部では、摂動振動子系の不変ラグランジュ部分多様体を調べる。摂動振動子系の完全可積分性により、すべての不変ラグランジュ部分多様体は H_α と J ((2) 参照) とのレベル多様体、

$$M_{h,E} = \{(p, q) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \mid J(p, q) = h, H_\alpha(p, q) = h + h^2 E\}, \quad (3)$$

として実現される。 $M_{h,E}$ は、トーラス1個 (T^2) かあるいは、2個のトーラスの直和 ($T^2 + T^2$) のいずれかに同相になる。後半部では、不変ラグランジュ部分多様体の1次元サイクルの生成元を見いだす。生成元は、 $U(1)$ ファイバー束の言葉で記述される。

第5節では、摂動振動子系の Maslov 量子化条件を、第4節で得た生成元の幾何学的表現を用いて求める。量子化条件は楕円積分を用いて表現されることが示されるが、表現が極めて複雑なため、量子化されたエネルギーを陽に求めることは不可能と思われる。

しかし、量子化条件の定性的評価は可能である。実際、幾何学的枠組みの中で量子化条件を評価することで、第3節で得た固有値の特徴的な挙動(1)～(3)が確かに生じることが Maslov 量子化条件から確認できる。

2. 摂動振動子系における分岐

この節では、摂動振動子系における分岐を復習する。摂動振動子系の分岐の研究には、 $U(1)$ 簡約化法が有効に用いられる。 $U(1)$ 簡約化法を効果的に用いるため複素変数 z を

$$z_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j - ip_j) \quad (j = 1, 2), \quad (4)$$

によって導入し、 \mathbf{R}^4 を \mathbf{C}^2 と同一視する。変数 z を用いると、シンプレクティック 2 形式 $d\theta_0$ は、

$$d\theta_0 = d \left[\frac{1}{2i} (\bar{z}^T dz - z^T d\bar{z}) \right], \quad (5)$$

と表される (添字 T は転置を、 $\bar{}$ は複素共役を表す)。 \mathbf{C}^2 上の $U(1)$ 作用 Φ_t を

$$\Phi_t : z \longrightarrow \exp(it)z \quad (z \in \mathbf{C}^2, t \in [0, 2\pi]), \quad (6)$$

で与えると、 Φ_t は明らかに $(\mathbf{C}^2, d\theta_0)$ 上のシンプレクティック作用となっている。したがって、シンプレクティック多様体 $(\mathbf{C}^2, d\theta_0)$ は、 $U(1)$ 作用 (6) により、図式 (7) に従って ([4,5,8,9]) シンプレクティック多様体 $(S^2(h), \omega_h)$ に簡約化される。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^2 & \xleftarrow{i_h} & J^{-1}(h) \quad (h > 0) \\ & & \pi_h \downarrow \\ & & S^2(h) \cong J^{-1}(h)/U(1) \end{array} \quad (7)$$

図式 (7) においては、(2) で定義された J を $U(1)$ 作用 Φ_t に随伴したモーメント写像とみなしている。 $S^2(h)$ は半径 $h > 0$ の 2 次元球面をあらわし、射影 π_h は Hopf 写像によって実現される。Hopf 写像の定義は、 $z \in J^{-1}(h)$ に対し、

$$\pi_h(z) = (2\Re z_1 \bar{z}_2, 2\Im z_1 \bar{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2) \in S^2(h) \subset \mathbf{R}^3, \quad (8)$$

である。 i_h は、包含写像である。簡約シンプレクティック 2 形式 ω_h は、

$$i_h^* d\theta_0 = \pi_h^* \omega_h, \quad (9a)$$

より、 $S^2(h)$ の標準的極座標 (θ, ϕ) を用いると

$$\omega_h = -\frac{h}{2} \sin \theta d\theta \wedge d\phi = \left(-\frac{1}{2h}\right) \times (\text{the standard area element of } S^2(h)) \quad (9b)$$

なる形で得られる。図式 (7) から明らかであるが、レベル多様体 $J^{-1}(h)$ は $U(1)$ ファイバー束、 $\pi_h: J^{-1}(h) \rightarrow S^2(h)$ 、の構造を持っていることを注意しておく。

さて、摂動振動子系のハミルトニアン H_α は $U(1)$ 不変だから、 H_α は

$$H_\alpha \circ i_h = H_{\alpha,h}^{red} \circ \pi_h, \quad (10a)$$

を経て簡約ハミルトニアン

$$H_{\alpha,h}^{red} = h + \alpha_1 h^2 \cos \theta + \frac{\alpha_2}{2} h^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \quad (10b)$$

に帰着する。こうして、摂動振動子系から 1 自由度ハミルトン系 $(S^2(h), \omega_h, H_{\alpha,h}^{red})$ への $U(1)$ 作用による簡約化が完成する。摂動振動子系の周期軌道分岐を調べるには、次の事実が重要である。

FACT 2.1^{8,9)}. 簡約ハミルトニアン $H_{\alpha,h}^{red}$ のすべての臨界点には、それぞれ一意に $J^{-1}(h)$ 上を流れる摂動振動子系の周期軌道が対応する。逆にこの周期軌道は、 π_h により考えている臨界点に射影される。

Fact 2.1 において許容される周期軌道の分岐問題は、したがって、簡約ハミルトニアン $H_{\alpha,h}^{red}$ の臨界点の分岐問題に帰着し次の命題を得る。

PROPOSITION 2.2. 簡約ハミルトニアン $H_{\alpha,h}^{red}$ の臨界点は、 $\alpha_1 - \alpha_2$ の符号に応じて以下のように分類される。

$$\begin{cases} \alpha_1 > \alpha_2 & \Rightarrow \text{楕円型臨界点 2 個,} \\ \alpha_1 = \alpha_2 & \Rightarrow \text{楕円型臨界点 1 個と退化臨界点 1 個,} \\ \alpha_1 < \alpha_2 & \Rightarrow \text{楕円型臨界点 3 個と双曲型臨界点 1 個.} \end{cases}$$

Prop.2.2 よりただちに、パラメータ空間、 $\{\alpha \in \mathbf{R}^2 \mid \alpha_1 > 0, \alpha_2 \geq 0\}$ 、内の半直線

$$\{\alpha_1 = \alpha_2 \mid \alpha_1 > 0, \alpha_2 \geq 0\},$$

を分岐集合として得る。

3. 摂動振動子系の固有値 (数値計算結果)

本節では、摂動振動子系の量子化を固有値が数値的に計算可能な形で考える。そのために、ハミルトン演算子 \hat{H}_α を古典論のハミルトニアン H_α から以下の手続きで導出する。Schrödinger の量子化手順 ($p_j \rightarrow (-i\hbar)\partial/\partial q_j$, $\hbar = \text{Plank 定数}/2\pi$) により、(4) で導入した複素変数 z_j は調和振動子の生成演算子 a_j^\dagger に量子化される。 z_j の複素共役 \bar{z}_j は消滅演算子 a_j に量子化される。摂動振動子系のハミルトニアン H_α が非可換なオブザーバブルの積を含んでいないので ((2) 参照)、非可換オブザーバブルの順序問題の困難を避けられる。ゆえに量子化された作用素として

$$\hat{H}_\alpha = \hat{J} + \alpha_1 \hat{J} \hat{L}_3 + \frac{\alpha_2}{2} \hat{L}_2^2, \quad (11)$$

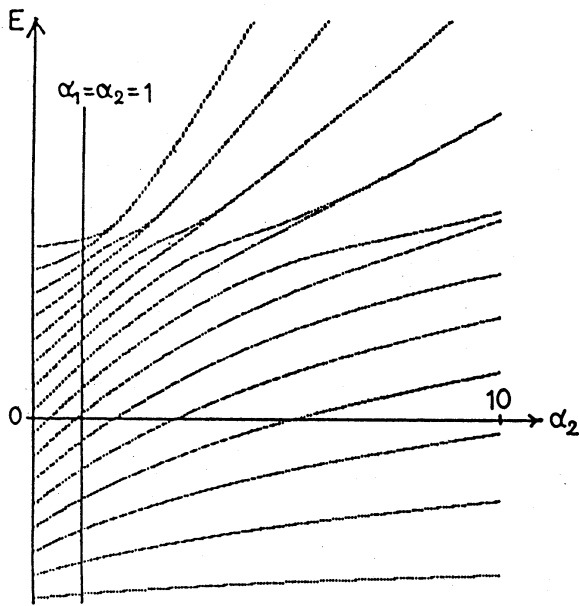
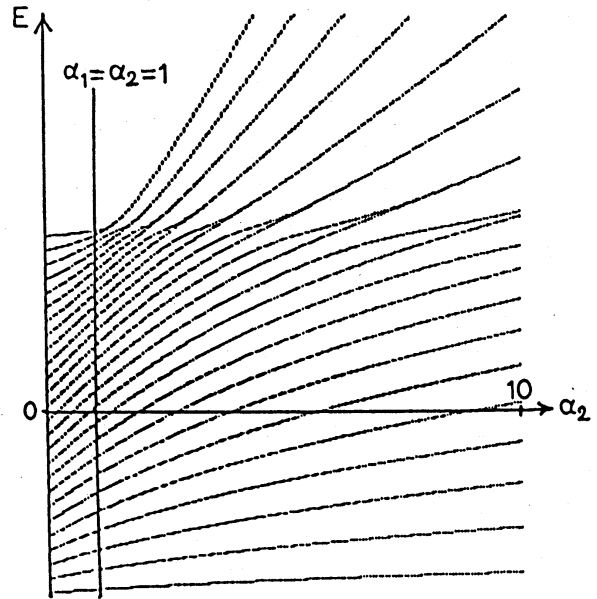
を得る。ただし、オブザーバブル J 、 L_2 、 L_3 は、

$$\begin{aligned} \hat{J} &= a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + \hbar \\ \hat{L}_2 &= (-i) (a_1^\dagger a_2 - a_1 a_2^\dagger) \\ \hat{L}_3 &= a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2, \end{aligned} \quad (12)$$

に量子化される。ハミルトン作用素 \hat{H}_α は、Robnik の方法 ([6]) から得られるハミルトン作用素と定数差を除いて一致する。

上で得たハミルトン作用素 \hat{H}_α の固有値を、文献[4]と同様の方法で計算する。 \hat{H}_α と \hat{J} との可換性、 $[\hat{H}_\alpha, J] = 0$ 、により作用素 \hat{H}_α は \hat{J} の各固有空間 V_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) に作用することがわかる。ただし、 V_n は調和振動子基底 $|j \ n - j\rangle$ ($j = 0, 1, \dots, n$) により張られる空間である。したがって、 \hat{H}_α の固有値問題を各 $n+1$ 次元部分空間 V_n に制限できて、 $\hat{H}_\alpha |k \ n - k\rangle = \sum_{j=0}^{j=n} A_{jk}^{(n)}(\alpha) |j \ n - j\rangle$, ($k = 0, 1, \dots, n$). により V_n 上での \hat{H}_α の作用を $(n+1)$ 次エルミート行列 $A^{(n)}(\alpha) = (A_{jk}^{(n)}(\alpha))$ の形に表現できる。こうして、 \hat{H}_α の固有値問題は、一連のエルミート行列 $A^{(n)}(\alpha)$ の固有値問題に帰着される。ヤコビ法 ([11]) による $A^{(n)}(\alpha)$ の固有値の数値計算結果の例を次ページの Figure 1 に示す。 α_1 を 1 に固定し α_2 を 0 から 10 まで動かして、 V_{15} 、 V_{25} に制限した \hat{H}_α の固有値を数値計算しプロットしたのが Fig.1a (V_{15}) と Fig.1b (V_{25}) である。縦軸は規格化されたスケールに基づく固有値、 $([\hat{H}_\alpha - (n+1)\hbar]/\{(n+1)\hbar\}^2)$ (Fig.1a: $n = 15$, Fig.1b: $n = 25$)、をあらわし、横軸には α_2 をとる。

数値計算結果から、固有値のパラメータ α の変化にたいする挙動に次の特徴を見いだす。

Figure 1a. $n = 15$ (V_{15}).Figure 1b. $n = 25$ (V_{25}).Figure 1. $[\hat{H}_\alpha - \hbar(n+1)]/\{\hbar(n+1)\}^2$ の固有値

OBSERVATIONS.

- (1) ある値より大きい固有値はすべて2重縮退している。
- (2) 縮退はすべて、 α が不等式 $\alpha_1 < \alpha_2$ を満たすときに生じている。
- (3) α_1 が固定されている場合には、 α_2 がある値をとったとき縮退が生じたならその縮退は、 α_2 がその値から増加しても解消しない。

以下の節では、数値計算結果から得られるこれらの Observations が、正しいことを Maslov 量子化の観点から確認する。

4. 摂動振動子系の不変ラグランジュ部分多様体

第4節、5節では、摂動振動子系の Maslov 量子化を行う。第4節ではその準備として、摂動振動子系の不変ラグランジュ部分多様体を調べる。不変ラグランジュ部分多様体が Maslov 量子化されることで、可能なすべての(束縛状態に対応する)エネルギー準

位が与えられる。第1節でも述べたように本節前半部では摂動系のすべての不変ラグランジュ部分多様体を求めそのトポロジーを調べる。不変ラグランジュ部分多様体は(3)式で定義されるレベル多様体 $M_{h,E}$ として実現され、その連結成分はどれも2次元トーラス T^2 と同相になることが示される。後半部では、各連結成分 ($\cong T^2$) の1次元サイクルの生成元を求める。第2節で指摘したように、本節では $U(1)$ 束構造、 $\pi_h : J^{-1}(h) \rightarrow S^2(h)$ 、が活用される。

摂動振動子系のハミルトニアン H_α と調和振動子系のハミルトニアン J とが可換なので、摂動振動子系は完全可積分系である。完全可積分性から、次の Lemma が得られる ([12] 参照)。

LEMMA 4.1. 摂動振動子系の不変ラグランジュ部分多様体はすべて、(3)式で定義されるレベル多様体 $M_{h,E}$ として実現される。

REMARK: レベル集合 $M_{h,E}$ が部分多様体になるための条件は、2形式 $dJ \wedge dH_\alpha$ が $M_{h,E}$ が消えないことである。

実際、シンプレクティック2形式 $d\theta_0$ がその上で消えるので $M_{h,E}$ は不変ラグランジュ部分多様体である。さらに、 $M_{h,E}$ は摂動振動子系のハミルトンベクトル場 X_{H_α} が生成する作用で不変である。以上より、 $M_{h,E}$ は‘不変’ラグランジュ部分多様体と呼ばれるのである。

$M_{h,E}$ のトポロジーを調べる。 $J^{-1}(h)$ の $U(1)$ 束構造 ((7) 参照) が以下の議論の鍵となる。簡約ハミルトニアン $H_{\alpha,h}^{red}$ の定義式 (10a) より、

$$\pi_h(M_{h,E}) = \{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2 E\}, \quad (13)$$

が成立する。ここに、 $\{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2 E\} (\subset S^2(h))$ は簡約ハミルトニアン $H_{\alpha,h}^{red}$ のレベル曲線をあらわす。また、 J と H_α の $U(1)$ 不変性から $M_{h,E}$ の $U(1)$ 不変性が導かれるので、(13) 式とファイバー束理論 ([10]) とにより

$$M_{h,E} = \pi_h^{-1}(\pi_h(M_{h,E})) = \pi_h^{-1}(\{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2 E\}). \quad (14)$$

も成立する。 $U(1)$ 束 $J^{-1} \rightarrow S^2(h)$ の局所自明性を (14) 式に適用することで、 $M_{h,E}$ が $U(1)$ と $\pi_h(M_{h,E})$ との直積と同相であることが示される。以上をまとめるて次を得る。

LEMMA 4.2. (3) 式で定義されるレベル集合 $M_{h,E}$ は、位相同型関係

$$M_{h,E} = \pi_h^{-1} (\{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2 E\}) \cong S^1 \times \{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2 E\}, \quad (15)$$

を満たす。ここに、 S^1 はリー群 $U(1)$ と同相な円周をあらわす。

Lemma 4.2 によって、不変ラグランジュ部分多様体 $M_{h,E}$ のトポロジーを調べることは、簡約ハミルトニアン $H_{\alpha,h}^{red}$ のレベル曲線 $\{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2 E\}$ のトポロジーを調べることになる。レベル曲線のトポロジーは次のとおり ([5])。

LEMMA 4.3. 空でないレベル曲線 $\{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2 E\}$ のトポロジーは、以下のように分類される。

$\alpha_1 \geq \alpha_2$ のとき、

$$\{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2 E\} \cong \begin{cases} 1 \text{ 点} & \text{if } E = \pm\alpha_1, \\ S^1 & \text{if } -\alpha_1 < E < \alpha_1. \end{cases} \quad (16a)$$

$\alpha_1 < \alpha_2$ のとき、

$$\{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2 E\} \cong \begin{cases} 1 \text{ 点} & \text{if } E = -\alpha_1, \\ S^1 & \text{if } -\alpha_1 < E < \alpha_1, \\ S^1 \vee S^1 & \text{if } E = \alpha_1, \\ S^1 + S^1 & \text{if } \alpha_1 < E < (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)/2\alpha_2 \\ 2 \text{ 点} & \text{if } E = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)/2\alpha_2. \end{cases} \quad (16b)$$

記号 \vee と $+$ はそれぞれ、1 点合併と直和をあらわす。 $S^1 \vee S^1$ は、‘ボウタイ’ 状の図形である。

Lemma 4.2 と Lemma 4.3 とから、レベル集合 $M_{h,E}$ のトポロジーの分類を得る ([5])。

PROPOSITION 4.4. 空でないレベル集合 $M_{h,E}$ のトポロジーは以下のように分類される。

$\alpha_1 \geq \alpha_2$ のとき、

$$M_{h,E} \cong \begin{cases} S^1 & \text{if } E = \pm\alpha_1, \\ T^2 & \text{if } -\alpha_1 < E < \alpha_1. \end{cases} \quad (17a)$$

$\alpha_1 < \alpha_2$ のとき、

$$M_{h,E} \cong \begin{cases} S^1 & \text{if } E = -\alpha_1, \\ T^2 & \text{if } -\alpha_1 < E < \alpha_1, \\ S^1 \times (S^1 \vee S^1) & \text{if } E = \alpha_1, \\ T^2 + T^2 & \text{if } \alpha_1 < E < (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)/2\alpha_2, \\ S^1 + S^1 & \text{if } E = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)/2\alpha_2. \end{cases} \quad (17b)$$

T^2 は2次元トーラス ($\cong S^1 \times S^1$) をあらわす。

REMARK: $\alpha_1 < \alpha_2$ の下で $E = \alpha_1$ となる場合、 M_{h,α_1} は特異点を持つので部分多様体ではない。しかし、 M_{h,α_1} もやはり不変ラグランジュ‘多様体’と呼ぶことにする。 M_{h,α_1} は、第5節における量子化条件の評価で重要な役割を担う。

次に、 $M_{h,E}$ の1次元サイクルの生成元を、 $U(1)$ 束の局所自明性 ([10]) を利用して求める。まず最初に、 $S^2(h)$ に外向き法線を正とする向きを指定する。これに基づき、 $S^2(h)$ 上の単純閉曲線に外側からみて反時計回りの向きを与える。簡約ハミルトニアンレベル曲線 $\{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2 E\}$ も同様に向きづする。Lemma 4.3より、レベル曲線にエネルギー値 E の大きさに応じて名前を与えておくと便利である。

DEFINITION 4.5. 簡約ハミルトニアンのレベル曲線 $\{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2 E\}$ を以下の記号であらわす。

$\alpha_1 \geq \alpha_2$ のとき、

$$\{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2 E\} = \gamma_{h,E}. \quad (18a)$$

$\alpha_1 < \alpha_2$ のとき、

$$\{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2 E\} = \begin{cases} \gamma_{h,E} & \text{if } -\alpha_1 < E < \alpha_1, \\ C_h^{(1)} \cup C_h^{(2)} & \text{if } E = \alpha_1, \\ \Gamma_{h,E}^{(1)} + \Gamma_{h,E}^{(2)} & \text{if } \alpha_1 < E < (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)/2\alpha_2. \end{cases} \quad (18b)$$

$\Gamma_{h,E}^{(1)}$ と $\Gamma_{h,E}^{(2)}$ とは、レベル曲線 $\{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2 E\}$ の一部分で、それぞれ $y_2 \geq 0$ と $y_2 \leq 0$ とに属している ((y_j) : \mathbf{R}^3 のデカルト座標)。 $C_h^{(j)}$ も同様にして定まる。ただし、 $\Gamma_{h,E}^{(j)}$ とは異なり、共通集合 $C_h^{(1)} \cap C_h^{(2)} = (0, 0, h)$ が存在する。

$\gamma_{h,E}$ 、 $C_h^{(j)}$ 、 $\Gamma_{h,E}^{(j)}$ はすべて S^1 と同相であるから、それらの π_h による逆像は2次元トーラス $T^2 \cong S^1 \times S^1$ と同相である。これらのトーラスはまさに $M_{h,E}$ の連結成分のことである ($E = \alpha_1$ の場合には、この記述は正確とはいえないが他の場合と同じように呼ぶことにする)。以後、簡単のためこれらのトーラスを不変トーラスと呼ぶこともある。

1次元サイクルの生成元を見いだす作業にかかろう。その鍵は位相同型 $M_{h,E} \cong S^1 \times \pi_h(M_{h,E})$ である。この同型は、(13)と(15)とから明かである。この位相同型から、第1の生成元は直積の第1因子 S^1 によって実現されることがわかる。

LEMMA 4.6. 第1生成元は、レベル曲線の1点 m の π_h による逆像にとして実現される。すなわち、

$\alpha_1 \geq \alpha_2$ のとき

$$g_1 = \pi_h^{-1}(m) \quad (m \in \gamma_{h,E}) \quad (19a)$$

$\alpha_1 < \alpha_2$ のとき

$$\begin{cases} g_1 = \pi_h^{-1}(m) & (m \in \gamma_{h,E}) & \text{if } -\alpha_1 < E < \alpha_1, \\ g_1^{(j)} = \pi^{-1}(m) & (m \in C_h^{(j)} \quad (j=1,2)) & \text{if } E = \alpha_1, \\ g_1^{(j)} = \pi^{-1}(m) & (m \in \Gamma_{h,E}^{(j)} \quad (j=1,2)) & \text{if } \alpha_1 < E < (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)/2\alpha_2. \end{cases} \quad (19b)$$

REMARK: 点 m はそれが、Def.4.5 で与えられたレベル曲線上の一点である限り任意に選んでよい。

次に、第2生成元を求める。Lemma 4.2 より、第2生成元はレベル曲線 $\{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2E\}$ の連結成分の $M_{h,E}$ への‘持ち上げ’により実現される。この持ち上げが生成元になるためには、持ち上げが Lemma 4.6 で得た第1生成元に対し横断的でなければならない。このような持ち上げを構成するために、位相同型 (15) を $U(1)$ 束 $J^{-1}(h) \rightarrow S^2(h)$ の局所断面 ([10]) を用いて書き直す。ここで用いる局所断面とは、 $U = \{y \in S^2(h) \mid y_3 \neq -1\}$ から $\pi_h^{-1}(U)$ への写像で

$$\sigma_h(y) = \left(\sqrt{\frac{1+y_3}{2}}, \frac{y_1 - iy_2}{\sqrt{2(1+y_3)}} \right)$$

によって定義されている。 σ_h を用いると、局所自明性 $\pi_h^{-1}(U) \cong U \times S^1$ から位相同型 (15) は、

$$M_{h,E} \cong S^1 \times \{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2E\} \cong S^1 \times \sigma_h(\{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2E\}). \quad (20)$$

と書き換えられる。こうして、レベル曲線 $\{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2E\}$ は $M_{h,E}$ 上へ $\sigma_h(\{H_{\alpha,h}^{red} = h + h^2E\})$ の形で持ち上げられる。この持ち上げは、明らかに第1生成元 ($\cong S^1$) に横断的である。以上をまとめて次を得る。

LEMMA 4.7. 第2生成元は、以下の形で実現される。

$\alpha_1 \geq \alpha_2$ のとき

$$g_2 = \sigma_h(\gamma_{h,E}), \quad (21a)$$

$\alpha_1 < \alpha_2$ のとき

$$\begin{cases} g_2 = \sigma_h(\gamma_{h,E}) & \text{if } -\alpha_1 < E < \alpha_1, \\ g_2^{(j)} = \sigma_h(C_h^{(j)}) \quad (j=1,2) & \text{if } E = \alpha_1, \\ g_2^{(j)} = \sigma_h(\Gamma_{h,E}^{(j)}) \quad (j=1,2) & \text{if } \alpha_1 < E < (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)/2\alpha_2. \end{cases} \quad (21b)$$

5. Maslov 量子化条件

本節では、第4節での準備の下で摂動振動子系の Maslov 量子化条件を導出する。まず、Maslov 量子化条件とは何か復習しておこう。不変ラグランジュ部分多様体 $M_{h,E}$ の連結成分 (不変トーラス) が Maslov 量子化されるのは、整数条件

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \oint_c pdq - \frac{1}{4} \mathcal{M}(c) \in \mathbf{Z} \quad (22)$$

が不変トーラスの任意のサイクル c に対して成立するときである。ここに、 \mathbf{Z} は整数の集合をあらわす。(22) 式左辺第1項は作用積分、第2項は Maslov 指数と呼ばれる。

Maslov 指数は、摂動振動子系の完全可積分性から以下のように計算される ([5,13,14])。複素数値行列 M を

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial \bar{z}_1} & \frac{\partial H_\alpha}{\partial \bar{z}_1} \\ \frac{\partial J}{\partial \bar{z}_2} & \frac{\partial H_\alpha}{\partial \bar{z}_2} \end{pmatrix} \quad (23a)$$

によって定義し、その行列式の偏角 $\text{Arg}(\det(M))$ を考える。Maslov 形式 μ を、 \mathbf{R}^4 上の1形式

$$\mu = \frac{1}{\pi} d[\text{Arg}(\det(M))] \quad (23b)$$

として定義すると、サイクル c に対する Maslov 指数は c に沿った μ の積分

$$\mathcal{M}(c) = \oint_c \mu \quad (23c)$$

によって与えられる。第4節で求めた生成元に対しては、Maslov 指数は

$$\mathcal{M}(g_1) = \mathcal{M}(g_1^{(j)}) = 4, \quad \mathcal{M}(g_2) = \mathcal{M}(g_2^{(j)}) = -2 \quad (j=1,2), \quad (24)$$

と計算される。

次に作用積分を計算する。第1生成元 (g_1 , and $g_1^{(j)}$) に対する作用積分は容易に求められ、

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \oint_c pdq = \frac{h}{\hbar} \quad (c = g_1, g_1^{(j)} \quad (j = 1, 2)) \quad (25)$$

となる。したがって (24) 式と (25) 式とから、調和振動子のハミルトニアン J の値 h は、Maslov 量子化されて

$$h = \hbar(N + 1) \quad (N = 0, 1, 2, \dots), \quad (26)$$

の値のみをとる。この結論は、 J に対する通常の量子化からの結論と一致している。第2生成元に対する作用積分の計算に移ろう。Stokes の定理と (9) 式から、作用積分は次の面積積分に帰着する ([5])。

LEMMA 5.1. 不変ラグランジュ部分多様体の連結成分 (不変トーラス) の第2生成元を c と書く。 c に対する作用積分は、

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \oint_c pdq = -\frac{1}{4\pi\hbar} \text{Area}(\pi_h(c)), \quad (27)$$

とあらわせる。ここに、 $\text{Area}(\pi_h(c))$ は曲線 $\pi_h(c)$ によって囲まれた領域の面積をあらわす。

REMARK: 曲線 $\pi_h(c)$ の向きは、第4節で述べたようにとられている。

第2生成元 (g_2 , and $g_2^{(j)}$) に対する面積を求めることもかなり困難ではあるが、長い計算の結果作用積分は楕円積分に帰着する ([5])。例えば $\alpha_1 < E$ の場合、 $c = g_2^{(j)}$ に対して作用積分は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi\hbar} \oint_c pdq \\ &= -\frac{h\alpha_1}{\hbar\alpha_2} \left\{ \left(1 - \frac{2\alpha_2 E}{\alpha_1^2} + \rho_+ \right) (\rho_+)^{-1/2} K(\kappa) \right. \\ & \quad \left. - (\rho_+)^{1/2} E(\kappa) + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} (\rho_+)^{-1/2} \Pi_1(\rho_-, \kappa) \right\} \end{aligned} \quad (28a)$$

と書かれる。ただし、 K, E, Π_1 は Legendre の完全楕円積分をあらわす ([15])。 (28a) 式に現れるパラメータは、

$$\begin{aligned} \rho_{\pm} &= \left(\frac{\alpha_2 E}{\alpha_1^2} - 1 \right) \pm \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \sqrt{E^2 - \alpha_1^2}, \\ \kappa^2 &= \frac{\rho_-}{\rho_+}, \end{aligned} \quad (28b)$$

で与えられる。(28) 式からもわかるように、量子化されたエネルギー値 E を陽に求めることはたいへん難しい。 $c = g_2^{(j)}$ に対する作用積分が E に連続的に依存することは分かる。以後、固有値を陽に求める代わりに、固有値の定性的な挙動に関する議論を行う。

定性的な議論には、次の式が役立つ ([5])。

LEMMA 5.2. 面積積分に対し、次の恒等式と不等式が成り立つ。

$$\text{Area}(\Gamma_{h,E}^{(1)}) = \text{Area}(\Gamma_{h,E}^{(2)}), \quad (29a)$$

$$0 < \text{Area}(\Gamma_{h,E}^{(j)}) < \text{Area}(C_h^{(j)}) < 2\pi h^2, \quad (29b)$$

$$\text{Area}(\Gamma_{h,E}^{(j)}) < \text{Area}(\Gamma_{h,E'}^{(j)}), \quad \text{if } E > E' > \alpha_1. \quad (29c)$$

REMARK: (29c) の下では、次が成り立っている。

$$\lim_{E \rightarrow \alpha_1} \text{Area}(\Gamma_{h,E}^{(j)}) = \text{Area}(C_h^{(j)}) \quad \text{and} \quad \lim_{E \rightarrow \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2\alpha_2}} \text{Area}(\Gamma_{h,E}^{(j)}) = 0. \quad (29d)$$

最初の主要結果は、(29a) 式から得られる。(27) 式と (29a) 式とを組み合わせると、 $\alpha_1 < E$ の場合に恒等式

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \oint_{g_2^{(1)}} pdq - \frac{1}{4} \mathcal{M}(g_2^{(1)}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \oint_{g_2^{(2)}} pdq - \frac{1}{4} \mathcal{M}(g_2^{(2)}), \quad (30)$$

を得る。この恒等式は、もし不変ラグランジュ部分多様体 $M_{h,E}$ の 1 つの連結成分、例えば $\pi_h^{-1}(\Gamma_{h,E}^{(1)})$ 、が Maslov 量子化条件を満たすならばもうひとつの連結成分、 $\pi_h^{-1}(\Gamma_{h,E}^{(2)})$ 、もまた条件を満たすことを主張している。言い換えれば、固有値 $E > \alpha_1$ が Maslov 量子化条件から許容されるならば、このエネルギー E に対して 2 個の異なる Maslov 量子化可能な不変トーラス、 $\pi_h^{-1}(\Gamma_{h,E}^{(j)})$ ($j = 1, 2$)、が存在する。これに対して、固有値 E が $E < \alpha_1$ を満たすときには、Prop.4.4 より E に対応する Maslov 量子化可能な不変トーラスはただ 1 個しか存在しないことが分かる。こうして、第 3 節において得た第 1 の Observation が正しいことが示された。

CONCLUSION 1. エネルギー固有値 $E > \alpha_1$ が Maslov 量子化条件から許容されるならば、 E は、2 重縮退する。

次の疑問は、縮退している固有値は何組存在するか? である。これに答えるために、Lemma 5.2 の不等式 (29b) を用いる。(29b) より、 $g_2^{(j)} = \sigma_h(\Gamma_{h,E}^{(j)})$ に対する Maslov 量子化条件は次のように評価される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &> \frac{1}{2\pi\hbar} \oint_{g_2^{(j)}} pdq - \frac{1}{4} \mathcal{M}(g_2^{(j)}) \\ &> -\frac{1}{4\pi h\hbar} \text{Area}(C_h^{(j)}) + \frac{1}{2} > -\frac{h}{2\hbar} + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (32)$$

もし h が $h = (N+1)\hbar$ ($N = 0, 1, \dots$) と量子化されているなら、右辺は $-\frac{h}{2\hbar} + \frac{1}{2} = -\frac{N}{2}$ となり、Maslov 量子化条件 (22) に実際必要な整数値は 0 から $-[(N-1)/2]$ になる。ここに、 $[(N-1)/2]$ は $(N-1)/2$ の整数部分をあらわす。(32) の中央の不等式より次を得る。

PROPOSITION 5.3. h が、 $h = \hbar(N+1)$ (N :非負整数) と量子化されていると仮定する。もし、 $\text{Area}(C_h^{(j)})$ が $\nu = 0, 1, \dots, [(N-1)/2]$ に対して

$$-\nu - 1 \leq -\frac{1}{4\pi\hbar h} \text{Area}(C_h^{(j)}) + \frac{1}{2} < -\nu \quad (33)$$

満たすならば、Maslov 量子化条件は

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \oint_{g_2^{(j)}} pdq - \frac{1}{4} \mathcal{M}(g_2^{(j)}) = 0, -1, \dots, -\nu \quad (34)$$

と書かれる。したがって、 $(\nu+1)$ 組の 2 重縮退した固有値 $E > \alpha_1$ が存在する。

固有値縮退 (の数) の α -依存性を調べよう。面積 $\text{Area}(C_h^{(j)})$ が

$$\text{Area}(C_h^{(j)}) = 4h^2 \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1} \right] \quad (0 < \arcsin \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} < \frac{\pi}{2}), \quad (35)$$

と計算されるので ([5])、次の同値関係を得る。 $\nu = 0, 1, \dots, [(N-1)/2]$ とするとき

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi\hbar h} \text{Area}(C_h^{(j)}) + \frac{1}{2} &= -\nu \\ \Leftrightarrow -\frac{N+1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1} \right] + \frac{1}{2} &= -\nu. \end{aligned} \quad (36)$$

h が $h = \hbar(N+1)$ と量子化されているとして (36) 式の右辺を比 α_1/α_2 に関して解けば、パラメータ空間において原点を通る直線が $([(N-1)/2] + 1)$ 本得られる。これらの直線を、(36) 式の ν との対応で $\ell_\nu^{(N)}$, $\nu = 0, \dots, [(N-1)/2]$ であらわす。直線群は、 α -空間を $([(N-1)/2] + 2)$ 個の領域に分割する (次ページ Figure 2 参照)。

Figure 2 に示したように、直線 $\ell_\nu^{(N)}$ と $\ell_{\nu+1}^{(N)}$ とに挟まれた領域を $R_\nu^{(N)}$ とあらわす ($\nu = 0, \dots, [(N-1)/2] - 1$)。 $R_{[(N-1)/2]}^{(N)}$ は、第 1 象限で直線 $\ell_{[(N-1)/2]}^{(N)}$ より上の領域を、 $R_{-1}^{(N)}$ は直線 $\ell_0^{(N)}$ より下の領域をあらわすとする。

容易に分かるように、領域 $R_\nu^{(N)} \cup \ell_{\nu+1}^{(N)}$ ($\nu = 0, \dots, [(N-1)/2] - 1$) が、まさに不等式 (33) が成立する領域である。(33) において $\nu = [(N-1)/2]$ のときには、領域 $R_{[(N-1)/2]}^{(N)}$ が不等式の成立する領域になっている。

$\ell_0^{(N)}$ の下の領域 $R_{-1}^{(N)}$ を調べよう。領域 $\{\alpha_1 \geq \alpha_2\} \subset R_{-1}^{(N)}$ においては、(17) から明らかのように縮退は起こり得ない。、残りの領域 $\{\alpha_1 < \alpha_2\} \cap R_{-1}^{(N)}$ においても、(32) 式から Maslov 量子化条件が成立しないことが示される。したがって、 $\alpha \in R_{-1}^{(N)}$ においては縮退が起こらないことが結論される。

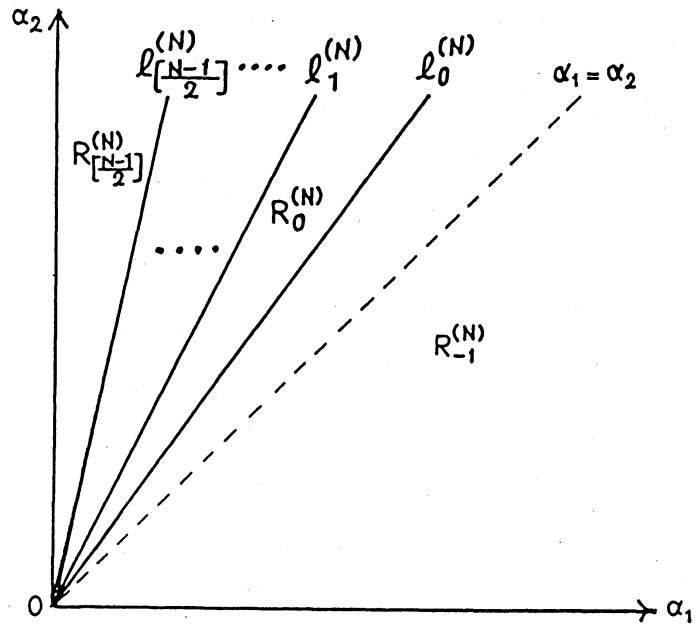


Figure 2. α -空間の直線 $l_\nu^{(N)}$ による分割

以上で正則なトーラス $\pi_h(\Gamma_{h,E}^{(j)})$ に対する Maslov 量子化条件の定性的議論を終える。次に Maslov 量子化条件が適用できない特異トーラス $\pi_h^{-1}(C_h^{(j)})$ (Prop.4.4 Remark 参照) に目を転じる。特異点をもってはいるが、特異トーラスも何らかの意味で‘量子化’されることが望ましい。なぜなら、もし固有値 $E = \alpha_1$ が対応するトーラス $\pi_h^{-1}(C_h^{(j)})$ の特異性ゆえに禁止されたとすると固有値の α に関する連続性が破綻する恐れがあるからである。特異トーラスの‘量子化’の問題を解決する鍵は、分類 (16) と (17) とに基いて特異トーラス $\pi_h^{-1}(C_h^{(j)})$ を、正則トーラス $\pi_h^{-1}(\Gamma_{h,E}^{(j)})$ において $E \rightarrow \alpha_1$ として得られる極限集合と見なすことである。この仮定と (29d) 式とを組み合わせる上で正則トーラスに対する量子化条件 (34) と (27) とを検討すると、(36) 式を特異トーラス $\pi_h^{-1}(C_h^{(j)})$ に対する‘量子化条件’と見なすことができる。すなわち、 $-(1/4\pi\hbar h)\text{Area}(C_h^{(j)}) + 1/2 = -\nu$ ($\nu = 0, \dots, [(N-1)/2]$) ならば $\pi_h^{-1}(C_h^{(j)})$ は‘量子化可能’と考えるのである。(36) 式が α -空間を分割する直線 $l_\nu^{(N)}$ を定めることを思い出せば、特異トーラス $\pi_h^{-1}(C_h^{(j)})$ に対する量子化条件は、まさにこれらの直線、 $l_0^{(N)}, \dots, l_{[(N-1)/2]}^{(N)}$ 、上で成立することがわかる。

こうして、 α が直線、 $\ell_0^{(N)}, \dots, \ell_{[(N-1)/2]}^{(N)}$ 、上にある時には、特異トーラス $\pi_h^{-1}(C_h^{(j)})$ に対応する2重縮退した固有値 $E = \alpha_1$ が存在すると結論される。

正則トーラスと特異トーラスの量子化に関する議論の結果として、直線 $\ell_\nu^{(N)}$ 上の α に対しては、 $(\nu+1)$ -組の2重縮退固有値が存在することがわかった。 ν -組は正則トーラス $\pi_h^{-1}(\Gamma_{h,E}^{(j)})$ に対応し、残りの1組は特異トーラスに対応している。詳細は、[5]を参照されたい。以上をまとめると次の通り。

CONCLUSION 2. h は $h = \hbar(N+1)$ と量子化されているとする。Figure 2に示されたパラメータ空間 $\{\alpha \mid \alpha_1 > 0, \alpha_2 \geq 0\}$ の分割に従って、固有値縮退の数が次のように分類される。

- (1) $\alpha \in R_{-1}^{(N)}$ ならば、縮退は生じない。
- (2) $\alpha \in R_\nu^{(N)} \cup \ell_\nu^{(N)}$ ($\nu = 0, 1, \dots, [\frac{N-1}{2}]$)ならば、 $(\nu+1)$ -組の2重縮退した固有値が存在する。

Conclusion 2によって、第3節の第2のObservationが正しいことが確かめられる。なぜならば、 $\alpha_1 \geq \alpha_2$ の場合はConcl.2の(1)に含まれるからである。

Conclusion 2を用いると、第3節の最後のObservationもやはり正しいことが確かめられる。 h は $h = \hbar(N+1)$ と量子化されているとしよう。Observationの妥当性の確認は、分割された α -空間(Fig.2)上で直線 $\{\alpha_1 = \text{constant}\}$ をたどることですっきりと行える。直線 $\{\alpha_1 = \text{const.}\}$ と $\ell_\nu^{(N)}$ との交点における α_2 の値を $\alpha_2^{(N,\nu)}$ であらわす($\nu = 0, 1, \dots, [(N-1)/2]$)。さらに、 $\alpha_2^{(N, [(N-1)/2]+1)} = \infty$ 、 $\alpha_2^{(N,-1)} = 0$ としておくと便利である。 α を直線 $\{\alpha_1 = \text{const.}\}$ 上で $\alpha_2 = 0$ から出発して上へたどってゆくと、Concl.2及び E の α に関する連続性から次を得る。

CONCLUSION 3. α_1 を固定し、 $h = \hbar(N+1)$ だとする。 $\alpha_2 \in [\alpha_2^{(N,\nu)}, \alpha_2^{(N,\nu+1)})$ が満たされていれば、 $(\nu+1)$ -組の固有値は2重縮退したまま保たれる。

こうして、第3節で得たObservationsはすべて正しいことが確認された。

参考文献

1. R. T. Swimm and J. B. Delos, J. Chem. Phys. **71** (1979), p. 1706.
2. M. Kuwata, A. Harada, and H. Hasegawa, J. Phys. **A23** (1990), p. 3227.
3. K. Ganesan and M. Lakshmanan, Phys. Rev. **A45** (1992), p. 1548.

4. Y. Uwano, *Physica* **D35** (1989), p. 1.
5. Y. Uwano, preprint.
6. M. Robnik, *J. Phys.* **A17** (1984), p. 109.
7. M. Lakshmanan and H. Hasegawa, *J. Phys.* **A17** (1984), p. L889.
8. M. Kummer, *Commun. Math. Phys.* **48** (1976), p. 53.
9. R. Cushman and D. L. Rod, *Physica* **D6** (1982), p. 105.
10. S. Kobayashi and Y. Nomizu, "Foundations of Differential Geometry, Vol. 1," Wiley, New York, 1963.
11. R. Zurmühl, "Matrizen und ihre Technischen Anwendungen," Springer-Verlag, Berlin, 1946.
12. V. I. Arnold, "Mathematical Methods of Classical Mechanics," Springer-Verlag, New York, 1978.
13. A. Yoshioka, *Tokyo J. of Math.* **9** (1986), p. 415.
14. V. I. Arnold, *Functional Anal. Appl.* **1** (1963), p. 1.
15. A. Erdélyi et. al., "Higher Transcendental Functions, Vol. 2," MacGraw-Hill, New York, 1953.