数理解析研究所講究録
863巻 1994年 53-66

力学系の可積分性と解の動く特異点

(株)アルプス社　石井雅治(Masaharu Ishii)

目　次

§1 始めに

ここでは常微分方程式であらわされる代数的に完全可積分な力学系を対象とする．1つは力学的な動機からであり，もう1つは代数幾何学的興味からである．

例えば可積分性の判定が適当な必要条件を用いて可能にな

るなら，系の定性的挙動はそれだけである程度決定できる．このような結果としてはHamilton系におけるZiglin＝吉田[1]の判定法がある．パラメーターを含む系に対しては，系の可積分性がやぶれる臨界点の決定や可積分系からの隔りを考察することに役立つことが期待される．またシンメトリーによるリダクションや戸田ラティスなどを通して可積分な偏微分方程式系を調べる手がかりにもなる．この動機からは可積分性の計算しやすい必要条件をいくつか用意することが目標になる．

代数幾何学的興味としては，対象を代数的に制限した分，通常の微分方程式論より豊富あるいは大域的な内容を持つことが期待される．この観点からは，Painlevéの代数的微分方程式に対する解の動く特異点の研究がある．最近では可積分なHamilton系の解全体を⊖関数に結びつける議論[2),3)]もある．どちらも大域的な性質が興味の対象となっている．

これらに関連する研究をいくつかあげておこう．

Kovalevskaja[4)]（1889）：剛体運動において，解の特異点が極だけになるよう慣性モーメント等のパラメーターを決定することで可積分になる場合の1つを発見した．

Ablowitz他[5)]（1980）：KdVなどをシンメトリーを使い常微分方程式にリダクションし，これの解の動く特異点が極で

あればもとの偏微分方程式は可積分であるという予想を立てた。ここで解の動く特異点を調べる具体的手法を示した。この手法は現在ARSアルゴリズムあるいはPainlevé テストと呼ばれている。

吉田[6]（1983）：スケーリング不変な特解の回りで系を線形化し，その時に計算される固有値と，特解上で非退化な第1積分との関係を示した。

Adler, von Moerbeke[2]（1987）：レベルセットがトーラスで表される可積分Hamilton系で，解をテータ関数表示し，その特異点回りでの展開を結びつける系統樹を与えた。

Sigga Ercolani[3]（1989）：変数分離可能なHamilton 系がPainlevé 特性を持つことを示し，特異点回りの諸展開を結びつけた。

§2 イントロダクション

ここでは力学系

$$\dot{x} - \lambda(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{C}^n, \lambda : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n) \qquad (2.1)$$

で次の条件を満たすものを考察する． 1. $\lambda_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ は$\mathbb{C}(x)$ 上の代数関数．2. 系は $n-1$ 個の独立な第1積分Φ_2, $\Phi_3,\cdots,\Phi_n$を有する．（$n=1$のときは積分は0個とする．）3. 各Φ_i $(i=2,3,\cdots,n)$ は$\mathbb{C}(x)$上の代数関数．この力学系を

"代数的完全可積分系"と呼ぶ．以下必要な概念をいくつか定義し，Painlevé による $n=1$ の場合の結果を示す．

例えば

$$\dot{x} = -x^2/t$$

の解は

$$x = \frac{1}{\log t - C} \quad (C\text{は任意定数})$$

とあらわされる．解の特異点は $t=0$ にあるがこの位置は初期値によらず常に一定である．一方

$$\dot{x} = \frac{1}{2}x^{-1}$$

の解は

$$x = \sqrt{t-C} \quad (C\text{は任意定数})$$

なので，特異点は $t=C$ にありこの位置は複素平面上の任意の点でありうる．このように初期値に依存してその位置が変わりうる解の特異点を"動く特異点"，前者のように一定なものを"動かない特異点"と呼ぶ．線形系の特異点はすべて動かない特異点であり，動く特異点は非線形系特有の性質であることに注意．一般に，λ が t を直接には含まない自励系の場合，$x=x(t)$ をその解とすると $x=x(t-C)$ も明らかに解になる．つまり解の特異点はすべて動く特異点となる．動く特異点がすべて極であるとき，系は"Painlevé 特性を持つ"と言い，すべて代数的であるとき"弱い Painlevé 特性を持つ"

と言う.

定理1(Painlevé)

$P(X, Y, Z)$を3変数多項式とした時，1次元の非自励常微分方程式

$$P(\dot{x}, x, t) = 0 \qquad (2.2)$$

の解の動く特異点はすべて代数的である，すなわち系は弱いPainlevé特性をもつ. 従って(2.1)の解の特異点はすべて代数的であることがわかる. これが$n>1$の場合にも成立するかどうかが主題である. もし成立するなら特異点のうちに超越的なものが存在することを言うだけで系の非可積分性を主張できる. このような手法による可積分性の判定法は，数学的な証明がなかったにも関らず，Kovalevskaja 以来数多く試みられ成果を上げているのである. この判定の具体的方法を§4で議論し，§3で主題に関わる定理を述べ，§5,6でその証明を行う.

§3 可積分性と動く特異点

定理2(主結果)

代数的可積分系(2.1)のほとんどすべての解の動く特異点は代数的である.

証明は§6. 定理より系の非可積分性を判定できる. 経験

によれば多くの系でこの逆も成り立つ．適当に時間のパラメトライズを変更すれば，定理を精密化して逆が成立するようにできる．系の可積分性は明らかに

$$\dot{x} - \lambda(x) \quad \to \quad \dot{x} - a(x)\lambda(x) \quad (a : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\ a(x) \neq 0)$$

という変換で不変である．そこで $a(x) = \lambda_1^{-1}(x)$ とおき

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 - 1 = 0 \\ &\dot{x}_j - \lambda_j(x)/\lambda_1(x) = 0 \qquad (j = 2, 3, \cdots, n) \end{aligned} \tag{3.1}$$

を考えるとこれは $\dot{x} - \lambda(x)$ と同じ第1積分をもつ．この(3.1)を(2.1)の"標準形"と呼ぶことにしよう．

定理3

系が代数的に可積分であることの必要十分条件は，その標準形の解のほとんどすべてが，$n-1$ 個の任意定数 $c_2, c_3, \cdots, c_n$ と $t - t_0$ の体 $\mathbb{C}(c_2, c_3, \cdots, c_n, t - t_0)$ 上の代数関数であらわされることである．

結局，時間の計り方を変えてやれば，代数的可積分系の問題は代数幾何の問題，つまりパラメーターをもつ1次元代数曲線の問題に還元される．定理2と3を比較すると一般に定理2での逆は成立しない．そのためには解の中への任意定数の入り方が問題であることがわかる．

§4 動く代数的特異点の計算法

解の動く特異点が代数的であるかどうかは，ほぼ四則演算の有限回のくり返しで決定できる[5]. この決定可能性は可積分性を判定する目的にとって重用な問題となる. そこで代数的な特異点の回りでの具体的な展開の構成法をいくつかの段階に分けてみてみよう.

1.展開形：動く特異点は $t=0$ にあるとして一般性を失なわないから解を Puiseux 級数

$$x_i(t) = t^{e_i/m}\left(\sum_{j=0}^{\infty} x_{ij}t^{j/m}\right) \quad (x_{ij}\in\mathbb{C},\ e_i\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{N}$$
$$i=1,2,\cdots,n) \tag{4.1}$$

であるとして $\dot{x}-\lambda(x)=0$ に代入し t の各巾ごとに整理しその係数を最底次から順に $\Delta_0(X_0)$, $\Delta_1(X_1, X_0)$, …… とおく. ここで $X_j=(x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{nj})$ とした. 直接計算により $1<k$ のとき

$$\Delta_k = I(k)X_k - L_k(X_{k-1}, X_{k-2}, \cdots, X_0),$$
$$I(k) = \frac{k}{m'}1_n - B(X_0) \quad (B:\mathbb{C}^n\to \mathrm{mat}_{\mathbb{C}}(n,n),\ m'\in\mathbb{N}) \tag{4.2}$$

と表現できることがわかる. 従って解の Puiseux 展開可能性は無限個の代数方程式系

$$\Delta_0(X_0)=0,\ \Delta_1(X_1, X_0)=0,\ \cdots\cdots \tag{4.3}$$

の可解性に還元される. この最初のステップを 2. で，それ以後のステップを 3. で扱う.

2. ドミナントビヘイビアー：最底次の $\Delta_0(X_0)=0$ が解をもつように e_i/m を決める．この組み合わせは何通りかある．Taylor 展開形の解は自明に存在するから除く．この解からできる展開の最底次

$$L(t)=(X_{10}t^{e_1/m}, X_{20}t^{e_2/m}, \cdots, X_{n0}t^{e_n/m})$$

を"ドミナントビヘイビアー"と呼ぶ．

3. 最底次以後：$\det I(k)\neq 0$ なる k に対しては $I(k)^{-1}$ が存在するから

$$X_k = I(k)^{-1}L_k(X_{k-1}, X_{k-2}, \cdots, X_0)$$

としてやればよい．従って $\det I(k)=0$ となる k が展開のクリティカルポイントになる．この k を"Kovalevskaja Exponent (KE)"あるいは"resonance"と呼ぶ（厳密にいうと resonanceの定義はやや異なる）．

4. 可解性：mを適当においたとき KE に負でない有理数のものがあるときは m を十分大きくとりこれを整数にできる．従って KE は整数であるか $\mathbb{C}-\mathbb{Q}$ の元であるかのどちらかにできる．$k\in$ KE のとき $\dim(\mathrm{Im}\, I(k))<n$ となる．このときもしうまく $L_k(X_k, X_{k-1}, \cdots, X_0)\in \mathrm{Im}\, I(k)$ が成り立つなら $\mathrm{Ker}\, I(k)$ は任意に選べて，X_k に任意定数が入る．だが成り立たないならここで展開はいきづまってしまう．(4.2) より KE は n 個しか存在しないのでもし KE のいくつかが $\mathbb{C}-\mathbb{Q}$

の元であれば展開は破綻しないものの十分な任意定数が存在しないことになる．結局 $k \in KE$ のとき $k \in \mathbb{C}-\mathbb{Q}$ なら任意定数が不足し $L_k \notin \mathrm{Im}\, I(k)$ なら展開が破綻し，このどちらが生じても十分な任意定数をもつ解の Puiseux 展開は不可能になることがわかる．

以上の展開をすべてのドミナントビヘイビアーに対して行い，十分な任意定数をもつ代数的特異点の回りの解の展開が存在するかどうか，ほぼ有限回の四則演算だけで，決定できる．もしこの展開が存在しないなら定理2より，系は代数的可積分ではない．逆に展開が存在するからといって可積分性が主張できるわけではないことに注意．

§5 消去法

定理の証明は代数的に行う．陰関数の定理を使う解析的手法では第1積分の grad が退化している領域での解の様子を捉えることが困難である．しかし代数的な演算はこの退化を切り開き適当なパラメトライズを可能にするから，ほとんどすべての領域で解を取り扱うことができる．その道具として19世紀数学の消去法を利用する．単に定理の結果を導くだけなら現代的な代数幾何のより簡潔な定式化を使うことができる．だが物理的興味からは証明が構成的であることが望ましく，

コンピューター代数的関心からは証明の過程が有限回の演算に還元できることは重用である．ここでは消去法を解説する．

まず2変数の場合を示す．

$$P(x,y)=0,\quad Q(x,y)=0 \qquad (P, Q \in \mathbb{C}[x,y])$$

の定義する代数多様体をVとおく．deg をxについての次数とする．一般性を失なうことなく$\deg Q \leqq \deg P$とできる．従ってPをQで割り，

$$P = q_0 Q + r_0 \qquad (r_0 \in \mathbb{C}(y)[x])$$

とすれば余りr_0は$\deg r_0 < \deg Q$を満たす．また明らかにV上で$r_0=0$が成り立つ．このような除算をくり返し

$$\begin{aligned} Q &= q_1 r_0 + r_1 \\ r_0 &= q_2 r_1 + r_2 \\ &\ \vdots \\ r_{M-2} &= q_M r_{M-1} + r_M \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{l} q_i, r_j \in \mathbb{C}(y)[x] \\ \deg r_j > \deg r_{j+1} \end{array} \right.$$

xを含まないr_Mを得る．r_Mの分母を払ったものをRとおくと（$R \in \mathbb{C}[x,y]$），作り方からV上で$R=0$が成り立つ．また$\deg r_j$と$\deg r_{j+1}$は少なくとも1以上差があるからMは有限，つまり有限回の除算でRが得られる．Rを"終結式"と呼ぶ．

以上の操作を多変数の場合に拡張し

$$P_1(x_1,\cdots,x_N)=0,\ P_2(x_1,\cdots,x_N)=0,\ \cdots,\ P_M(x_1,\cdots,x_N)=0$$

の定義する代数多様体V上で0になる$x_1, x_2, \cdots, x_L$ $(L<N)$

についての多項式

$$R_1(x_1, \cdots, x_L), \cdots, R_K(x_1, \cdots, x_L)$$

を求めることを"消去法"と呼ぶ．この終結式はVが$x_1, \cdots, x_L$でパラメーター付けできること，さらにVはこのパラメーターの代数関数により表現できることを意味している．Vの複素多様体としての特異点はこの代数関数の分枝として表現される．消去法の計算は有限回の多項式の除算の反復であるからコンピューター上の数式処理系上で実行できる．

§6 主定理の略証

証明１（定理２）

$\Phi_2(x) = c_2, \Phi_3(x) = c_3, \cdots, \Phi_n(x) = c_n$とおくと第１積分は代数的であるから，適当な$\mathbb{C}[x, c_i]$の元$\Psi_i(x, c_i)$が存在してこれらは

$$\Psi_2(x, c_2) = 0, \Psi_3(x, c_3) = 0, \cdots, \Psi_n(x, c_n) = 0$$

と等価になる．これが定める代数多様体をSとおく．積分の独立性よりSはほとんどすべてのc_iの値に対して１次元複素多様体になる．これらと方程式の第k成分$\dot{x}_k - \lambda_k(x) = 0$に消去法を行い$x_i$以外の変数を消去して終結式

$$P_i(\dot{x}_i, x_i, c_2, c_3, \cdots, c_n)$$

を得る．この操作が実行可能であることは積分の独立性によ

って保障される．S上で

$$P_i(\dot{x}_i, x_i, c_2, \cdots, c_n) = 0 \qquad (6.1)$$

が成立する．これは1階の代数的微分方程式であるから，Painlevéの定理が適用できて，この方程式の解の動く特異点は代数的である．従って(2.1)の解の動く特異点はほとんどすべてのc_i ($i=2, 3, \cdots, n$)の値に対して代数的である．c_iの値によっては(6.1)が$\dot{x}_i$を真には含まなくなる可能性があることに注意．□

証明2（定理3）

証明1と同じ記号を使う．Sの定義多項式に消去法を行い，x_kとx_1以外の変数を消去し，代数方程式

$$P_k(x_k, x_1, c_2, c_3, \cdots, c_n) = 0$$

を得る．$x_1 = t - t_0$であるから必要条件が言えた．逆は

$$P_k(x_k, t-t_0, c_2, c_3, \cdots, c_n) = 0$$

の$t-t_0$をx_1におきかえてこれらからc_k以外の積分定数を消去して$\varphi_k(x, c_k)$を作ればよい．□

§7まとめ

1. n次元の完全可積分力学系の，ほとんどすべての解の特異点は代数的である．

2. n次元の代数的力学系が代数的可積分であることの必

要十分条件は，ほとんどすべての解が任意定数と時間の代数関数として表現されることである．

3．解の特異点が代数的であるかどうかはほぼ有限回の四則演算で決定可能である．従って，非可積分性の判定問題は決定可能な問題である．

参照文献

1) H. Yoshida, "A criterion for the non-existence of an additional integral in Hamiltonian systems with a homogeneous potential", Physica 29D (1987) 128-142.

2) M. Adler, P. van Moerbeke, "The complex geometry of the Kowalewski-Painlevé analysis", Invent. math. 97 (1989) 3-51.

3) N. Ercolani, E. D. Siggia, "Painlevé Property and geometry", Physica 34D (1989) 303-346.

4) S. Kowalevski Acta Math 12 (1889) 177-, Acta Math 14 (1990) 81-.

5) M.J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur, "A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I," J. Math.

Phys. <u>21</u> (1980) 715-721

6) H. Yoshida, "necessary condition for the existence of algebraic first integrals I, II", Celes. Mech. <u>31</u> (1983) 363-379, 381-399.