

複素力学系 $Z_{n+1} = \ln Z_n + C$ の分岐とスケーリング則

岡山大理 川部 健 (Takeshi Kawabe)

川崎医療福祉大 田中昌昭 (Masaaki Tanaka)

1. 分岐の多様性

複素力学系 $Z_{n+1} = \ln Z_n + C$ は多価関数で, $\alpha \leq \arg(Z_n) < 2\pi + \alpha$ のブランチ α の取り方によって, そのマンデルブロ集合は全く変わったものになる. (1) $\alpha = 0$, (2) $\alpha = -\pi/2$ は 図 1, 2 のように固定点と周期点 (図中の数字は周期数) からなり, (3) $\alpha = -\pi$ では固定点領域しか存在しない¹⁾. 多価関数のブランチの選び方で周期解の分岐構造が一見, 非常に変わったものになるが, α を連続的に変えてそのマンデルブロ集合をコンピュータ・グラフィックスで見ると, この 2 つの分岐図の関連を見いだすことができる. 例えば, ブランチ・カットを C x 軸 ($\alpha = 0$: 図 1) から右周りに少しずつ回転させていくと, 図 1 の下側の周期構造が消えて, 上側に新たに微細な周期構造がフラクタル的に現れ, 拡大していく. このような分岐構造の変化が進んで 図 2 ($\alpha =$

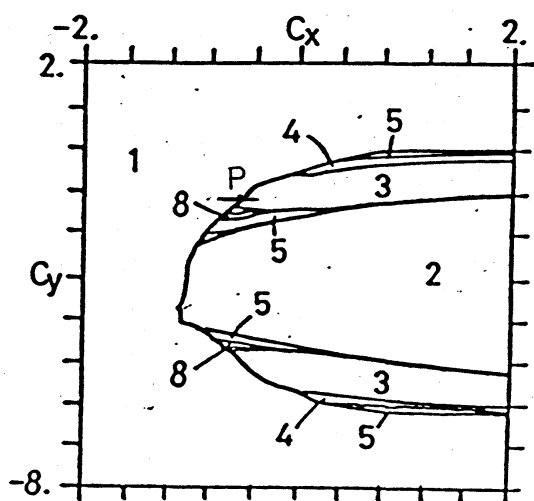


図 1. $\alpha = 0$ の分岐図

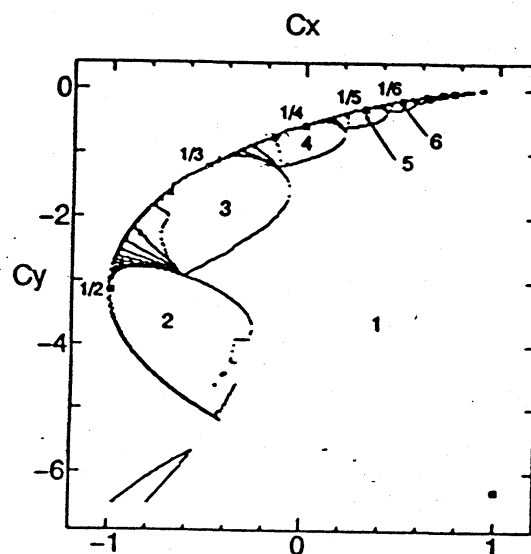


図 2. $\alpha = -\pi/2$ の分岐図

$-\pi/2$) になる。ブランチをさらに右に回転させると、周期領域は益々やせ細り、 $\alpha = -\pi$ では固定点領域だけになる。

図 1 は初期値 $Z_0 = (1, 1)$ のマンデルブロ集合であるが、この分岐図から自己相似な構造を見いだすことは容易ではない。しかし、図 2 は初期値 $Z_0 = (-1, 1)$ の結果で、 $C = (1, 0)$ に向かって自己相似な分岐構造が無限に続いている様子を明らかに観察できる。 $\alpha = 0, -\pi/2$ の分岐図は、いずれの場合にも $Z_0 = (1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$ で調べているが、初期値によって大した影響を受けない。参考のために、末尾に添付の論文（投稿中）の Fig. 1 は初期値 $Z_0 = (1, 1)$ の分岐図で、これを図 2 と比較すればよい。我々は、分岐図 2 を解析することにより、写像のもつ スケーリング則などの universal な性質を調べることができる。

この複素力学系は $Z = (X, Y)$ により, 実変数 X, Y の以下のような 2 次元写像になる.

$$X_{n+1} = \ln(R_n) + C_x$$

$$Y_{n+1} = \theta_n + C_y$$

ただし,

$$R_n^2 = X_n^2 + Y_n^2$$

$$\theta_n = \arg(Z_n) = \text{Tan}^{-1}(Y_n / X_n)$$

写像を複雑にしている要因は, 多価関数 Tan^{-1} の存在である.

図 1, 2 ではカオスが現れなかったが, これは θ_n の定義領域を 2π とする限り, α の値に依らず写像は invertible になるからである. しかし, 例えば $-\pi/2 \leq \theta_n < \pi/2$ のように取ると, 写像は non-invertible になり, カオス領域を見ることが出来る.

2. 周期加算則とホップ分岐

対数写像の分岐図 1 とその一部を拡大した図 3 から,

$$m \text{ 周期} + n \text{ 周期} \rightarrow (m + n) \text{ 周期}$$

の周期加算則が成り立っていることが容易に分かる. その結果として, 例えば, 図 3 では $3k + 2$ の周期列が固定点との境界に向かって続いていて, しかも各周期点の領域があるスケ

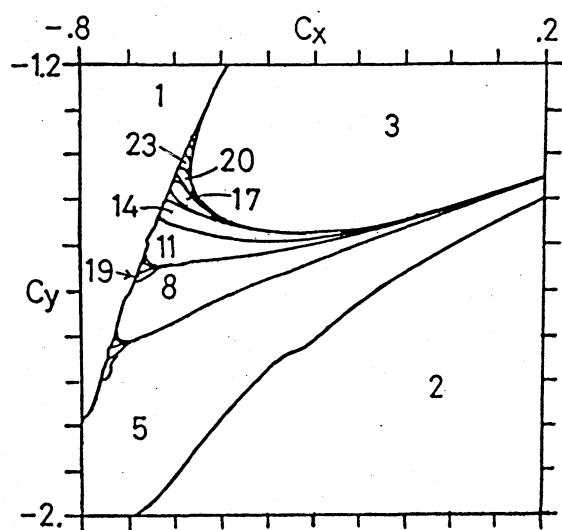


図 3. 図 1 の P 点近傍の拡大図

ーリング則（末尾の論文を参照）に従って縮小し、極限として境界線上の一点で準周期解をもつことになる。図 2 では、もっと一般に、 $nk + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) の周期列の存在を明瞭に見いだすことができる。この周期加算則は、結合ロジスティック写像²⁾、サイン・サークル写像³⁾、van der Pol 振動子⁴⁾などでも見られる universal な性質である。

図 1, 2 で左側の固定点と周期領域の境界線を求めてみよう。

写像関数のヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos \theta}{R} & \frac{\sin \theta}{R} \\ -\frac{\sin \theta}{R} & \frac{\cos \theta}{R} \end{pmatrix}$$

で表され、従ってその固有値は次のようになる。

$$\frac{1}{R} \exp(\pm i\theta)$$

固定点との境界線上で $R = 1$, その境界線はサイクロイド

$$C = \exp(i2\pi\Omega) - i2\pi\Omega \quad (\theta = 2\pi\Omega)$$

を描く. 図 1, 2 の左側の境界線はこのサイクロイドの一部を示している. そして, 固有値から容易に分かるように, この境界線で固定点は不安定になり, ホップ分岐を起こして, 周期点に転移する.

図 1 の境界線上の点 P を水平に横切ってパラメータ C_x を変化させたとき, その iterative points (初期値 $Z_0 = (-10, -10)$ から最初の 100 点を捨て, 続く 1000 点をプロットして) Z_n の軌跡の変化を描いたものが図 4 である. 図の b), c) も最終的には固定点に収束するが, 順次境界に近づいていくに従い必要な繰り返し数が多くなることが分かる. しかも, 図 b), c) のスパイラル状の固定点を目指す 29 本の手は, そのまま境界を越えてもそのメモリを引き継いで, d) の 29 周期点に反映されている. e) の 61 周期は, 29 周期と 32 周期 ($3k + 2$ の周期列) の周期加算則の結果と考えられる.

3. 境界近傍の振舞い

このテーマの研究報告は, 現在 Journal of Physical Society of Japan に投稿中で, 末尾に添付する.

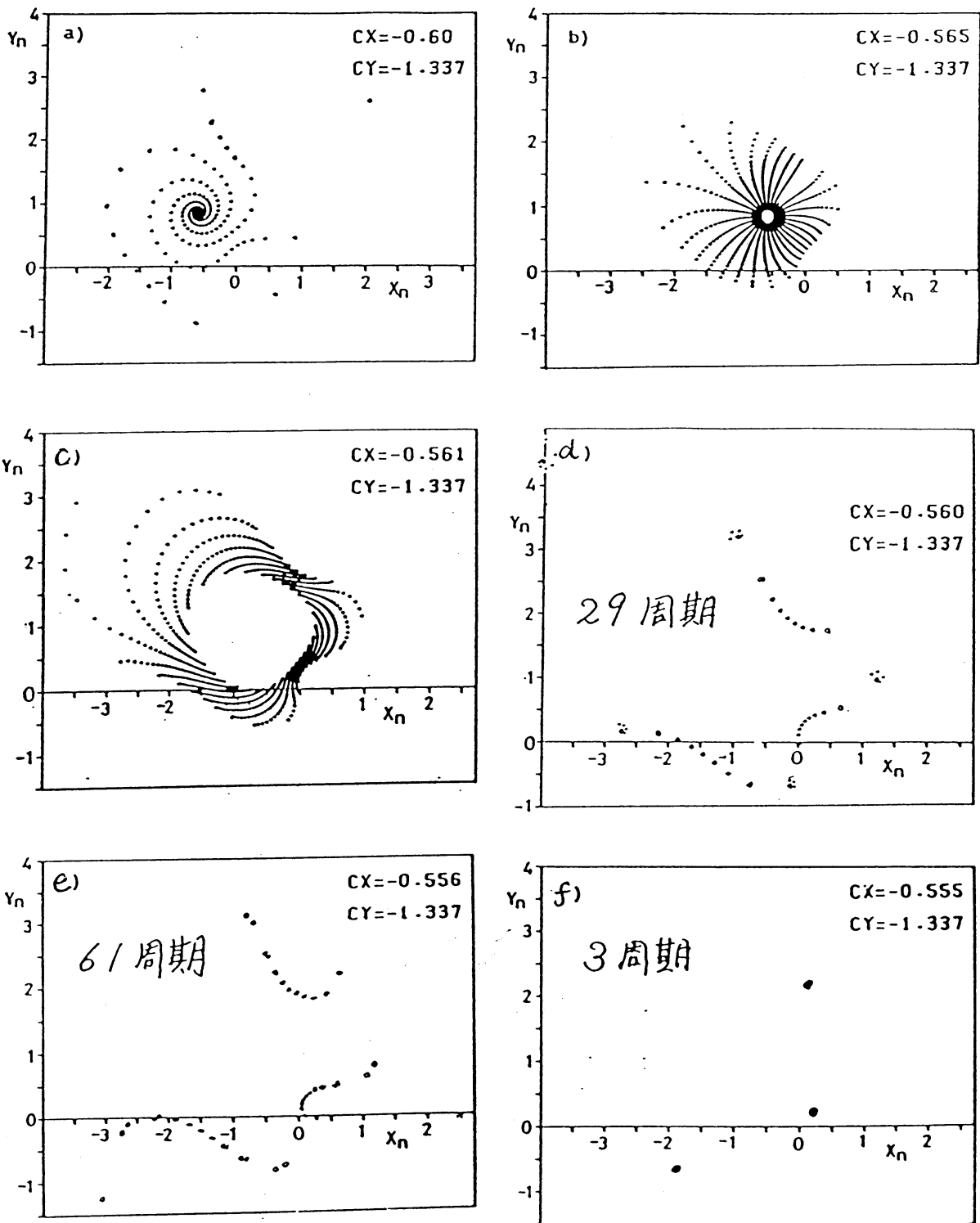


図 4. 図 1 で P 点を水平に左から右に横切ったときの
iterative points の変化

4. カオスの出現

対数写像の領域を $-\pi/2 \leq \theta_n < \pi/2$ に限定すると、写像は non-invertible になり、カオスが現れる。さらに、初期値 Z_0 の y 成分を 0 に選ぶと、そのマンデルブロ集合は C_x 軸に関して対称的になり、しかも C_x 軸上の区間 $(-1, 1)$ でもカオスが現れる。この C_x 軸上のカオスは既に、1次元対数写像 $x \mapsto \ln(a|x|)$ として報告しているもので、⁵⁾ $C_x = \ln(a) \approx 1$ でタイプ I、 ≈ -1 でタイプ III の間歇性カオスを与える。初期値 $Z_0 = (1, 0)$ に対するマンデルブロ集合を図 5 に示す。図中の数字は周期数で、やはり周期加算則が成り立っていることが分かる。境界が明瞭でないのは種々の多周期点の存在と繰り返し数の不足などに依る。左側の固

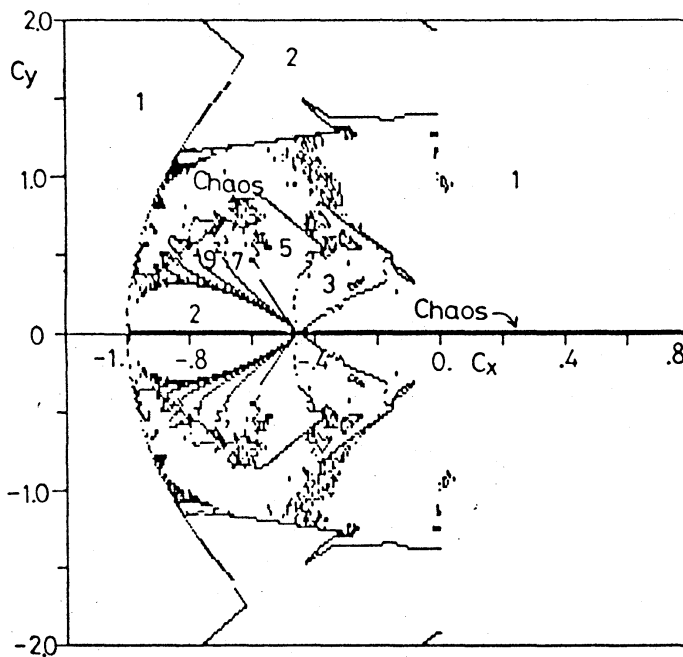


図5. $-\pi/2 \leq \arg(Z) < \pi/2$ に対する分岐図

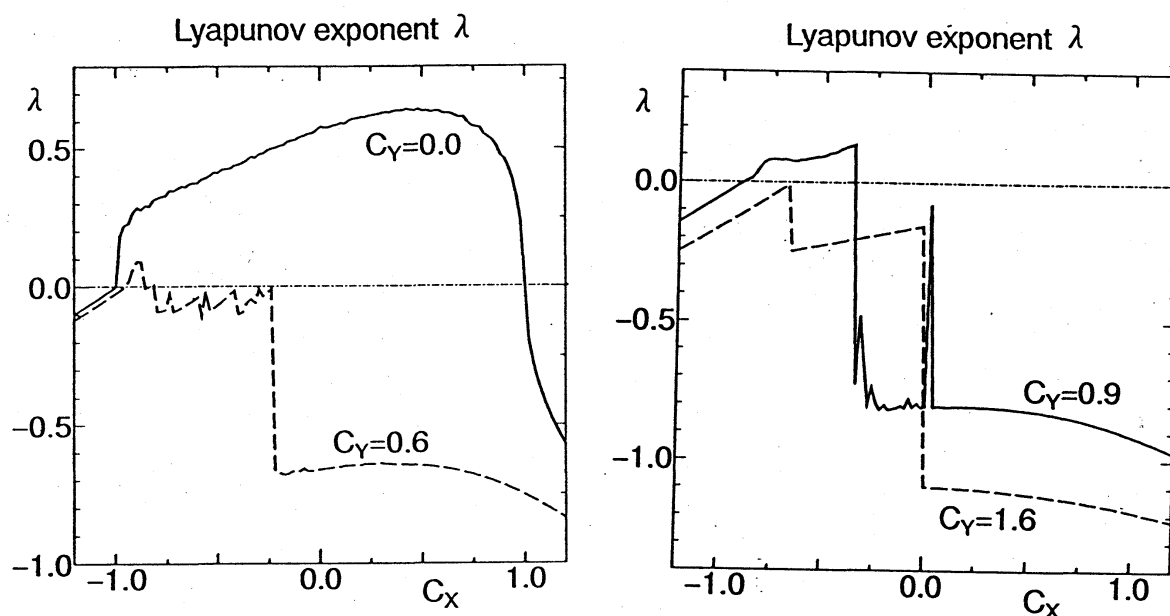


図 6. 水平な直線に沿うリアプノフ指数の変化

定点との境界は、やはりサイクロイド曲線で表される。対数

写像におけるリアプノフ指数は、 $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \ln(R_i)}{n}$

で表されるが、 C_x 軸に平行な4つの直線 $C_y = 0, 0.6, 0.9, 1.6$

に沿うリアプノフ指数を図6に示す。 $\lambda > 0$ となるところは

図5のカオス領域に対応している。 $C_y = 0$ 以外で現れ

るカオス領域ではタイプIIの間歇性カオスが存在するだろう。

5. 指数写像

対数写像の逆関数写像である、指数写像 $Z \mapsto C \exp(Z)$

は、R.L.Devaney による研究⁶⁾があるが、詳細な分岐の構造や

周期加算則、スケーリング則など universal な性質について

の課題が残っている。対数写像と対応するどんな性質があ

るのだろうか。指数写像には対数関数の多価性に起因する分岐の多様性はないが、常に $\pm\infty$ と0の問題が写像につきまとう。我々が対数写像の周期分岐に関して見いだした、周期領域の面積のスケーリング則 $S(k) \sim k^{-6}$ が果たして成り立っているのだろうか。他の多くの余次元2の写像に対して、このスケーリング則の確認を行うことも、今後の課題である。

参考文献

- 1) T. Kawabe and Y. Kondo: J. Phys. Soc. Jpn. **62**(1993)497.
- 2) K. Kaneko: Prog. Theor. Phys. **69**(1983)1427.
K. Satoh and T. Aihara: J. Phys. Soc. Jpn. **59**(1990)1123.
- 3) K. Kaneko: Prog. Theor. Phys. **68**(1982)669, **69**(1983)403.
- 4) G. Quin, D. Gong, R. Li and X. Wen: Phys. Lett. **A141**(1989)412.
- 5) T. Kawabe and Y. Kondo: Prog. Theor. Phys. **85**(1991)759, **86**(1991)581.
- 6) R. L. Devaney: Bull. Amer. Math. Soc. **11**(1984)167.